# Maintenance et Sûreté de Fonctionnement

Pr ECH-CHHIBAT

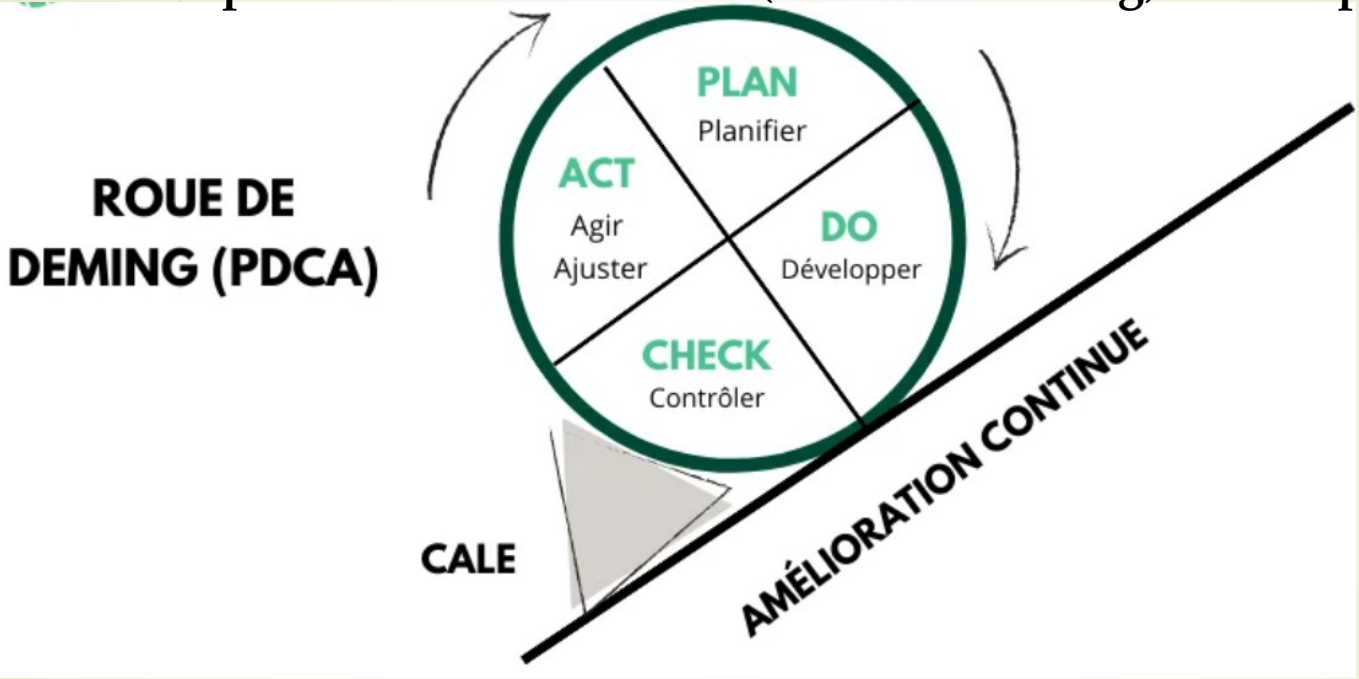
# Programme

- Introduction & Définitions: FMDS
- Etude du comportement du matériel en service
- Estimation des fonctions de FMDS par des données d 'observation
- Outils d 'évaluation et d 'amélioration des paramètres de FMDS
- Outils d 'analyse des risques
- Maîtrise des risques par la gestion des pièces de rechange
- Maîtrise des risques par un remplacement préventif

# Maintenance et Sûreté de Fonctionnement



**Mettre en place la méthode PDCA (Roue de Deming) en 4 étapes**



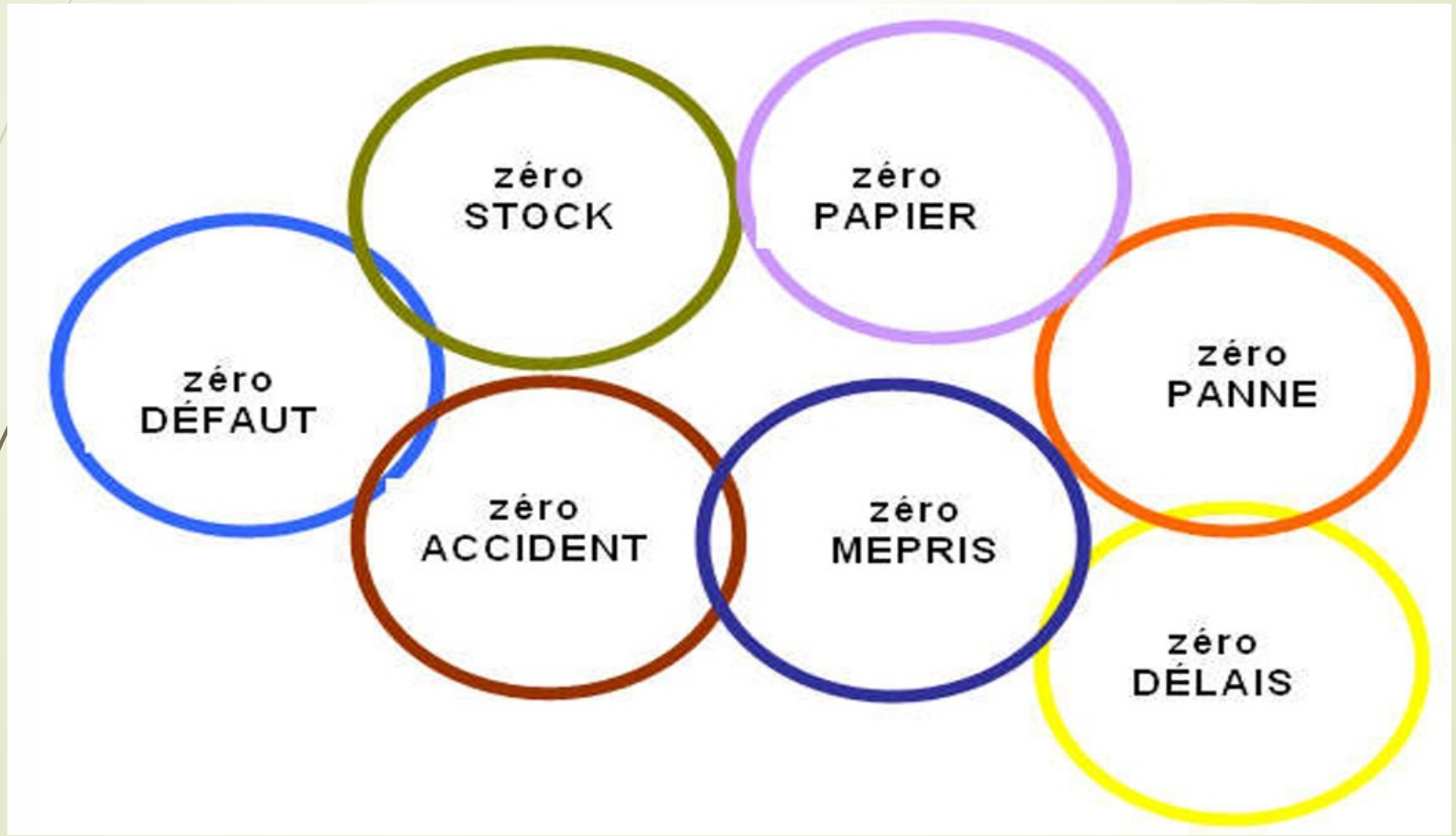

Il s'agit de suivre, dans le sens des aiguilles d'une montre, les étapes suivantes de la méthode PDCA :

- **Plan**: Préparer, Planifier
- **Do**: Développer, réaliser concrètement, mettre en œuvre
- **Check**: Contrôler, vérifier
- **Act** (ou **A**djust): Agir, ajuster, réagir

# Maintenance et Sûreté de Fonctionnement



Les 7 zéros de la qualité et la maintenance



# Les 7 zéros de la qualité et la maintenance

**CONFORMITE AUX EXIGENCES :**

- **Zéro Défaut :** indique l'impérieuse nécessité de bien faire du premier coup ;
- **Zéro Délai :** précise de fournir à l'heure prévu le produit ou le service, et parfois les deux à la fois ;

**PAS D'ACTIONS INUTILES:**

- **Zéro Papier :** invite à réduire les informations au nécessaire et suffisant en dématérialisant le plus possible ces dernières
- **Zéro Stock :** souligne qu'il ne faut fabriquer que la quantité indispensable c'est à dire celle correspondant au besoin client.

**PAS D'IMPREVUS POSSIBLES:**

- **Zéro Panne :** invite à la maintenance préventive afin d'éviter les arrêts machine intempestifs
- **Zéro problème de sécurité :** prévoit et élimine les risques en se basant sur l'analyse fine des procédés

**ECOUTE DE TOUS A TOUS NIVEAUX:**

- **Zéro Mépris :** donne importance à la sécurité des biens mais également à celle des personnes.

# Sûreté de Fonctionnement



**Définitions (NF X60.010)**

Ensemble des aptitudes d ’un bien qui lui permettent de remplir une fonction requise (ou sa fonction) au moment voulu, pendant la durée prévue sans dommage pour lui même et son environnement

# Sûreté de Fonctionnement: composantes



| | |
|---|---|
| Fiabilité | Reliability |
| Maintenabilité | Maintenability |
| Disponibilité | Availability |
| Sécurité | Safety |
| **FMDS** | **RAMS** |

# Sûreté de Fonctionnement: composantes



**Fiabilité (NF X60.010)**

Aptitude d ’un bien à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant un intervalle de temps donné.

**Remarque**

- on suppose que le bien est en état de remplir la fonction requise au début de l ’intervalle de temps considéré.
- Cette aptitude est fonction de:
  - fiabilité des composants
  - architecture du système
  - maintenabilité
  - logistique

# Sûreté de Fonctionnement: composantes



**Fiabilité: indicateurs**

Soit $T$ la durée de vie du bien considéré

Fonction fiabilité

$$R(t) = \Pr\{T > t / T > 0\}$$

**Temps moyen de bon fonction**

**MTTF**: Mean Time to Failure pour les biens non réparables

**MTBF**: Mean Time Between Failures pour les biens réparables

# Sûreté de Fonctionnement: composantes



**Maintenabilité (Norme américaine MIL-STD-72IC)**

Mesure de l ’aptitude d ’un dispositif (*item*) à être maintenu ou remis dans des conditions spécifiées lorsque la maintenance de celui-ci est réalisée par des agents ayant les niveaux spécifiés de compétences, utilisant les procédures prescrites, à tous les niveaux prescrits de maintenance et de réparation.

# Sûreté de Fonctionnement: composantes



## Maintenabilité (NF X60.010)

Aptitude, dans des conditions données d 'utilisation d 'un bien, à être maintenu ou rétabli sur un intervalle de temps donné, dans un état dans lequel il peut accomplir sa fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits.

