ENSET
Mohammedia

Pr ECH-CHHIBAT

Fiabilité des systèmes industriels

Introduction : objectifs de la maintenance

la maintenance a pour objet de garantir l'état de bon fonctionnement de l'outil de production et d'assurer ainsi sa disponibilité.

La maintenance sera d'autant plus efficace qu'elle sera capable d'anticiper les défaillances du système :

Surveillance et contrôle en cours de production	Modèle physique de défaillance	Méthode probabiliste

La Fiabilité en maintenance

1.1/ Définitions suivant la norme X60-319 (EN 13306) :

« Aptitude d'un bien à accomplir une fonction requise dans des conditions données, durant un intervalle de temps donné. »

« C'est l'aptitude d'un bien à ne pas tomber en panne. »

La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminée.

Probabilité

- C'est le rapport : **(nbre *de cas favorable / nbre de cas possibles*) (< 1)**
- *Associé à une date t*

Fiabilité

- Notée : R(t) (Le symbole R provient de l'anglais Reliability)
- Probabilité de bon fonctionnement à la date t

Fonction défaillance

- Notée : F(t) (Le symbole F provient de l'anglais Failure)
- Probabilité de défaillance à la date t

R(t)+F(t)=1

FONCTION REQUISE

- accomplir une mission,
- rendre un service attendu.
- Il faut définir un seuil d'admissibilité au deçà duquel la fonction n'est plus remplie.

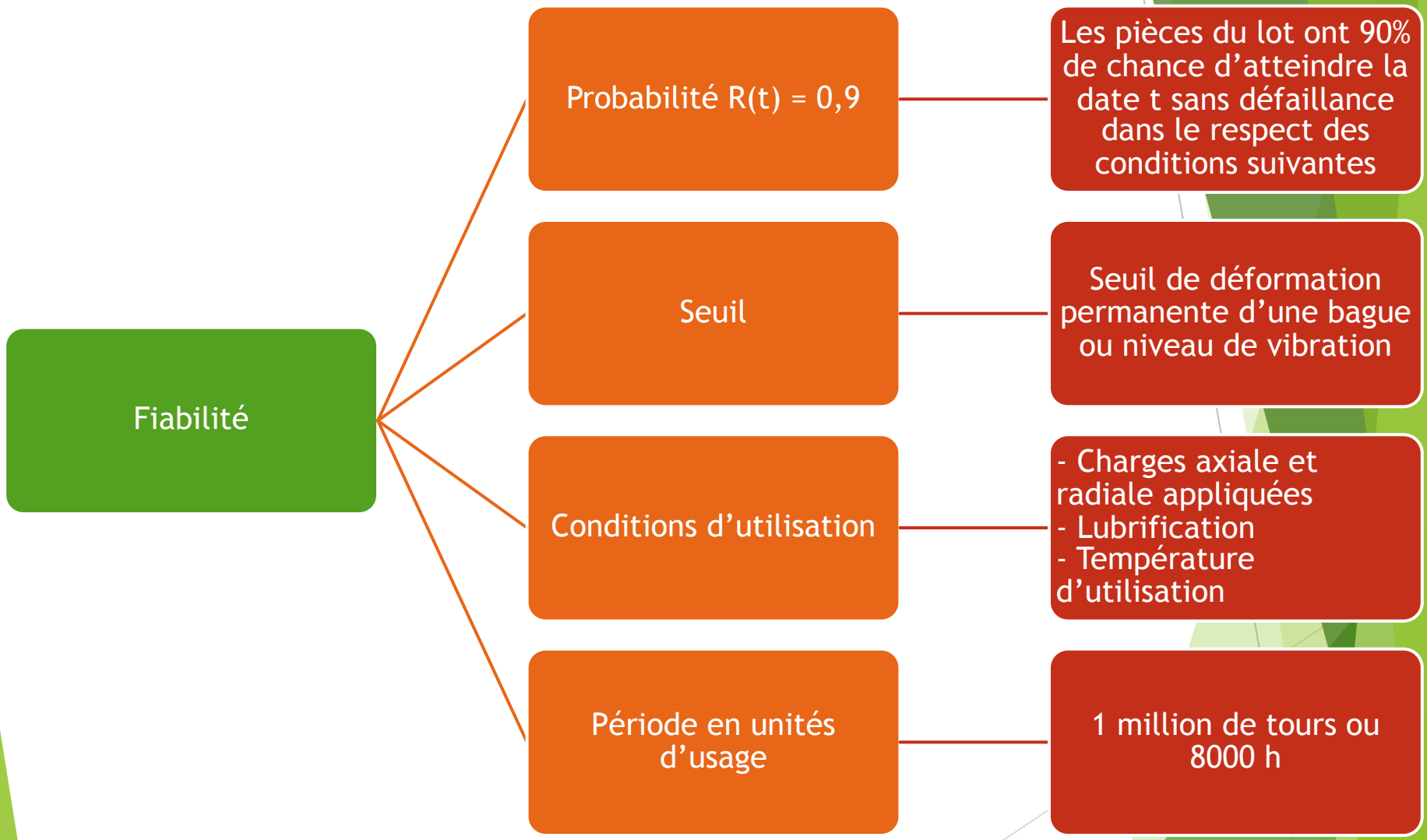
CONDITIONS D'UTILISATION

- définition des conditions d'usage
- de l'environnement avec ses variations
- des contraintes mécaniques , chimiques…

PÉRIODE DE TEMPS

- définition de la mission en unité d'usage
- A tout instant ti, on aura une fiabilité R(ti)
- Ex : On se fixe un minimum R (tm) = 0.9 pour une durée de mission de 8000h

Ex : fiabilité d'un roulement



90% des roulements seront en état de fonctionnement au bout de 8000 heures dans le respect des conditions prescrites.