**Remarque**: la définition américaine est plus précise en ce qui concerne les moyens humains puisqu 'elle donne des précisions sur la qualification des agents de maintenance.

**Indicateurs**

- fonction maintenabilité *M(t)* probabilité que le système soit rétabli dans son état normal après une défaillances

- **MTTR** (Mean Time To Repair, Temps moyen de réparation

# Sûreté de Fonctionnement: composantes



## Disponibilité (NF X60.010)

Aptitude d ’un bien à être en état d ’accomplir une fonction requise dans des conditions données, à un instant donné ou pendant un intervalle de temps donné, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs nécessaires soit assurée.

**Indicateurs**

- fonction Disponibilité *D(t)* probabilité que le système soit état de remplir la fonction requise.
- **MUT** (Mean Up Time, moyenne des temps pendant lesquels le système est en fonctionnement actif)
- **MDT** (Mean Down Time, moyenne des temps pendant lesquels le système est fonctionnellement hors service)

# Sûreté de Fonctionnement: composantes



**Sécurité**

Aptitude d ’une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques ou catastrophiques.

# FMD des systèmes réparables



- Caractéristiques
  - Trois niveaux

| | Propriétés | Caractéristique FMD |
|---|---|---|
| Ensemble | Toujours réparable | Disponibilité |
| Module | Réparable ou consommable | Maintenabilité et fiabilité |
| Composant | Consommable parfois réparable | Fiabilité |

# FMD des systèmes réparables

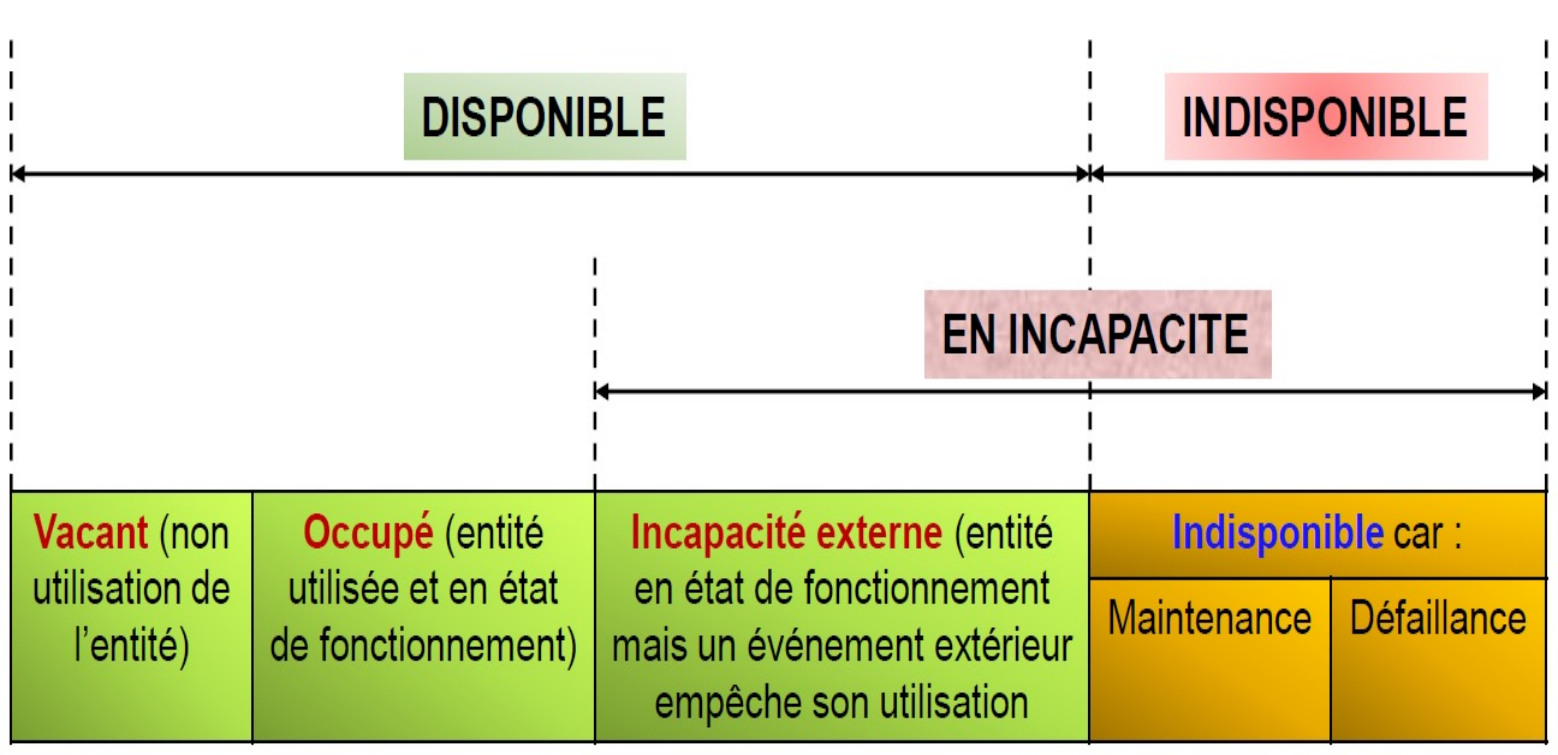


- Caractéristiques :
  - Cas du module (carte électronique, moteur, vérin, etc.) réparable: 2 questions
    - réparation du module défaillant (risque d 'indisponibilité forte) ou consommation par échange standard rapide ?
    - En cas de consommation, réparation (en temps différé) ou rebut ?
    - Réponse de nature économique par simulation du coût de chaque scénario en prenant en compte les coûts directs d 'intervention, coûts d 'indisponibilité, coût du stockage en magasin, ..