Indicateurs utilisés en fiabilité

Le nombre de défaillances

- À n'utiliser que si les temps de fonctionnement sont semblables

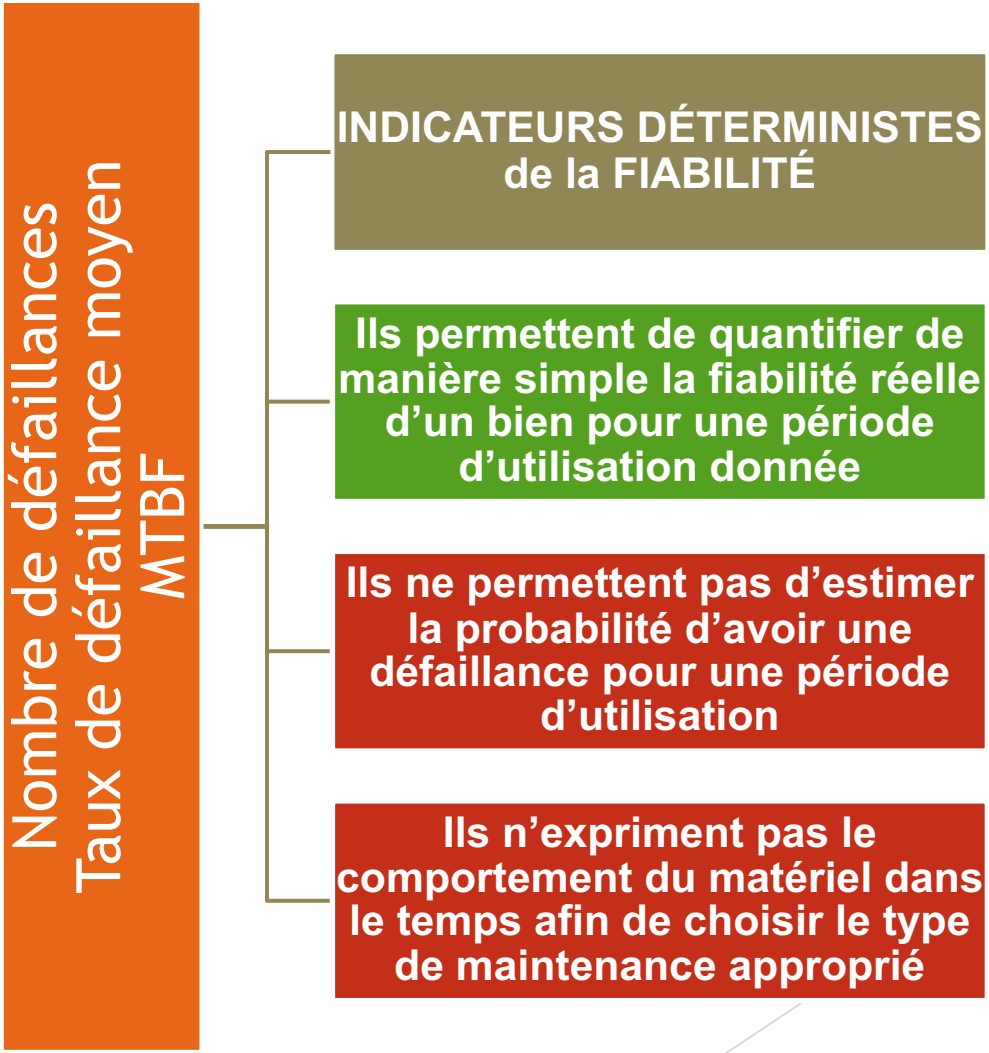
λ (taux de défaillance moyen)

- $\lambda = \frac{nombre \quad de \quad défaillances}{temps \quad cumulé \quad de \quad fonctionnement}$

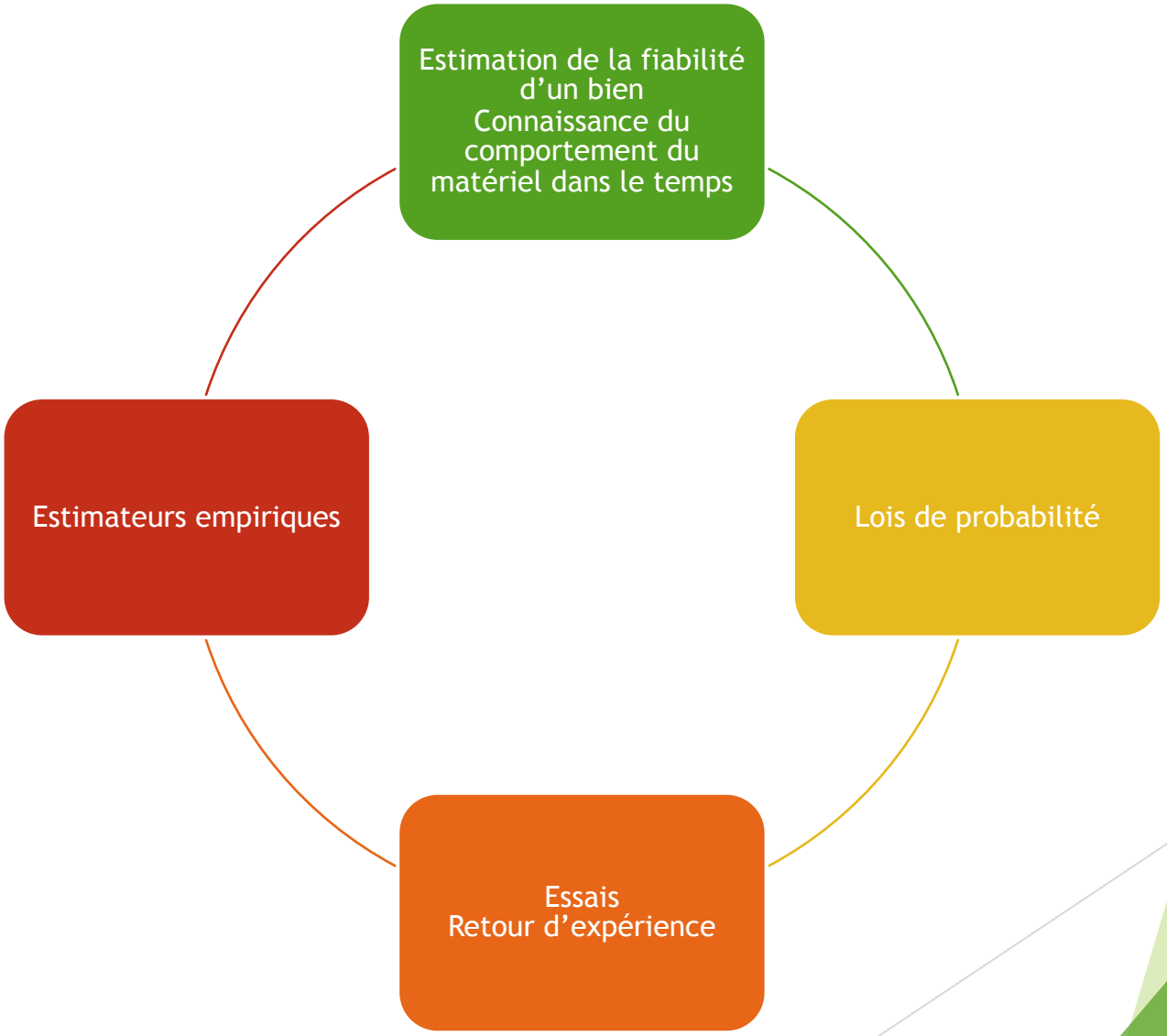
MTBF (Moyenne des temps de bon fonctionnement)

- $MTBF = \frac{temps \quad cumulé \quad de \quad fonctionnement}{nombre \quad de \quad défaillances}$
- $MTBF = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} TBFi}{n}$
- TBFi : temps de fonctionnement entre deux défaillances consécutives d'un bien

Indicateurs utilisés en fiabilité

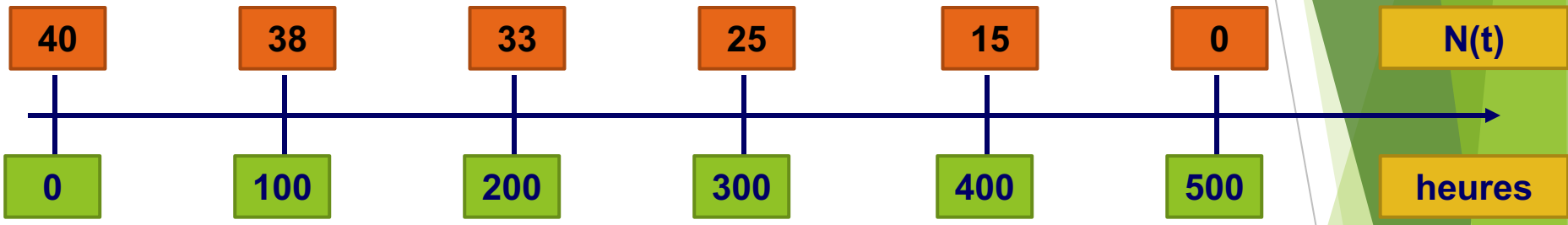


Estimation de la fiabilité



Estimation empirique

Soit le résultat d ’un essai de durée de vie :

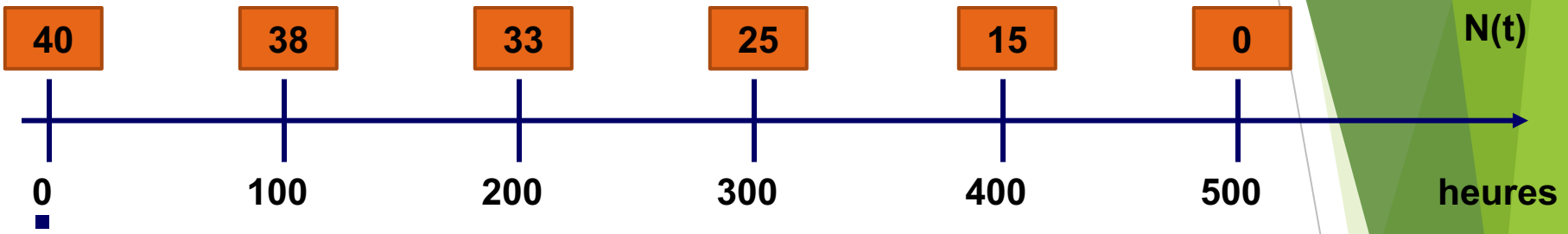


N(0) : nombre de dispositifs réputés identiques soumis à un essai commun, et donc vivants au temps t0.

N(t) : Nombre de survivants à un instant t.

Fonction Fiabilité R(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs n 'ayant pas subi de défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?

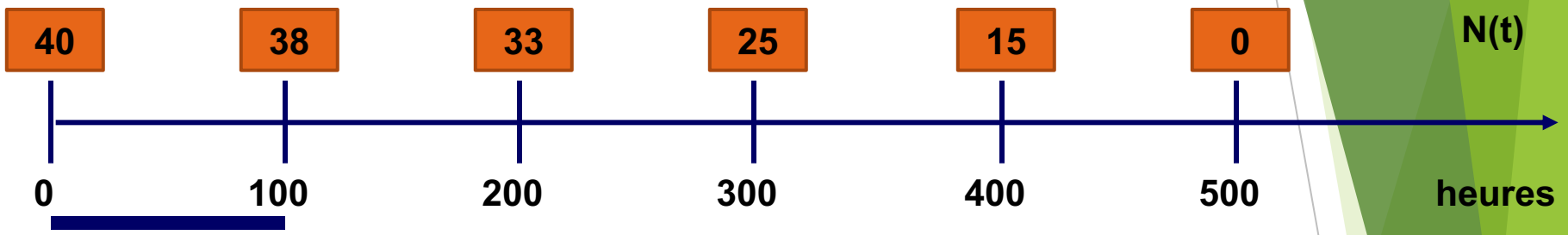


t	N(t)	R(t)
0	40	40/40 = 1
100	38	
200	33	
300	25	
400	15	
500	0	

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$

Fonction Fiabilité R(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs n 'ayant pas subi de défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?

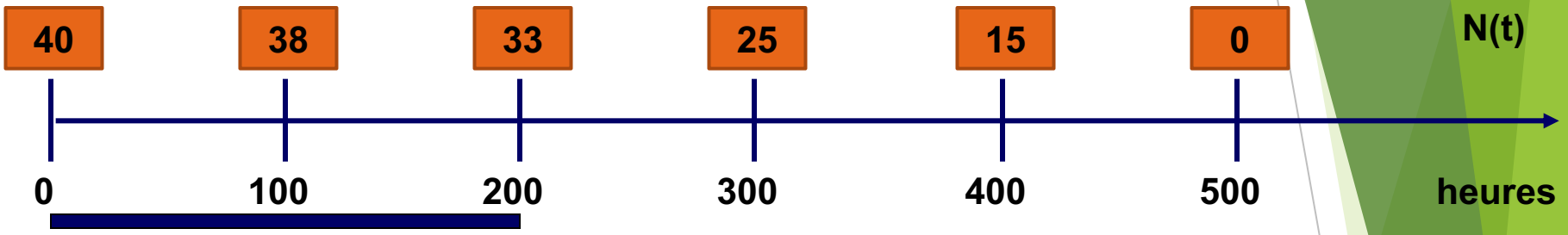


t	N(t)	R(t)
0	40	40/40 = 1
100	38	38/40 = 0,95
200	33	
300	25	
400	15	
500	0	

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$

Fonction Fiabilité R(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs n 'ayant pas subi de défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?

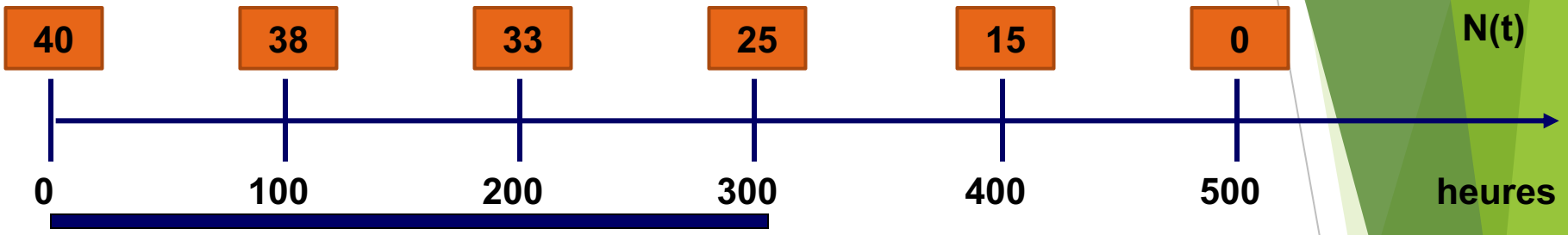


t	N(t)	R(t)
0	40	40/40 = 1
100	38	38/40 = 0,95
200	33	33/40 = 0,825
300	25	
400	15	
500	0	

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$

Fonction Fiabilité R(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs n 'ayant pas subi de défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?

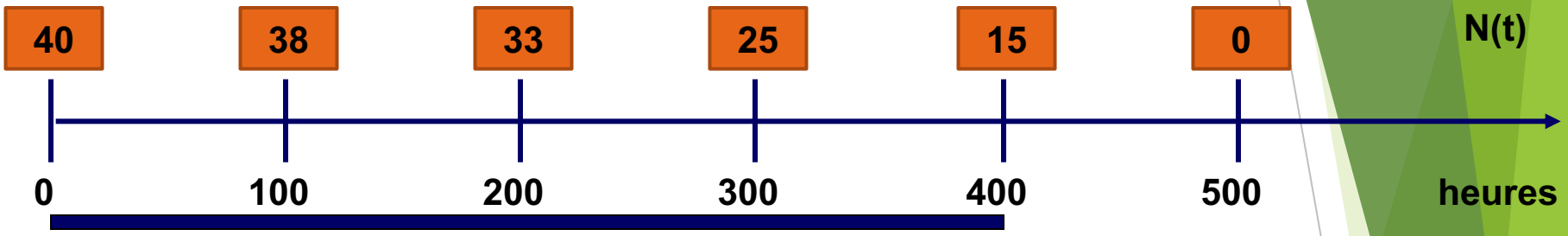


t	N(t)	R(t)
0	40	40/40 = 1
100	38	38/40 = 0,95
200	33	33/40 = 0,825
300	25	25/40 = 0,625
400	15	
500	0	

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$

Fonction Fiabilité R(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs n 'ayant pas subi de défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?