# FMD des systèmes réparables: indicateurs opérationnels



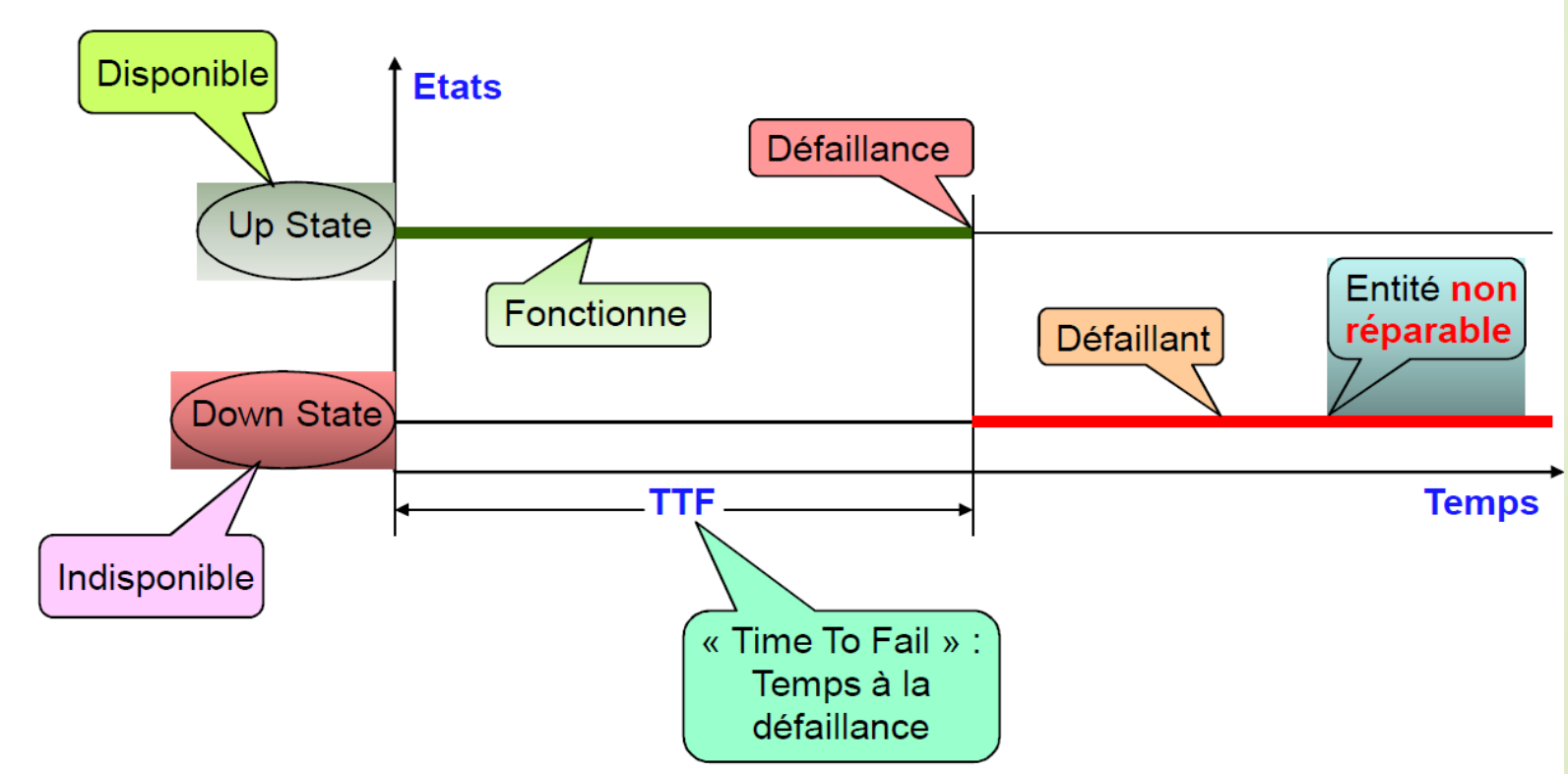
- Etat d'une entité



# FMD des systèmes réparables: indicateurs opérationnels



## Temps caractéristiques en Sûreté de Fonctionnement



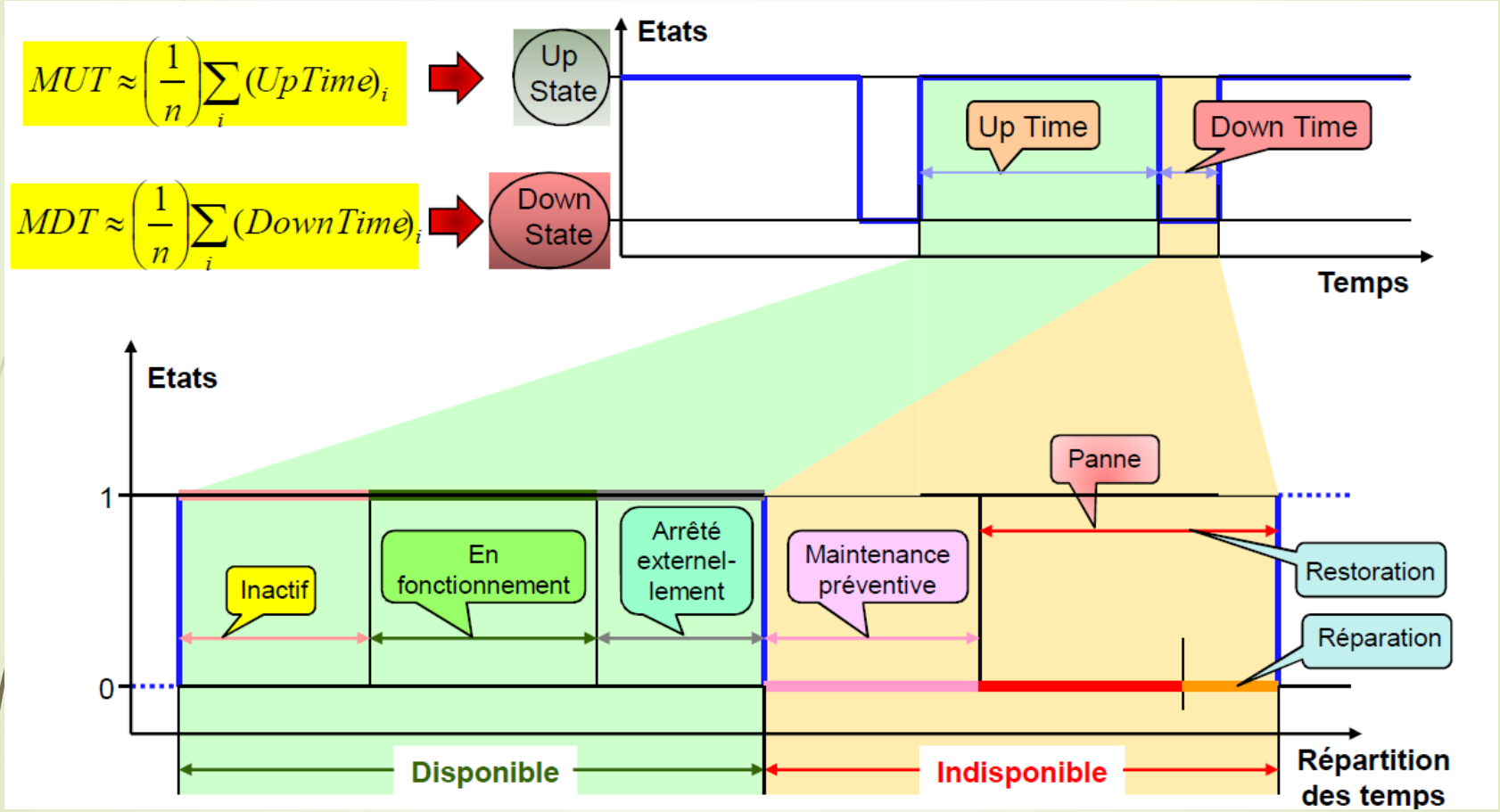
# FMD des systèmes réparables: indicateurs opérationnels



## Temps caractéristiques en Sûreté de Fonctionnement

$$MUT \approx \left(\frac{1}{n}\right)\sum_i (UpTime)_i$$

$$MDT \approx \left(\frac{1}{n}\right)\sum_i (DownTime)_i$$



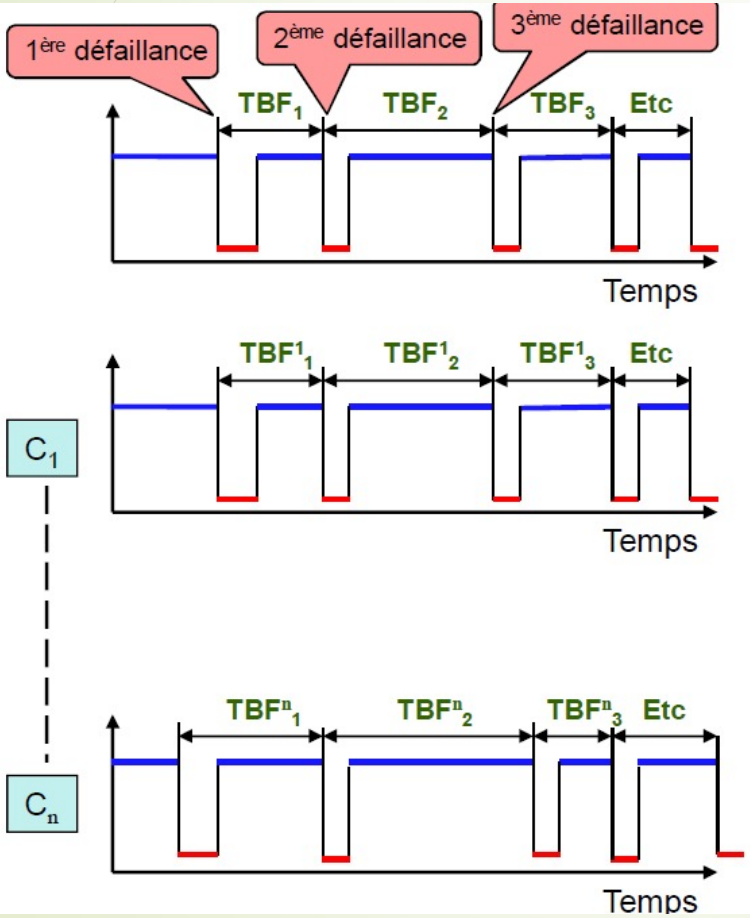

**MUT : Mean Up Time** (Temps Moyen de Disponibilité)

**MDT : Mean Down Time** (Temps Moyen d'Indisponibilité)

# FMD des systèmes réparables: indicateurs opérationnels



## Temps caractéristiques en Sûreté de Fonctionnement




$n$ $TBF_i$ relevés sur une **entité réparable**

$$MTBF \approx \left(\frac{1}{n}\right)\sum_i (TBF)_i$$

$n$ **entités similaires et réparables** : relevés sur l'entité $(i)$

$$MTBF \approx \frac{1}{\sum_i n_i}\sum_i \sum_j TBF_j^i$$

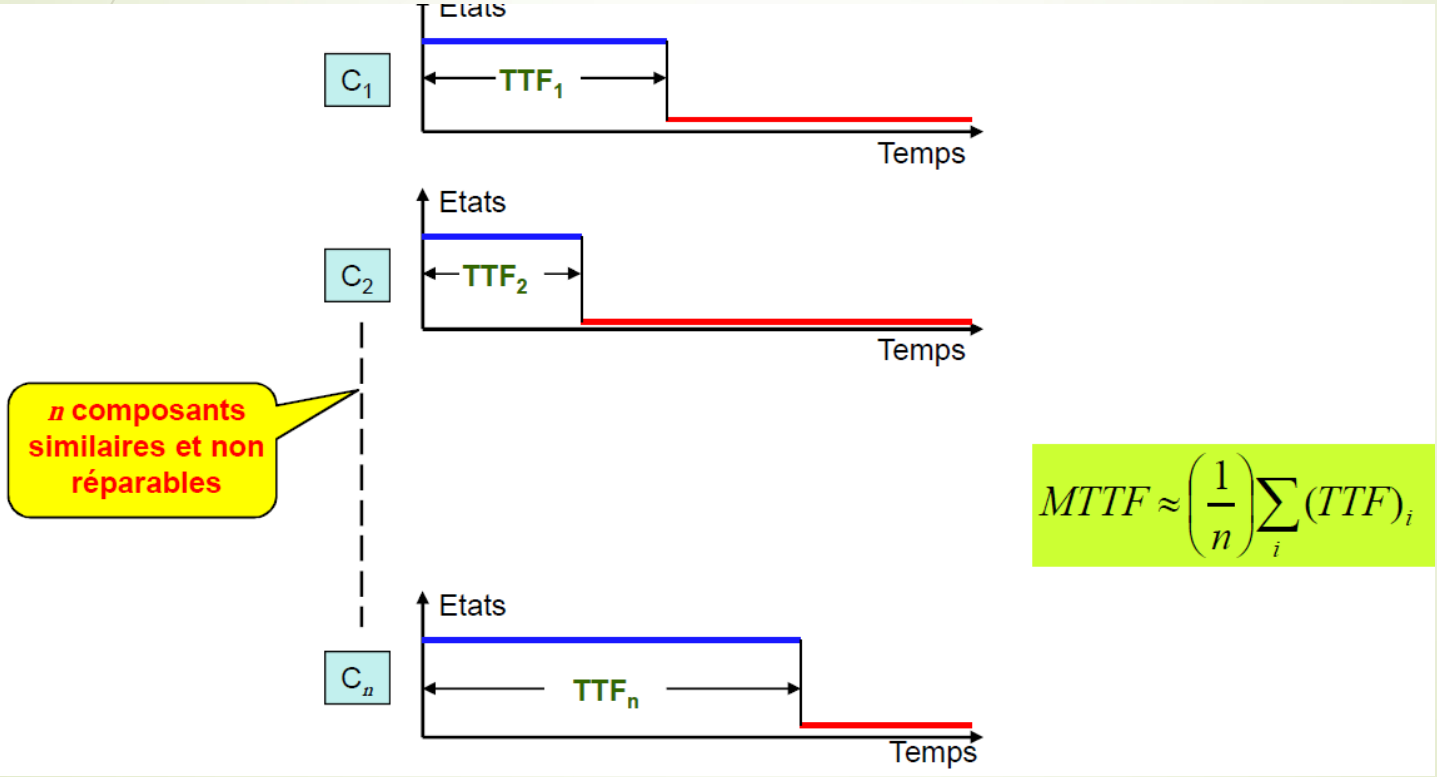
**TBF : Time Between Failures** (Temps Entre Défaillances)

**MTBF : Mean Time Between Failures** (Temps Moyen Entre Défaillances)

# FMD des systèmes non réparables: indicateurs opérationnels



## Temps caractéristiques en Sûreté de Fonctionnement




$$MTTF \approx \left(\frac{1}{n}\right)\sum_i (TTF)_i$$

**MTTF : Mean Time To Fail** (Temps Moyen à la Première Défaillance)

# FMD des systèmes réparables et non réparables: indicateurs opérationnels



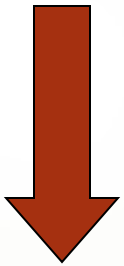
- Synthèse

| **Arborescence d 'un système** | **Caractéristique** | **Analyse correspondante** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *R(t)* | *M(t)* | *D(t)* |
| Ensemble | Réparable<br>Non réparable<br>(mono coup) | *MTBF*<br>*MTTF* | *MTTR*<br>*X* | $D_{op}$<br>*X* |
| Module interchangeable | Réparable<br>Consommable | *MTBF*<br>*MTTF* | *MTTR*<br>*X* | *X*<br>*X* |
| Composant | Consommable | *MTTF* | *X* | *X* |

# SdF



Comment assurer la SdF ?