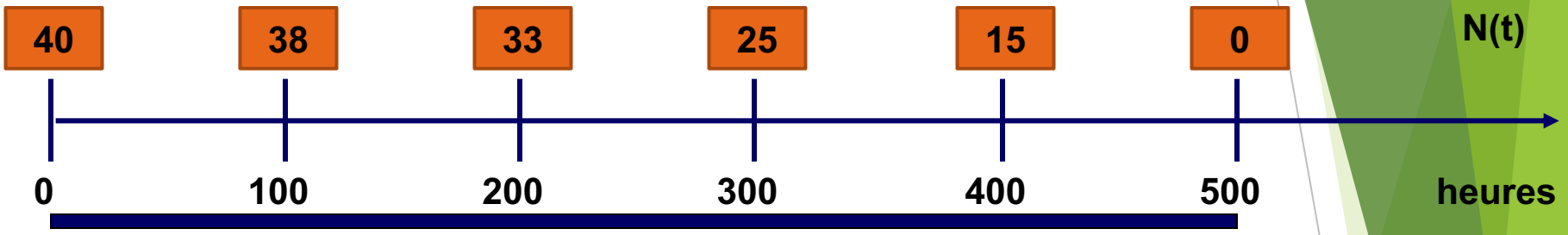


t	N(t)	R(t)
0	40	40/40 = 1
100	38	38/40 = 0,95
200	33	33/40 = 0,825
300	25	25/40 = 0,625
400	15	15/40 = 0,375
500	0	

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$

Fonction Fiabilité R(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs n 'ayant pas subi de défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?

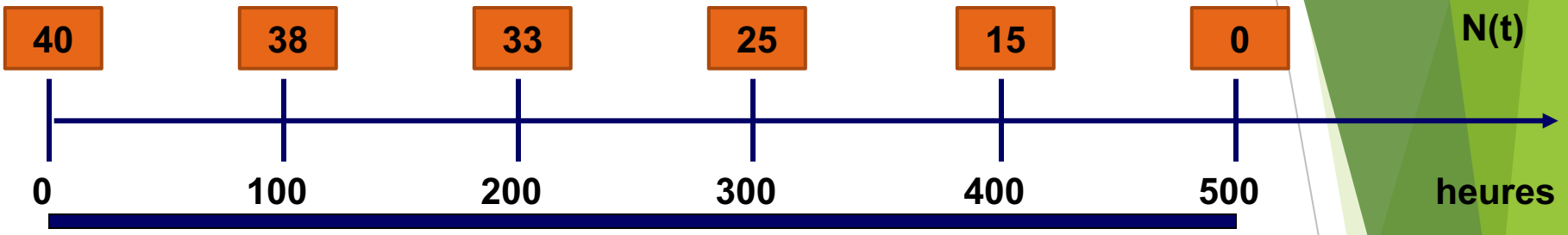


t	N(t)	R(t)
0	40	40/40 = 1
100	38	38/40 = 0,95
200	33	33/40 = 0,825
300	25	25/40 = 0,625
400	15	15/40 = 0,375
500	0	0/40 = 0

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$

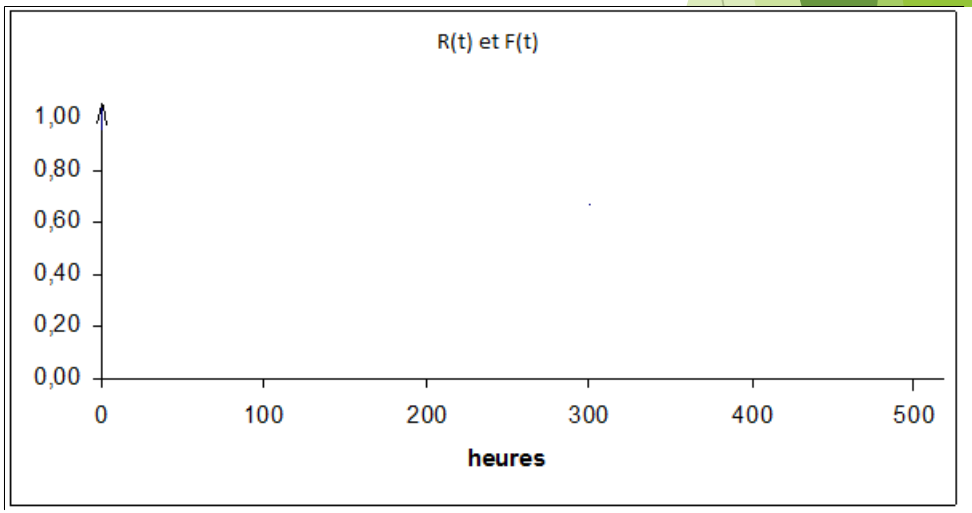
Fonction Fiabilité R(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs n 'ayant pas subi de défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?



t	N(t)	R(t)
0	40	40/40 = 1
100	38	38/40 = 0,95
200	33	33/40 = 0,825
300	25	25/40 = 0,625
400	15	15/40 = 0,375
500	0	0/40 = 0

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$



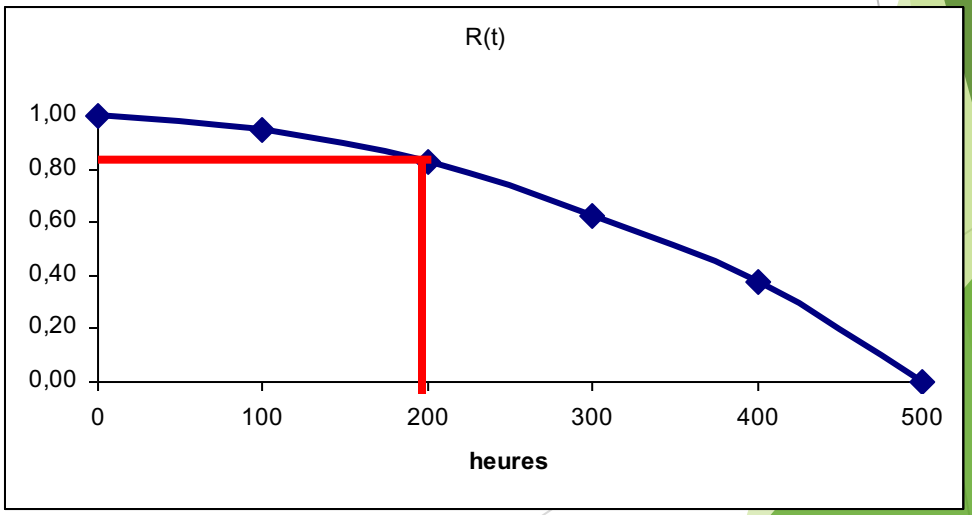
Fonction Fiabilité (R(t)

R(t) est la probabilité de fonctionnement sans défaillance dans un intervalle de temps [0,t[.