Maintenance

# Maintenance



**NF X60.010**

Ensemble des activités destinées à maintenir ou à rétablir un bien dans un état ou dans des conditions données de sûreté de fonctionnement, pour accomplir une fonction requise. Ces activités sont une combinaison d ’activités techniques, administratives et de management.

# Les Stratégies de Maintenance



| Stratégie | Type de Maintenance |
|---|---|
| Réparer après casse | Maintenance d'urgence<br>Maintenance corrective |
| En fonction du calendrier | Maintenance préventive systématique |
| En fonction du niveau de dégradation | Maintenance préventive conditionnelle<br>Maintenance préventive prévisionnelle |
| Reconception | Maintenance d'amélioration |
| Recherche d'aléa | Maintenance de ronde |

# Les Stratégies de Maintenance



## Maintenance d'urgence

### Définition

Travail de maintenance nécessitant une intervention immédiate

### But

Supprimer l'immobilisation, réduire le danger ou le risque associé à la défaillance

### Caractéristiques

- ✓Non programmée
- ✓Perturbe la charge de travail (pics et vallées)
- ✓Chère
- ✓Nécessite une grande réactivité et une logistique en conséquence

# Maintenance curative



Définition

Restaurer le système pour qu'il retrouve un état opérationnel

But

Permettre l'utilisation du système

## Caractéristiques

- ✓Planifiée
- ✓Création d'un ordre de travail
- ✓Préparation du travail

# Maintenance palliative



La **maintenance palliative** sert à **réparer provisoirement une panne**, un peu à la manière d'un pansement, afin que le matériel puisse continuer à fonctionner relativement normalement.

Elle est d'une grande aide pour **éviter de stopper l'activité en cours**. Pour autant, il ne faut pas que le temporaire s'éternise, et s'assurer tout de même que la sécurité soit de mise en attendant une solution plus durable.

# Maintenance de routine



Définition

Interventions régulières courtes sur des équipements souvent en état de marche (lubrification, inspection, réglages, …)

But

Réduire les pannes et les temps d'immobilisation

Allonger la durée de vie du système

Caractéristiques

Planifiée et préparée

# Maintenance préventive systématique



Définition

Interventions d'inspection et de remplacement programmées sur la base d'un calendrier ou d'une durée de fonctionnement

But

Réduire les pannes et les temps d'immobilisation

Allonger la durée de vie du système

Caractéristiques

Planifiée et préparée

Déterminée à partir d'une probabilité de défaillance

Echéancier

# Maintenance préventive conditionnelle



Définition

Interventions d'inspection et de remplacement subordonnées au franchissement d'un seuil prédéterminé significatif de l'état de dégradation du bien

But

Identifier des anomalies (potentielles ou cachées) pour enrayer un mécanisme de défaillance

Caractéristiques

Planifiée

Basée sur un niveau de dégradation

Seuils prédéterminés

# Maintenance préventive prévisionnelle



Définition

Interventions d'inspection et de remplacement subordonnées à l'analyse de l'évolution surveillée de paramètres significatifs de la dégradation du bien

But

Identifier des anomalies (potentielles ou cachées) pour enrayer un mécanisme de défaillance

Caractéristiques

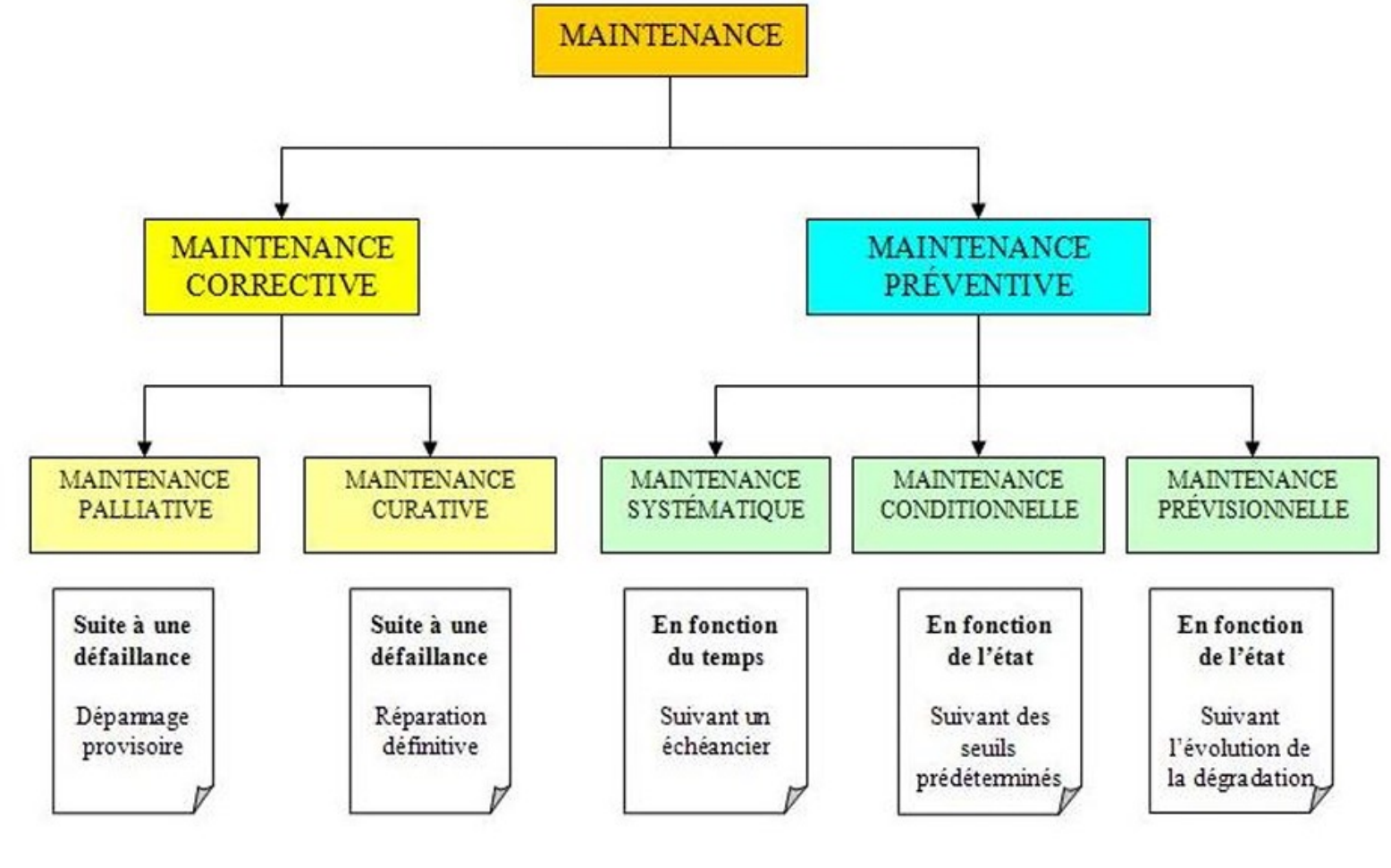
Planifiée

Basée sur un niveau de dégradation

Evolution des paramètres

# Résumé des formes (types) de la maintenance





# Techniques de maintenance prévisionnelle



Analyse de vibrations

Analyse de lubrifiants et d'huiles

Examen des états de surface

Examens structurels

Dissipation d'énergie

Analyse d'effluents

Contrôle du rendement

Émission acoustique

…

# Maintenance: Indicateurs fondamentaux



La maintenance doit pouvoir être évaluée quantitativement par des indicateurs opérationnels.

**Indicateurs de la maintenance préventive**

**MMH/OH**: Maintenance Man-Hours per Operating hour (charge en hommes-heures par heure de fonctionnement ou d 'utilisation..

**MTBPMA**: Mean Time Between Preventive Maintenance Actions (temps moyen de fonctionnement ou d 'utilisation entre interventions de maintenance preventive).

# Maintenance: Indicateurs fondamentaux



**Indicateurs de la maintenance corrective**

**MTBUBA**: Mean Time Between Unscheduled Maintenance Actions (temps moyen de fonctionnement ou d 'utilisation entre interventions de maintenance non Programmées).

**MTTR**: Mean Time To Repair (moyenne des temps techniques de réparation). Il est limité à 4 temps:

- $t_{dg}$: temps de diagnostic (temps moyen nécessaire pour dérouler le diagnostic au niveau de l 'unité à déposer ou à remplacer;
- $t_{dp}$: temps de dépose puis temps de pose (temps moyen pour déposer l 'unité défaillante et à la remplacer par une pièce saine;
- $t_v$: temps de vérification (temps moyen nécessaire pour valider l 'intervention et vérifier le bon fonctionnement du bien après intervention;
- $t_s$: temps de mise en service ou temps de redémarrage.

$$MTTR = t_{dg} + t_{dp} + t_v + t_s$$

# Maintenance: Nivaux



Il existe une standardisation sur les niveaux de maintenance utilisables par exemple lors des contrats.

**LRU**: Line Replaceable Unit (Unité Remplaçable en Première Ligne)

Un LRU est un élément dont il est possible de détecter sans ambiguïté les défaillances « sur le système », soit à l 'aide d 'un équipement de test, soit grâce à la mise en œuvre d 'une procédure, et qui peut être démonté du système et échangé par un identique (de même numéro de configuration) sans:

i) faire de choix pour son bon montage ou pour ses performances,

ii) avoir besoin de démonter ou d 'enlever les éléments de son voisinage.

**SRU**: Shop Replaceable Unit, est une unité remplaçable en atelier. Ce sont des éléments d 'une unité déposée qui peuvent être remplacées par des identiques dans un atelier de maintenance approprié.

# Maintenance: Nivaux

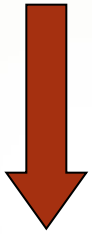


| Définitions simplifiées | | NF X60.501 | |
|---|---|---|---|
| **Primaire** | Toute action s 'effectuant sur le matériel | 1. Premier niveau | - opérations de réglages<br>- remplacement de consommables<br>- reprises légères (peinture) |
| | | 2. Second niveau | - dépannage par échange standard<br>- contrôle de bon fonctionnement / inspections<br>- opérations mineures d 'entretien (graissage)<br>- concept de LRU |
| **Secondaire** | Toute action s 'effectuant en dehors du matériel | 3. Troisième niveau | - interventions hors matériel effectués en atelier ordinaire<br>- diagnostic plus fin<br>- réparations au niveau composants<br>- réparation mécaniques mineures<br>- programmation d 'éléments informatiques<br>- concept SRU |
| | | 4. Quatrième niveau | - interventions de type spécialisé en atelier<br>- réglage d 'instruments de mesure<br>- vérification d 'étalons |
| « overhaul » ou grande maintenance | Opérations de grande maintenance | 5. Cinquième niveau | - retour en usine pour réparations profondes<br>- opérations de grande maintenance<br>- remise à neuf |

# Maintenance



Comment choisir la stratégie de maintenance ?



Etudier le comportement du matériel en service

# Comportement du matériel



Pour mettre en place une politique de maintenance et de gestion de risques, il importe de connaître le comportement du matériel en service.

**Types de défaillances d ’un matériel**

**Défaillances catalectiques**: soudaines et complètes (rupture d ’une pièce mécanique, court-circuit, …) Difficile d ’observer la dégradation et donc de mettre en œuvre une politique de maintenance conditionnelle

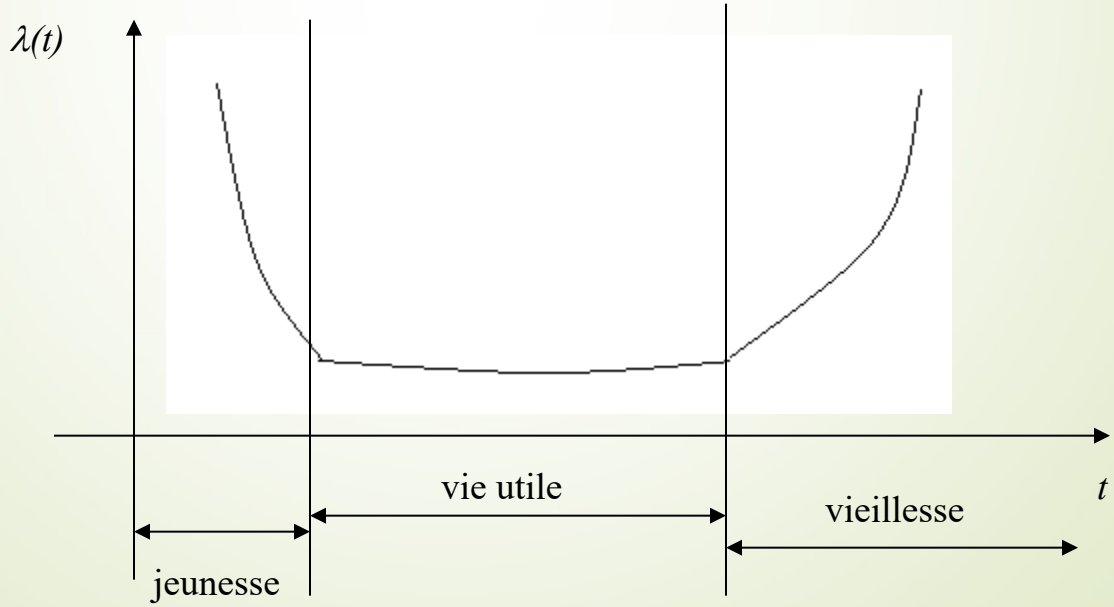
**Défaillances par dérive**: on voit progresser la dégradation (usure mécanique, augmentation de frottements, augmentation de la valeur d ’une résistance, …). Elles se prêtent bien à la maintenance prédictive conditionnelle.

3 phases caractérisent la durée de vie d ’un matériel: courbe en baignoire.

# Comportement du matériel



- Durée de vie d ’un équipement
  - La courbe en baignoire: le comportement du taux de défaillance $\lambda(t)$ d ’un équipement le long de sa vie est composé de trois parties:
    - période de jeunesse: défaillances précoces (déverminage, rodage), $\lambda(t)$ décroît,
    - période de vie utile: défaillances aléatoires, $\lambda(t)$ est presque constant,
    - période de vieillesse ou d ’usure: $\lambda(t)$ est croissant jusqu ’à l ’obsolescence




courbe en baignoire

# Exploitation de la courbe en baignoire pour la mainetenance



**Phase de jeunesse**: pratiquer le déverminage (mettre en fonctionnement le matériel pendant un certain temps avant de le livrer au client).

**Phase de maturité**: pratiquer la maintenance préventive, corrective, ...

**Phase de vieillesse**: pratiquer la maintenance préventive conditionnelle

# Estimation de $\lambda(t)$ par le nombre de survivants



**Hypothèse**: nombre d 'éléments assez élevé

- Calcul du taux de défaillance moyen
  - $N_0$ : nombre initial de dispositifs ou éléments,
  - $N_s(t)$ : nombre de survivants à l 'instant t,
  - $N_s(t+\Delta t)$ : nombre de survivant à l 'instant $t+\Delta t$,
  - $C(\Delta t) = N_s(t) - N_s(t+\Delta t)$ : nombre de défaillances pendant $\Delta t$.
    - Cas 1: les éléments défaillants sont remplacés $\lambda(t) = \frac{C(\Delta t)}{N_0 \Delta t}$
    - Cas 2: les éléments défaillants ne sont pas remplacés $\lambda(t) = \frac{C(\Delta t)}{N_s(t) \Delta t}$

# Estimation de $\lambda(t)$ par le nombre de survivants Exercices



- *Cas des éléments défectueux remplacés ou réparés:*

Nous avons étudié 70 véhicules pendant la période allant de 80 000 à 90 000 km. 41 défaillances ont été réparées.

Quel est le taux de défaillance relatif à cette période ?

- *Cas des éléments défectueux non remplacés:*

On teste un lot de 50 électrovannes soumises en continu à 8 impulsions/minute. À la 50e heure, il en reste 33. À la 60 e heure, il en reste 27.

Quel est le taux de défaillance sur cette classe, par heure et par impulsion ?

Si l'on avait remplacé les électrovannes défaillantes, calculer λ:

# Estimation de $\lambda(t)$ par le nombre de survivants Corrigé



- *Cas des éléments défectueux remplacés ou réparés* Nous avons étudié 70 véhicules pendant la période allant de 80 000 à 90 000 km. 41 défaillances ont été réparées. Quel est le taux de défaillance relatif à cette période ?

$$\lambda(t) = \frac{C(\Delta t)}{N_0 \cdot \Delta t} = \frac{41}{70 \times (90000 - 80000)} = 0{,}585 \times 10^{-4} \text{ pannes/km}$$

- *Cas des éléments défectueux non remplacés* On teste un lot de 50 électrovannes soumises en continu à 8 impulsions/minute. À la 50e heure, il en reste 33. À la 60 e heure, il en reste 27. Quel est le taux de défaillance sur cette classe, par heure et par impulsion ?

$$\lambda(t) = \frac{N_s(t) - N_s(t + \Delta t)}{N_s(t) \cdot \Delta t} = \frac{33 - 27}{33 \times 10} = 18 \times 10^{-3} \text{ déf/heure}$$

ou $\lambda(t) = 3{,}79 \times 10^{-5}$ déf/impulsion

Si l'on avait remplacé les électrovannes défaillantes, λ serait :

$$\lambda(t) = \frac{6}{50 \times 10} = 12 \times 10^{-3} \text{ déf/heure}$$

# Estimation de $\lambda(t)$ par par le nombre de survivants



- Calcul du taux de défaillance instantané
  - s 'applique aux survivants à l 'instant *t* et caractérise leur probabilité conditionnelle de défaillance dans l 'intervalle *(t, t+dt)*

$$\lambda(t) = -\frac{1}{N(t)}\frac{dN}{dt}$$

  - ou

$$\lambda(t)dt = -\frac{dN}{N(t)}$$

  - ou

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right)$$

**Exercices série 1**

# Comportement du matériel: relations entre le taux de défaillances et la fonction de fiabilité



Soit *T* la variable aléatoire représentant la durée de vie d 'un matériel et *F(t)* sa fonction de répartition

$$F(t) = \Pr\{T < t\}$$

*R(t),* la fonction fiabilité est donnée par

$$R(t) = 1 - F(t)$$

Par hypothèse

$$\lambda(t)dt = \frac{F(t+dt) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{dF(t)}{1 - F(t)} = \frac{dF(t)}{R(t)}$$

$$F(0) = 0$$

d 'où $$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$$

# Comportement du matériel: relations fondamentales



$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$$

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

A partir de l 'une des fonctions, on retrouve les autres et donc calculer les indicateurs de performance de FMDS (RAMS) ; en particulier si on connaît la loi de probabilité de la variable *T* c 'est-à-dire *F(t)* ou *f(t)*.

$$MTBF = E(T) = \int_0^\infty t f(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt$$

# Approximation de la fonction de répartition *F(t)* à partir des données observées



- Il s 'agit d 'estimer $F(t_i) = \Pr\{T < t_i\}$
- Approximation à partir des fréquences observées
  - Hypothèse d 'un renouvellement à l 'identique
  - *N* dates de défaillances
  - Fréquences cumulées: si $N \geq 50$ alors en découpant l 'horizon en intervalles ou classes $[t_{i-1} \quad t_i[$ et en notant $n_i$ le nombre de défaillances sur $[t_{i-1} \quad t_i[$ alors

$$F(t_i) = \frac{\sum_{j \leq i} n_j}{N}$$

# Approximation de la fonction de répartition *F(t)* à partir des données observées

- Il s 'agit d 'estimer $F(t_i) = \Pr\{T < t_i\}$
  - Pour *N < 50*, on ordonne les temps de bon fonctionnement $T_i$ de manière décroissante
    - Rangs moyens: si $20 \le N < 50$ , la fonction de répartition à la date de $T_i$ est

$$F(T_i) = \frac{i}{N+1}$$

    - Rangs médians: si $N < 20$ , la fonction de répartition à la date $T_i$ est

$$F(T_i) = \frac{i-0.3}{N+0.4}$$

**Exercices série 2**

# Comportement du matériel: quelques lois de probabilité de *T*



**Loi exponentielle (loi à un seul paramètre):** une variable aléatoire *T* suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, sa densité de probabilité *f(t)* est donnée par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

d 'où

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

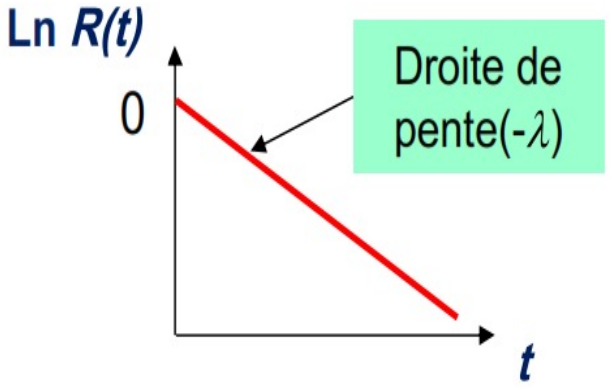
$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t)dt = \frac{1}{\lambda}$$

**Exercices série 3 : estimation de $\lambda$**

# Détermination du taux de défaillance $\lambda$ pour la loi exponentielle

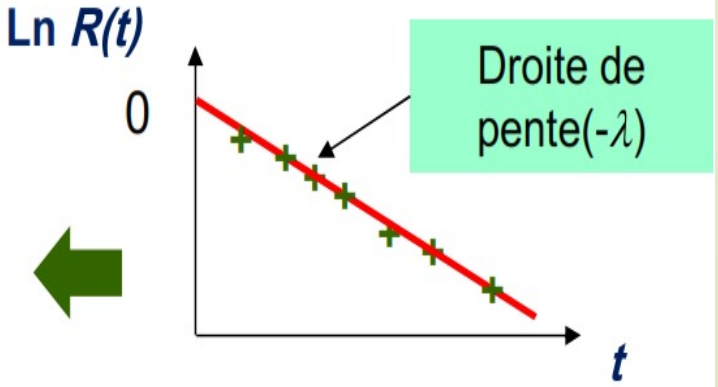


Représentation graphique de $R(t) = e^{-\lambda t}$ *en échelle semi-logarithmique*