Exemple : Dans un intervalle de temps [0,200[, la probabilité de fonctionnement sans défaillance est :

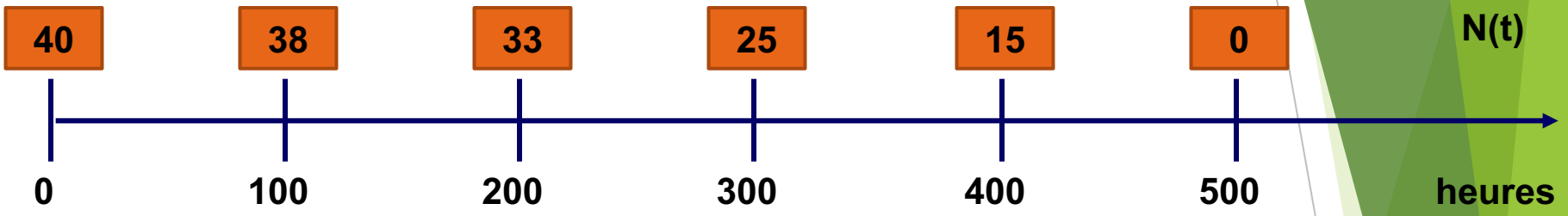
R(200) = 0,825 soit 82,5 %.

t	R(t)
0	40/40 = 1
100	38/40 = 0,95
200	33/40 = 0,825
300	25/40 = 0,625
400	15/40 = 0,375
500	0/40 = 0



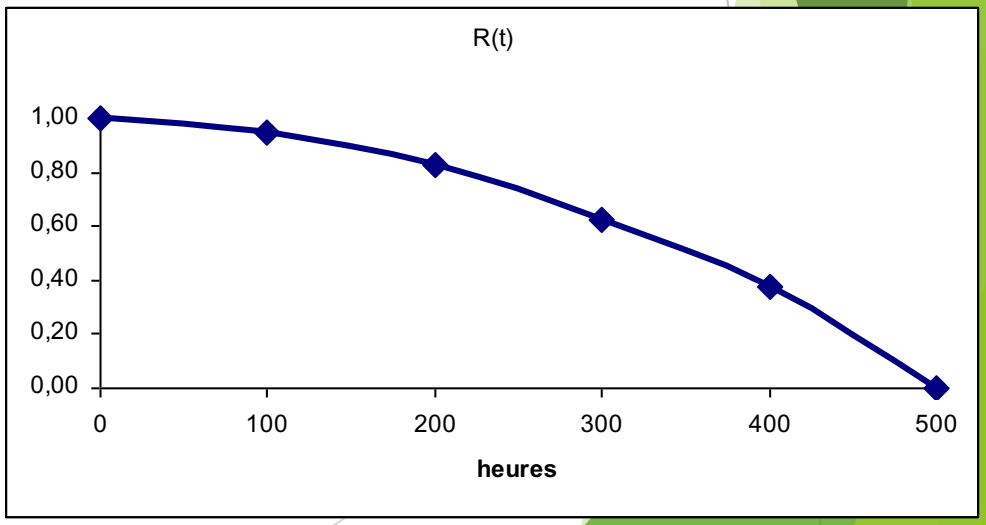
Fonction Défaillance F(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs ayant eu une défaillance dans un intervalle de temps [0,t[?



$$F(t) = 1 - R(t)$$

t	R(t)	F(t)
0	40/40 = 1	0
100	38/40 = 0,95	0,05
200	33/40 = 0,825	0,175
300	25/40 = 0,625	0,375
400	15/40 = 0,375	0,625
500	0/40 = 0	1



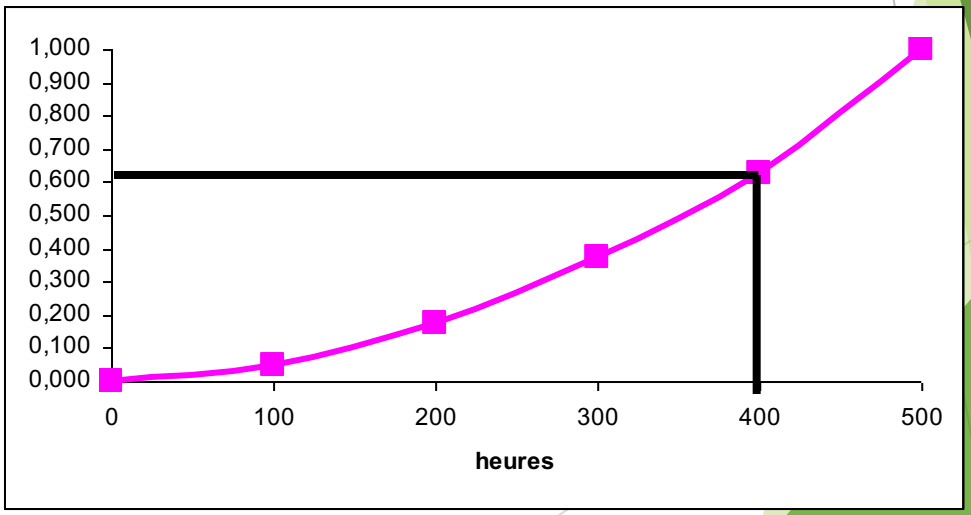
Fonction Défaillance F(t)

F(t) est la probabilité d'être défaillant dans un intervalle de temps [0,t[.

Exemple : Dans un intervalle de temps [0,400[, la probabilité d 'être défaillant est :

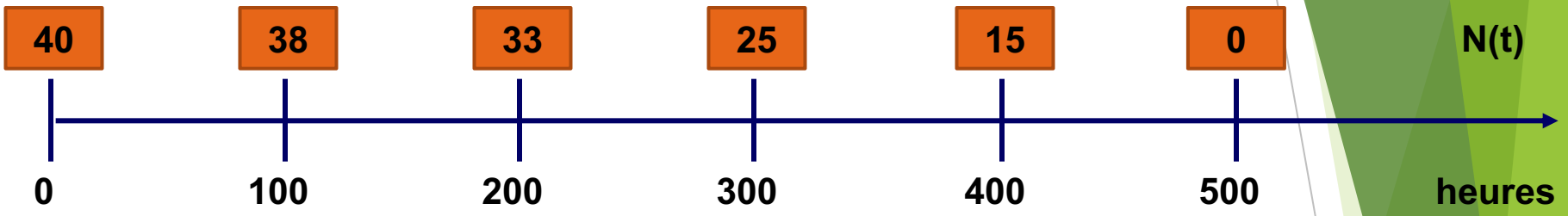
t	F(t)
0	0
100	0,05
200	0,175
300	0,375
400	0,625
500	1

F(400) = 0,625 soit 62,5 %



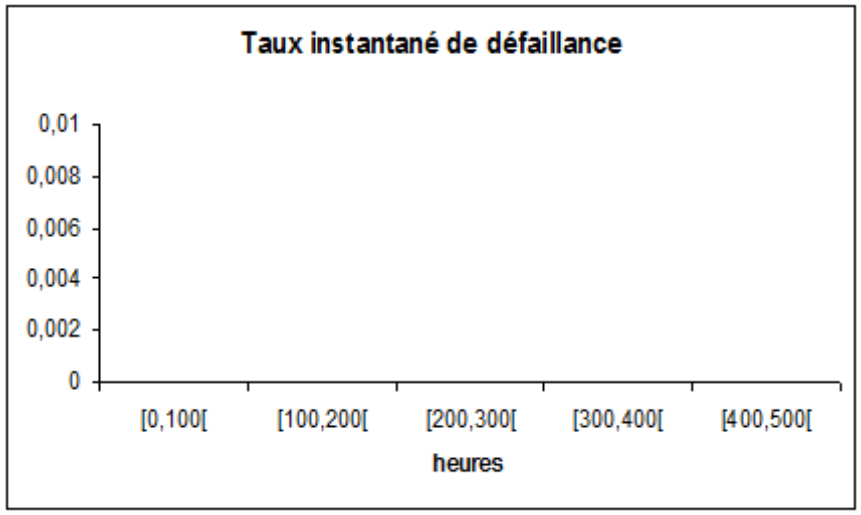
Taux instantané de défaillance λ(t)

Quel est le pourcentage de dispositifs ayant eu une défaillance dans l 'intervalle de temps [t, t+Δt[ramené à l 'unité de temps et au nombre de dispositifs vivants à l 'instant t ?



$$\lambda_{[t,t+\Delta t[} = \frac{\Delta n(t)}{N(t)\times\Delta t}$$

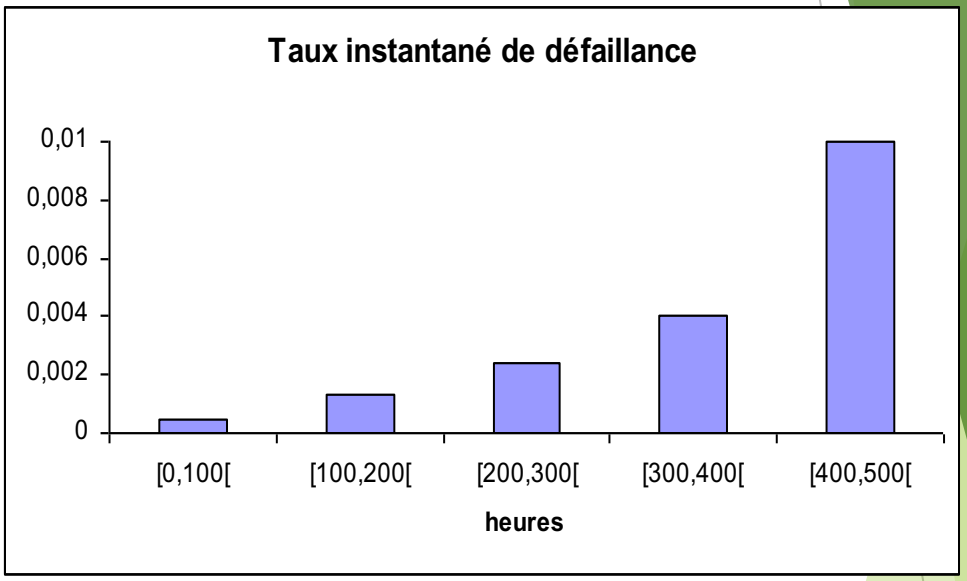
[t, t+Δt[	Δ n(t)	N(t)	$\lambda_{[t,\ t+\Delta t[}$
[0,100[	2	40	$2 / (40x100) = 5.10^{-4}$
[100,200[	5	38	$5 / (38x100) = 1,3.10^{-3}$
[200,300[	8	33	$8 / (33x100) = 2,4.10^{-3}$
[300,400[	10	25	$10 / (25x100) = 4.10^{-3}$
[400,500[	15	15	15 / (15x100)= 0,01



Taux instantané de défaillance λ(t)

Que peut-on dire du comportement dans le temps de ce composant ?

[t, t+Δt[	Δ n(t)
[0,100[	2
[100,200[	5
[200,300[	8
[300,400[	10
[400,500[	15

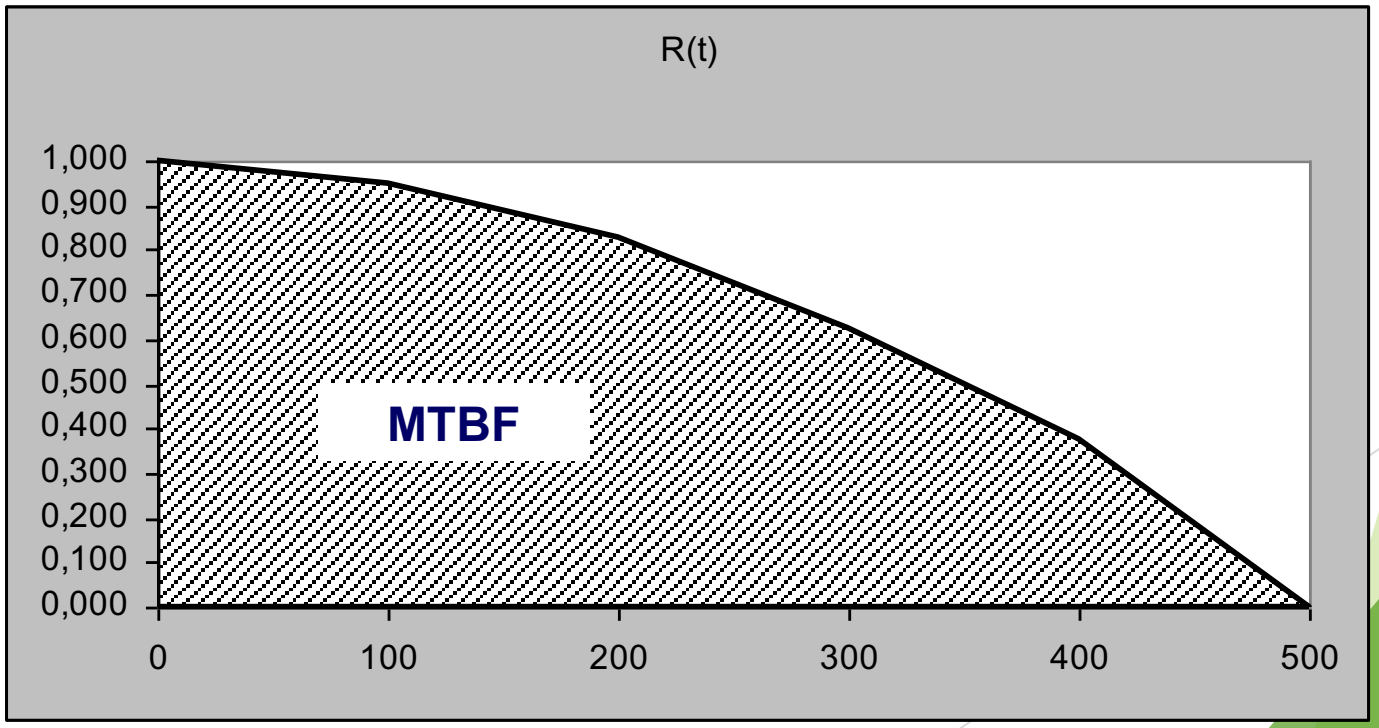


- Le taux de défaillance est croissant ➔ zone de vieillesse
- Les défaillances sont dépendantes du temps (usure, fatigue).
- Maintenance préventive conditionnelle ou améliorative.