Estimation de $F(t)$ et calcul de $R(t) = 1 - F(t)$

⇒ Si les points ($R(t)$ , $t$) s'ajustent suivant une droite dans le repère (Ln $R(t)$, $t$) : la loi exponentielle est vérifiée



# Comportement du matériel: quelques lois de probabilité de *T*



**Loi normale (loi à deux paramètres):** une variable aléatoire *T* suit une loi normale de paramètres $T_m$ et σ si sa densité de probabilité *f(t)* est donnée par

d 'où $$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(t) = \pi\left(\frac{t - T_m}{\sigma}\right)$$

avec

$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$MTBF = \int_0^{\infty} tf(t)dt = T_m$$

$$\sigma_T = \sigma$$

(tables)

# Comportement du matériel: quelques lois de probabilité de *T*



$$f(t)=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right)$$

**Loi de Weibull (loi à trois paramètres):** une variable aléatoire $T$ suit une loi de Weibull de paramètres $\beta$, $\gamma$ et $\eta$ si sa densité de probabilité $f(t)$ est donnée par

Fonction de répartition

$$F(t)=1-\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right)$$

Taux de défaillances

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

$$MTBF=E(T)=\gamma+\eta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\gamma+A\eta$$

Fonction fiabilité

$$R(t)=\exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right)$$

$$\sigma_T=\eta\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^2}=B\eta$$

$$\Gamma(x)=\int_0^x t^{x-1}e^{-t}dt$$

Fonction eulérienne de seconde espèce

Les paramètres A et B sont souvent tablés suivant les valeurs de $\beta$

# Tableau des paramètres A et B

| β | A | B | β | A | B | β | A | B | β | A | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,05 | 2,43290E+18 | 9,03280E+23 | 1,75 | 0,89062 | 0,52523 | 3,45 | 0,89907 | 0,28822 | 5,15 | 0,91974 | 0,20505 |
| 0,1 | 3,62880E+06 | 1,55977E+09 | 1,8 | 0,88929 | 0,51123 | 3,5 | 0,89975 | 0,28473 | 5,2 | 0,92025 | 0,20336 |
| 0,15 | 2,59357E+03 | 1,21993E+05 | 1,85 | 0,88821 | 0,49811 | 3,55 | 0,90043 | 0,28133 | 5,25 | 0,92075 | 0,20170 |
| 0,2 | 1,20000E+02 | 1,90116E+03 | 1,9 | 0,88736 | 0,48579 | 3,6 | 0,90111 | 0,27802 | 5,3 | 0,92125 | 0,20006 |
| 0,25 | 2,40000E+01 | 1,99359E+02 | 1,95 | 0,88671 | 0,47419 | 3,65 | 0,90178 | 0,27479 | 5,35 | 0,92175 | 0,19846 |
| 0,3 | 9,26053E+00 | 5,00780E+01 | 2 | 0,88623 | 0,46325 | 3,7 | 0,90245 | 0,27164 | 5,4 | 0,92224 | 0,19688 |
| 0,35 | 5,02914E+00 | 1,99761E+01 | 2,05 | 0,88589 | 0,45291 | 3,75 | 0,90312 | 0,26857 | 5,45 | 0,92272 | 0,19532 |
| 0,4 | 3,32335E+00 | 1,04382E+01 | 2,1 | 0,88569 | 0,44310 | 3,8 | 0,90379 | 0,26558 | 5,5 | 0,92320 | 0,19379 |
| 0,45 | 2,47859E+00 | 6,46009E+00 | 2,15 | 0,88561 | 0,43380 | 3,85 | 0,90445 | 0,26266 | 5,55 | 0,92368 | 0,19229 |
| 0,5 | 2,00000E+00 | 4,47214E+00 | 2,2 | 0,88562 | 0,42495 | 3,9 | 0,90510 | 0,25980 | 5,6 | 0,92414 | 0,19081 |
| 0,55 | 1,70243E+00 | 3,34530E+00 | 2,25 | 0,88573 | 0,41652 | 3,95 | 0,90576 | 0,25701 | 5,65 | 0,92461 | 0,18935 |
| 0,6 | 1,50458E+00 | 2,64514E+00 | 2,3 | 0,88591 | 0,40848 | 4 | 0,90640 | 0,25429 | 5,7 | 0,92507 | 0,18792 |
| 0,65 | 1,36627E+00 | 2,17887E+00 | 2,35 | 0,88617 | 0,40080 | 4,05 | 0,90704 | 0,25162 | 5,75 | 0,92552 | 0,18651 |
| 0,7 | 1,26582E+00 | 1,85117E+00 | 2,4 | 0,88648 | 0,39345 | 4,1 | 0,90768 | 0,24902 | 5,8 | 0,92597 | 0,18512 |
| 0,75 | 1,19064 | 1,61077 | 2,45 | 0,88685 | 0,38642 | 4,15 | 0,90831 | 0,24647 | 5,85 | 0,92641 | 0,18375 |
| 0,8 | 1,13300 | 1,42816 | 2,5 | 0,88726 | 0,37967 | 4,2 | 0,90894 | 0,24398 | 5,9 | 0,92685 | 0,18240 |
| 0,85 | 1,08796 | 1,28542 | 2,55 | 0,88772 | 0,37319 | 4,25 | 0,90956 | 0,24154 | 5,95 | 0,92729 | 0,18107 |
| 0,9 | 1,05218 | 1,17111 | 2,6 | 0,88821 | 0,36696 | 4,3 | 0,91017 | 0,23915 | 6 | 0,92772 | 0,17977 |
| 0,95 | 1,02341 | 1,07769 | 2,65 | 0,88873 | 0,36097 | 4,35 | 0,91078 | 0,23682 | 6,05 | 0,92815 | 0,17848 |
| 1 | 1,00000 | 1,00000 | 2,7 | 0,88928 | 0,35520 | 4,4 | 0,91138 | 0,23453 | 6,1 | 0,92857 | 0,17721 |
| 1,05 | 0,98079 | 0,93440 | 2,75 | 0,88986 | 0,34963 | 4,45 | 0,91198 | 0,23229 | 6,15 | 0,92898 | 0,17596 |
| 1,1 | 0,96491 | 0,87828 | 2,8 | 0,89045 | 0,34427 | 4,5 | 0,91257 | 0,23009 | 6,2 | 0,92940 | 0,17473 |
| 1,15 | 0,95170 | 0,82971 | 2,85 | 0,89106 | 0,33909 | 4,55 | 0,91316 | 0,22793 | 6,25 | 0,92980 | 0,17351 |
| 1,2 | 0,94066 | 0,78724 | 2,9 | 0,89169 | 0,33408 | 4,6 | 0,91374 | 0,22582 | 6,3 | 0,93021 | 0,17232 |
| 1,25 | 0,93138 | 0,74977 | 2,95 | 0,89233 | 0,32924 | 4,65 | 0,91431 | 0,22375 | 6,35 | 0,93061 | 0,17113 |
| 1,3 | 0,92358 | 0,71644 | 3 | 0,89298 | 0,32455 | 4,7 | 0,91488 | 0,22172 | 6,4 | 0,93100 | 0,16997 |
| 1,35 | 0,91699 | 0,68657 | 3,05 | 0,89364 | 0,32001 | 4,75 | 0,91544 | 0,21973 | 6,45 | 0,93139 | 0,16882 |
| 1,4 | 0,91142 | 0,65964 | 3,1 | 0,89431 | 0,31561 | 4,8 | 0,91600 | 0,21778 | 6,5 | 0,93178 | 0,16769 |
| 1,45 | 0,90672 | 0,63522 | 3,15 | 0,89498 | 0,31135 | 4,85 | 0,91655 | 0,21586 | 6,55 | 0,93216 | 0,16657 |
| 1,5 | 0,90275 | 0,61294 | 3,2 | 0,89565 | 0,30721 | 4,9 | 0,91710 | 0,21397 | 6,6 | 0,93254 | 0,16547 |
| 1,55 | 0,89939 | 0,59252 | 3,25 | 0,89633 | 0,30319 | 4,95 | 0,91764 | 0,21212 | 6,65 | 0,93292 | 0,16439 |
| 1,6 | 0,89657 | 0,57372 | 3,3 | 0,89702 | 0,29929 | 5 | 0,91817 | 0,21031 | 6,7 | 0,93329 | 0,16332 |
| 1,65 | 0,89421 | 0,55635 | 3,35 | 0,89770 | 0,29550 | 5,05 | 0,91870 | 0,20853 | 6,75 | 0,93366 | 0,16226 |
| 1,7 | 0,89224 | 0,54024 | 3,4 | 0,89838 | 0,29181 | 5,1 | 0,91922 | 0,20677 | 6,8 | 0,93402 | 0,16121 |

# Comportement du matériel: quelques lois de probabilité de $T$



**Loi de Weibull: sigification des paramètres**

**Paramètre de forme $\beta$**

- si $\beta < 1$, $\lambda(t)$ décroît: phase de jeunesse
- si $\beta = 1$, $\lambda(t) = \lambda = 1/\eta$ = constant: phase de maturité
- si $\beta > 1$, $\lambda(t)$ croît: phase de vieillesse

**Paramètre d 'échelle $\eta$**

**Paramètre de position $\gamma$**

- $\gamma = 0$ si les défaillances peuvent débuter à l 'âge *0*
- $\gamma > 0$ si les défaillances ne peuvent se produire avant l 'âge $\gamma$
- $\gamma < 0$ si les défaillances ont débuté avant l 'origine des temps

Cette loi est très utilisée en maintenance du fait qu'elle permet de modéliser les 3 phases de durée de vie d 'un matériel.