Estimation de la MTBF

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R(t).dt$$

C'est l'aire sous la courbe représentative de la fiabilité

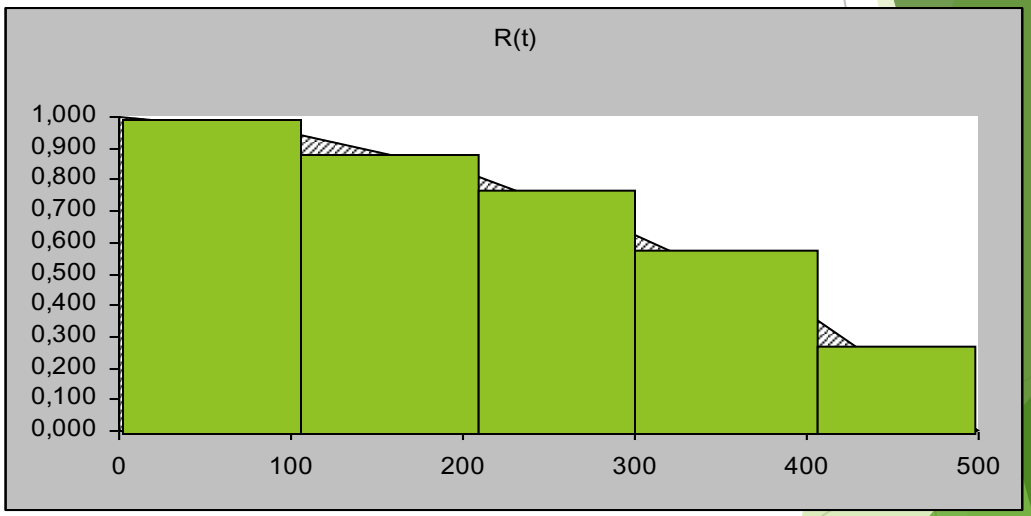


Estimation de la MTBF

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R(t).dt$$

$$MTBF = \Delta t \times \sum_{i=1}^{i=n} R(t)_i$$

t	R(t)
0	
100	
200	
300	
400	
500	



MTBF = 100 x (1 + 0,95 + 0,825 + 0,625 + 0,375) = 377,5 heures

Estimateurs Empiriques : Application

Soit le résultat d ’un essai de durée de vie d’un composant :

t	N(t)
0	30
200	26
400	18
600	9
800	4
1000	0

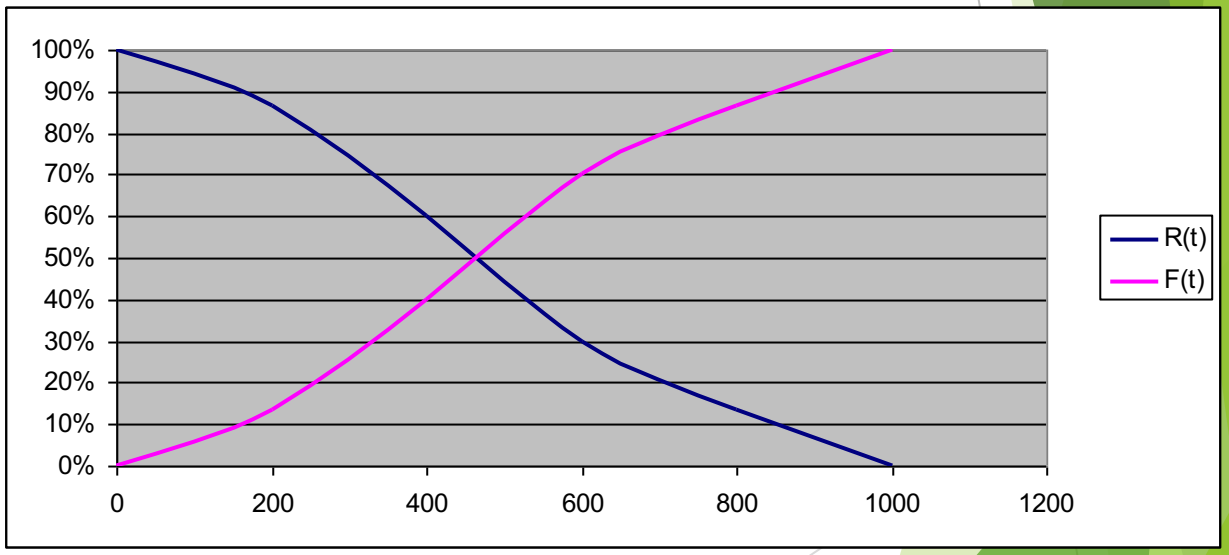
- Tracer la fonction de fiabilité R(t)
- Tracer le taux de défaillance $\lambda(t)$
- En déduire le comportement du composant dans le temps
- Estimer la MTBF du composant
- Estimer la fiabilité à MTBF
- Estimer la durée d’utilisation pour une fiabilité de 90%

Estimateurs Empiriques : Application

Soit le résultat d ’un essai de durée de vie d’un composant :

Tracer la fonction de fiabilité R(t)

t	N(t)	R(t)
0	30	100%
200	26	87%
400	18	60%
600	9	30%
800	4	13%
1000	0	0%



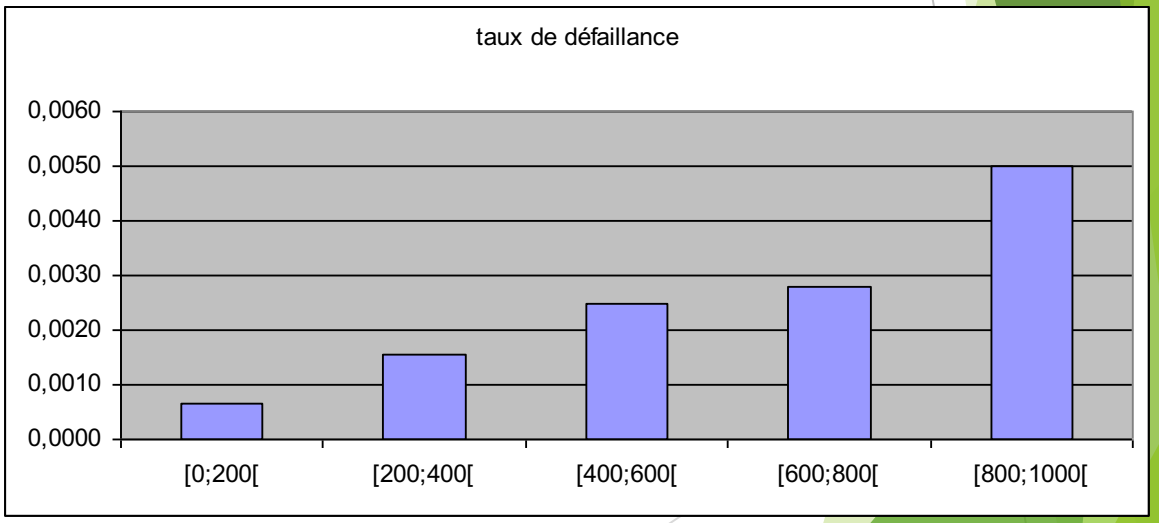
Estimateurs Empiriques : Application

Soit le résultat d 'un essai de durée de vie d'un composant :