# Ajustement graphique de la loi de Weibull



$$f(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right)$$

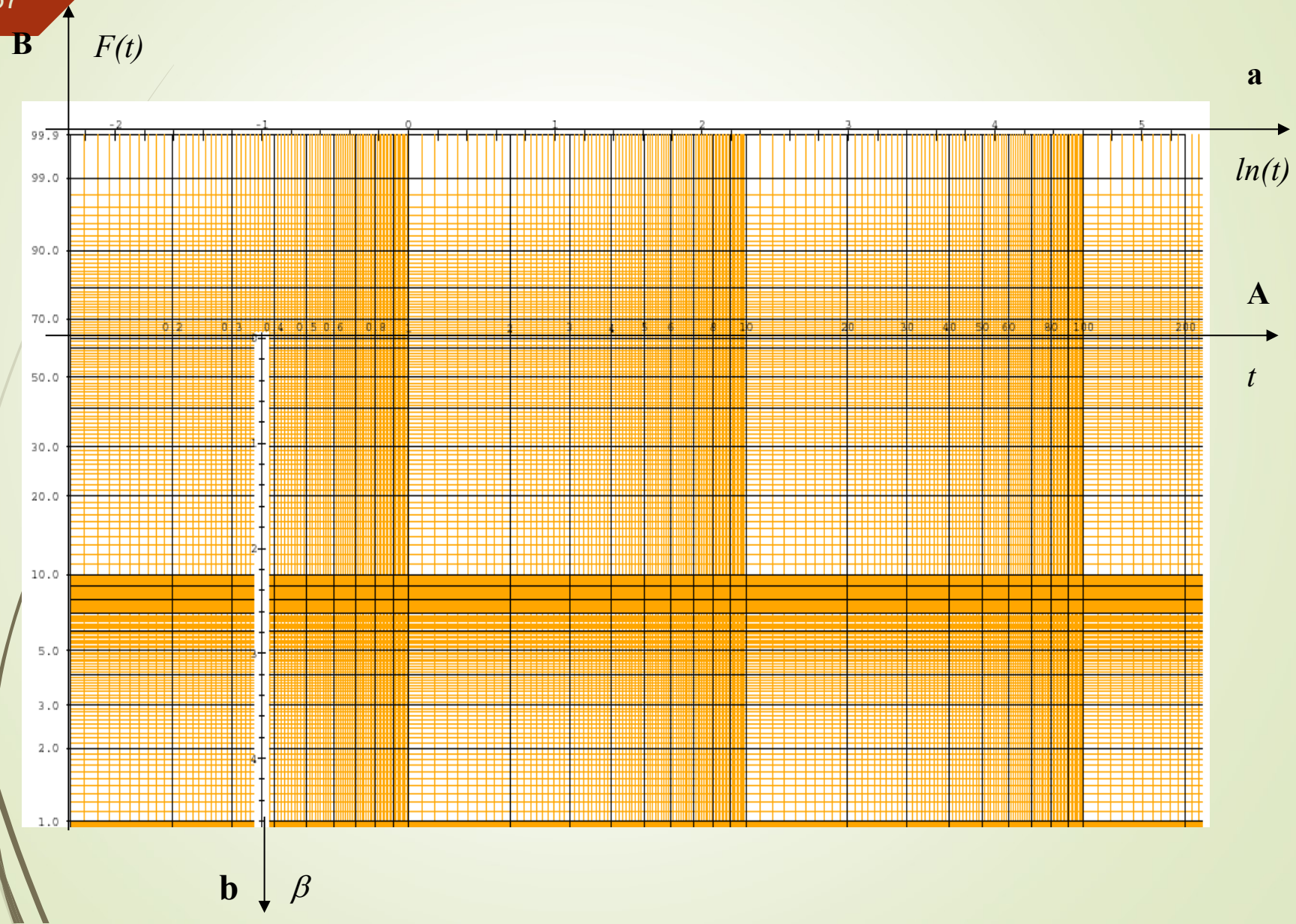
Il s 'agit de déterminer les 3 paramètres β, γ et η de la loi de Weibull par les données d 'observation.

La détermination des paramètres β, γ et η à partir des observations se fait graphiquement sur le papier de Weibull qui comprend ***4*** axes:

- **axe A**: axe des temps sur lequel on reporte les temps $t_i$ de bon fonctionnement,
- **axe B**: porte *F(t)* sur lequel on reporte les valeurs $F(t_i)$ calculées par approximation (fréquences cumulées, rangs moyens, rangs médians),
- **axe a**: correspond à *ln(t),*
- **axe b**: correspond à *ln(ln(1/(1-F(t))))* et permet de déterminer la valeur de *β.*

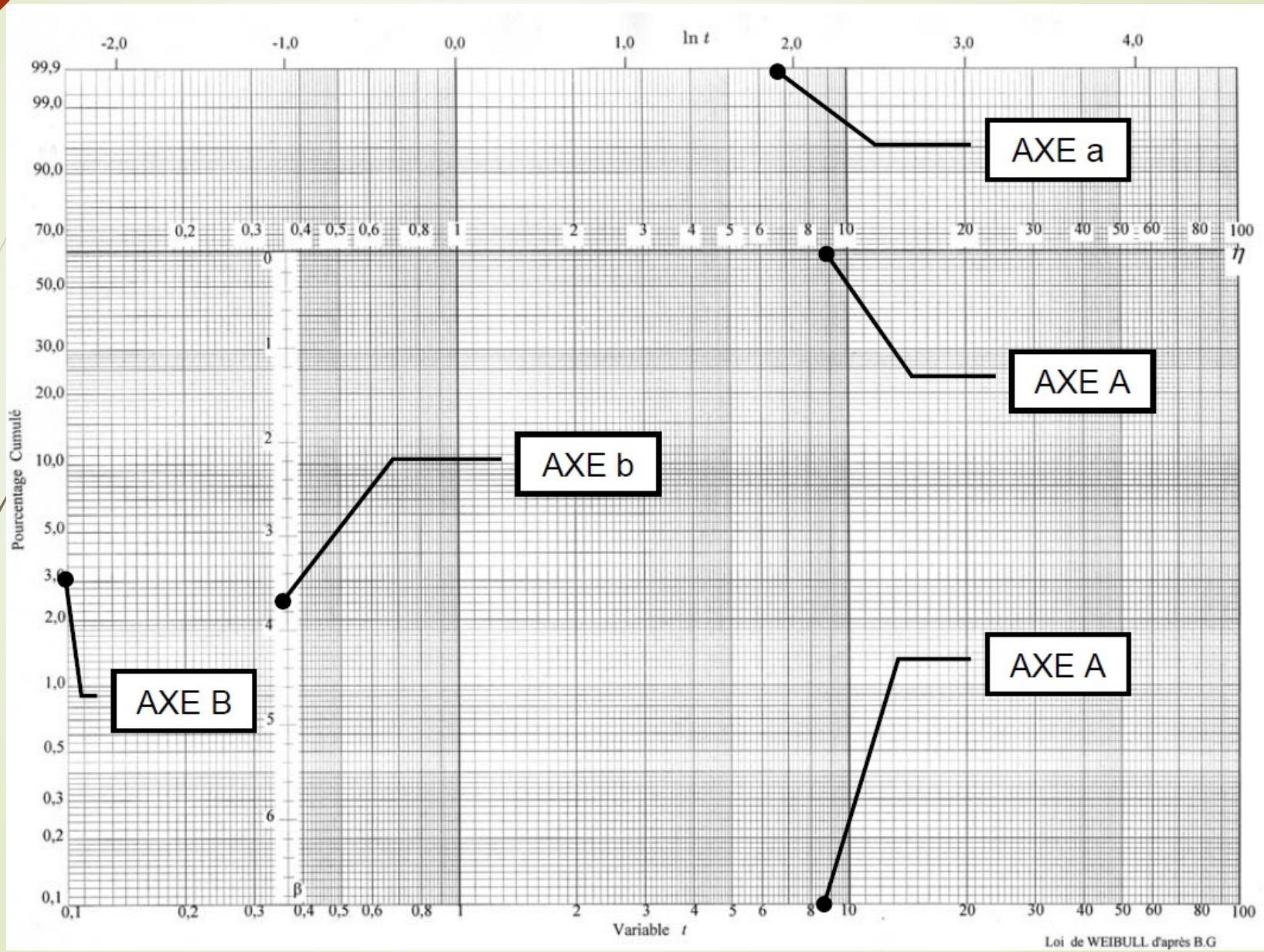
# Ajustement de la loi de Weibull: papier de Weibull





# Ajustement de la loi de Weibull: papier de Weibull





# Ajustement graphique de la loi de Weibull



**Procédure de détermination de β, γ et η**

1) calculer $F(t_i)$ par l 'approximation appropriée (fréquences cumulées, rangs moyens, rangs médians, ..) en pourcentage,

2) placer les points $(t_i, F(t_i))$ sur le papier de Weibull,

2.1) si ces points forment (à peu près) une droite $D_1$ alors

- $\gamma = 0$
- l 'intersection de $D_1$ avec l 'axe **A** donne η,
- la parallèle $D_2$ à $D_1$ passant par l 'origine ***(A = 1, a = 0)*** coupe l 'axe **b** en $\beta$

2.2) si ces points forment une courbe convexe ou concave alors $\gamma \neq 0$

- translater tous les points (de proche en proche) d 'une même valeur $\gamma$ pour obtenir la droite $D_1$, ou
- prendre *3* points sur la courbe équidistants sur l 'axe **a** ( ou sur l 'axe vertical passant par ***(A = 1, a = 0)*** ) d 'abscisses $t_1$, $t_2$ et $t_3$ et calculer $\gamma$ par $\gamma = \frac{t_2^2 - t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3}$ et translater tous les points de la valeur précédente de $\gamma$ pour avoir la droite $D_1$ et procéder comme en 2.1).

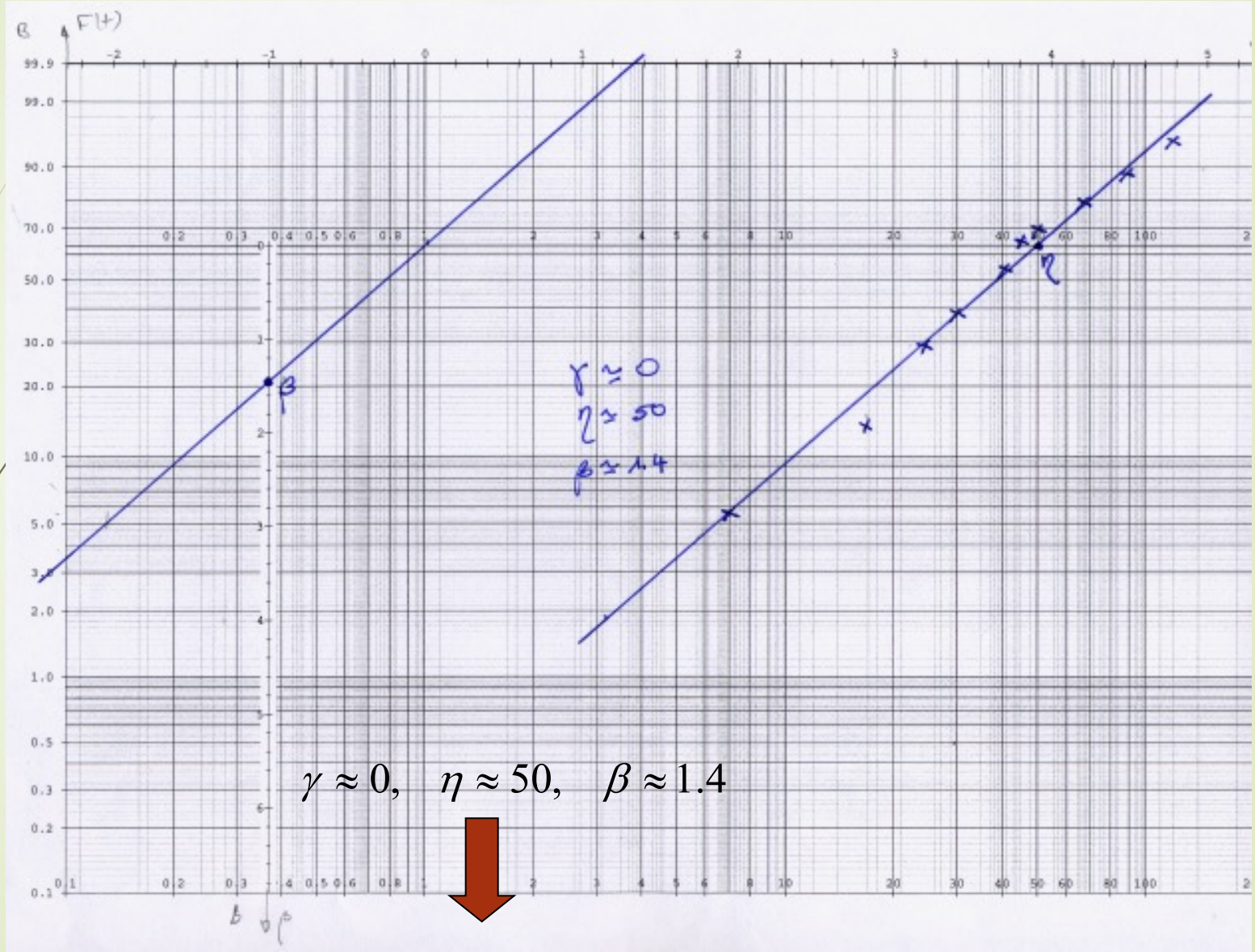
# Ajustement graphique de la loi de Weibull
# Exemple



| ti | F(ti) | ln(ti) |
|---|---|---|
| | | |
| 6.75 | 5,6 | 1.9095 |
| 17.25 | 13,7 | 2.8478 |
| 24 | 29,8 | 3.1781 |
| 31.05 | 37,9 | 3.4356 |
| 41.2 | 54 | 3.7184 |
| 46.5 | 62,1 | 3.8395 |
| 51 | 70,2 | 3.9318 |
| 69 | 78,2 | 4.2341 |
| 91.5 | 86,3 | 4.5163 |
| 131.25 | 94,3 | 4.8771 |

# Ajustement graphique de la loi de Weibull
# Exemple






$\gamma \approx 0, \quad \eta \approx 50, \quad \beta \approx 1.4$

$MTBF \approx 4557.12$ h

# Pourquoi déterminer $\lambda(t)$ ou $F(t)$ ?



- Optimisation des interventions systématiques
- Optimisation de la gestion des rechanges par la connaissance des lois de consommation (qui coïncident avec les lois de défaillance)
- Gestion d 'équipement par l 'indicateur *disponibilité* en connaissant *MTTR* et *MTBF* d 'un équipement
- Constitution de base de données
- Mise en place de la MBF (Maintenance Basée sur la Fiabilité)

**Série N° 5**

# Méthode analytique pour déterminer les deux paramètres ($\beta$, $\eta$, $\gamma$=0 ) de la loi de Weibull



$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \Leftrightarrow \ln\left(1 - F(t)\right) = -\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(1 - F(t)\right) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(1 - F(t)\right)\right) = \beta \ln\frac{t}{\eta}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(1 - F(t)\right)\right) = \beta \ln t - \beta \ln \eta$$

$$\Leftrightarrow Y = \beta X - \beta \ln \eta$$

L'équation est sous la forme de Y=aX+b

$\beta$ =a et

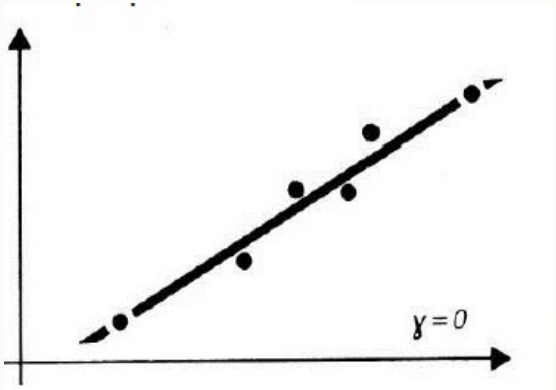
$-\beta \ln(\eta)=b \rightarrow \ln(\eta)=-b/\beta \rightarrow \eta=\exp(-b/\beta)$

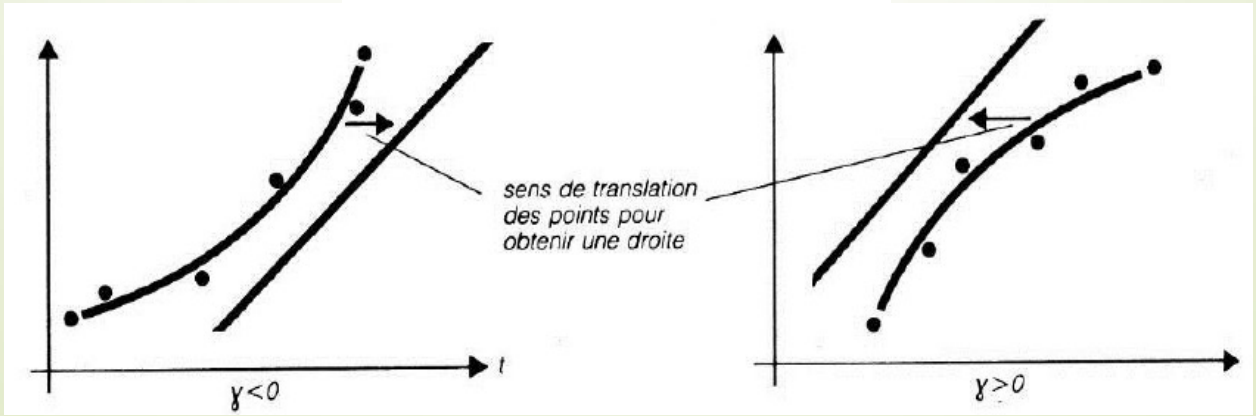
On peut utiliser Excel pour déterminer les paramètres de la droite $\beta$, $\eta$.

# Méthode graphique pour déterminer les trois paramètres ($\beta, \eta, \gamma$) de la loi de Weibull



Si le coefficient γ n'est pas nul (cas assez exceptionnel), la représentation n'est pas linéaire. Pour déterminer γ, il faut faire un changement de variable ( $t - \gamma$ ) ; on obtient alors une droite. Il faut donc translater tous les points d'une valeur égale à γ, mais qui, du fait de la non-linéarité de la fonction logarithme, ne correspond pas à la même distance pour chaque point.



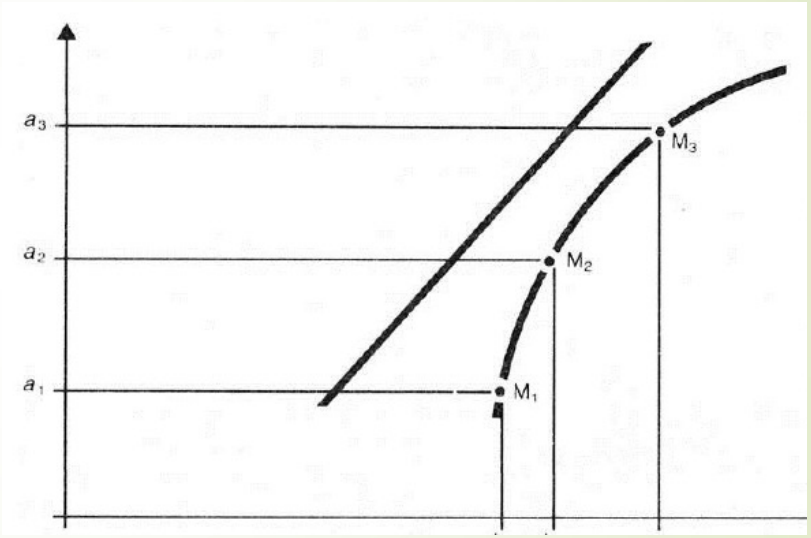
# Méthode analytique pour déterminer les deux paramètres ($\beta$, $\eta$, $\gamma$ non nulle) de la loi de Weibull



## Méthode de calcul pour obtenir la valeur de γ :

Prendre sur l'axe F(t) 3 points équidistants a1, a2, a3. Ces 3 points permettent d'obtenir les abscisses correspondantes au niveau des TBF : t1, t2, t3. Sur la courbe, on obtient donc les points M1, M2, M3 de coordonnées :

En effectuant le changement de variable ( $t - \gamma$ ), ces 3 points sont translatés et on obtient donc une droite. Les points M1, M2 et M3 ont alors les coordonnées suivantes :




$$M1\begin{vmatrix} t1 \\ \log(t1-\gamma) \end{vmatrix} \quad M2\begin{vmatrix} t2 \\ \log(t2-\gamma) \end{vmatrix} \quad M3\begin{vmatrix} t3 \\ \log(t3-\gamma) \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M1.M2}\begin{vmatrix} t2-t1 \\ \log(t2-\gamma)-\log(t1-\gamma) \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{M2.M3}\begin{vmatrix} t3-t2 \\ \log(t3-\gamma)-\log(t2-\gamma) \end{vmatrix}$$

# Méthode analytique pour déterminer les deux paramètres ($\beta$, $\eta$, $\gamma$ non nulle) de la loi de Weibull



Comme sur l'axe des F(t), les points sont équidistants, on a donc l'égalité suivante :

$$\log(t2-\gamma)-\log(t1-\gamma)=\log(t3-\gamma)-\log(t2-\gamma)$$

$$\Rightarrow \log\frac{t2-\gamma}{t1-\gamma}=\log\frac{t3-\gamma}{t2-\gamma}\Rightarrow\frac{t2-\gamma}{t1-\gamma}=\frac{t3-\gamma}{t2-\gamma}\Rightarrow(t2-\gamma).(t2-\gamma)=(t3-\gamma).(t1-\gamma)$$

$$\Rightarrow t2^2-2.t2.\gamma+\gamma^2=t3.t1-\gamma.t3-\gamma.t1+\gamma^2\Rightarrow t2^2-2.t2.\gamma=t3.t1-\gamma.t3-\gamma.t1$$

$$\Rightarrow \gamma.(t3+t1-2.t2)=t3.t1-t2^2$$

Ce qui permet d'obtenir la valeur de gamma :

$$\boxed{\gamma=\frac{t_1.t_3-t_2^2}{t_1+t_3-2.t_2}}$$

**Série N° 6**