Tracer le taux de défaillance λ(t)

En déduire le comportement du composant dans le temps

[t , t+Δt[	taux de défaillance
[0;200[	0,0007
[200;400[	0,0015
[400;600[	0,0025
[600;800[	0,0028
[800;1000[	0,0050



Le taux de défaillance λ(t) est croissant, les défaillances sont donc dépendantes du temps (phénomène d'usure, fatigue…)

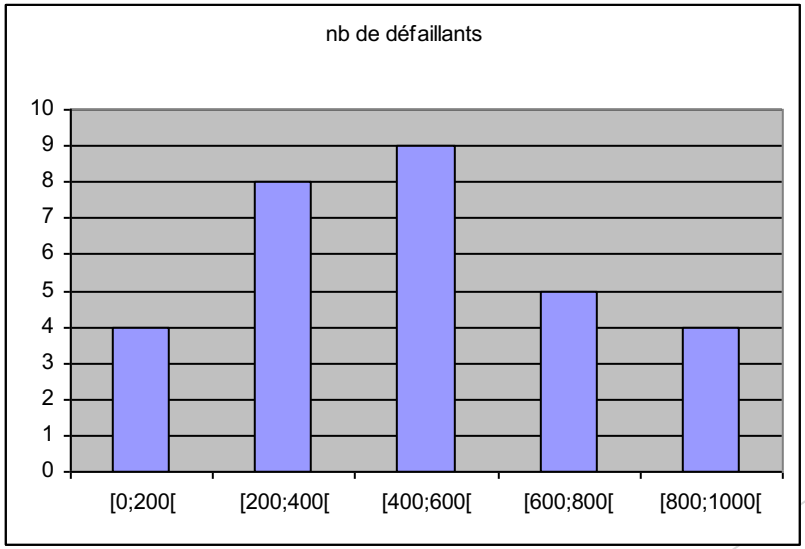
Estimateurs Empiriques : Application

Soit le résultat d 'un essai de durée de vie d'un composant :

Estimer la MTBF du composant

$$MTBF = \Delta t \times \sum_{i=1}^{i=n} R(t)_i$$

t	N(t)	R(t)
0	30	100%
200	26	87%
400	18	60%
600	9	30%
800	4	13%
1000	0	0%



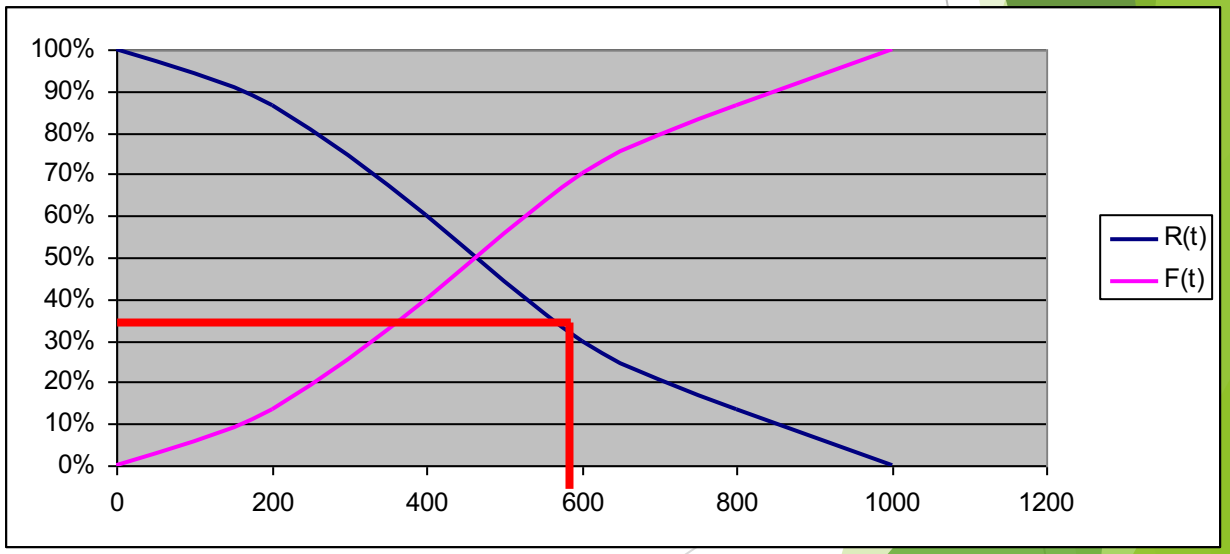
MTBF = 200 x (1 + 0,87 + 0,6 + 0,3 + 0,13) = 580 h

Estimateurs Empiriques : Application

Soit le résultat d ’un essai de durée de vie d’un composant :

Estimer la fiabilité à MTBF

t	N(t)	R(t)
0	30	100%
200	26	87%
400	18	60%
600	9	30%
800	4	13%
1000	0	0%



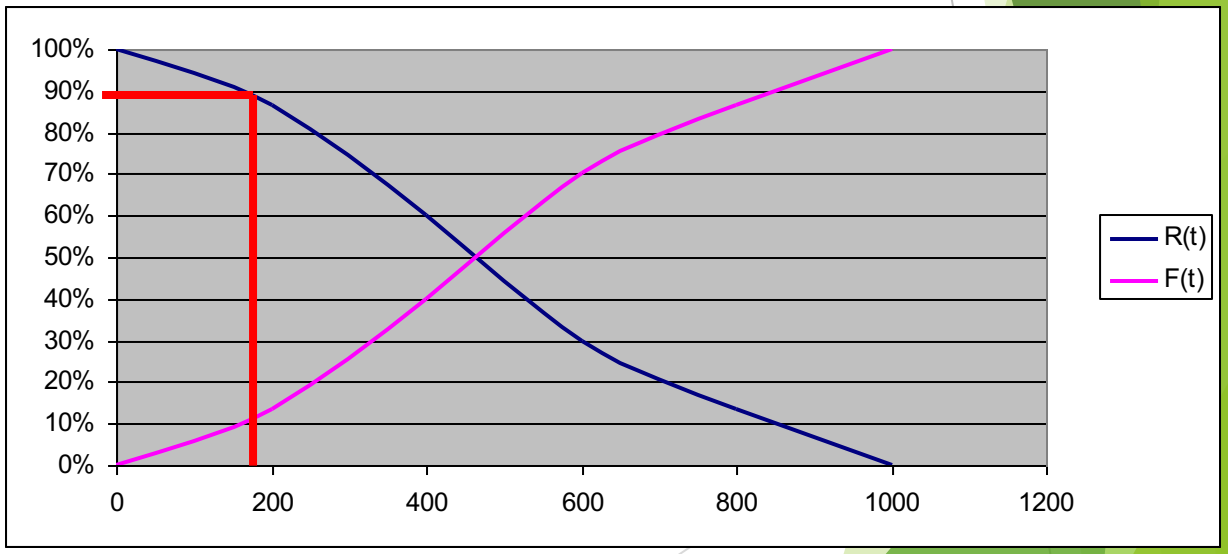
R (MTBF) = 32%

Estimateurs Empiriques : Application

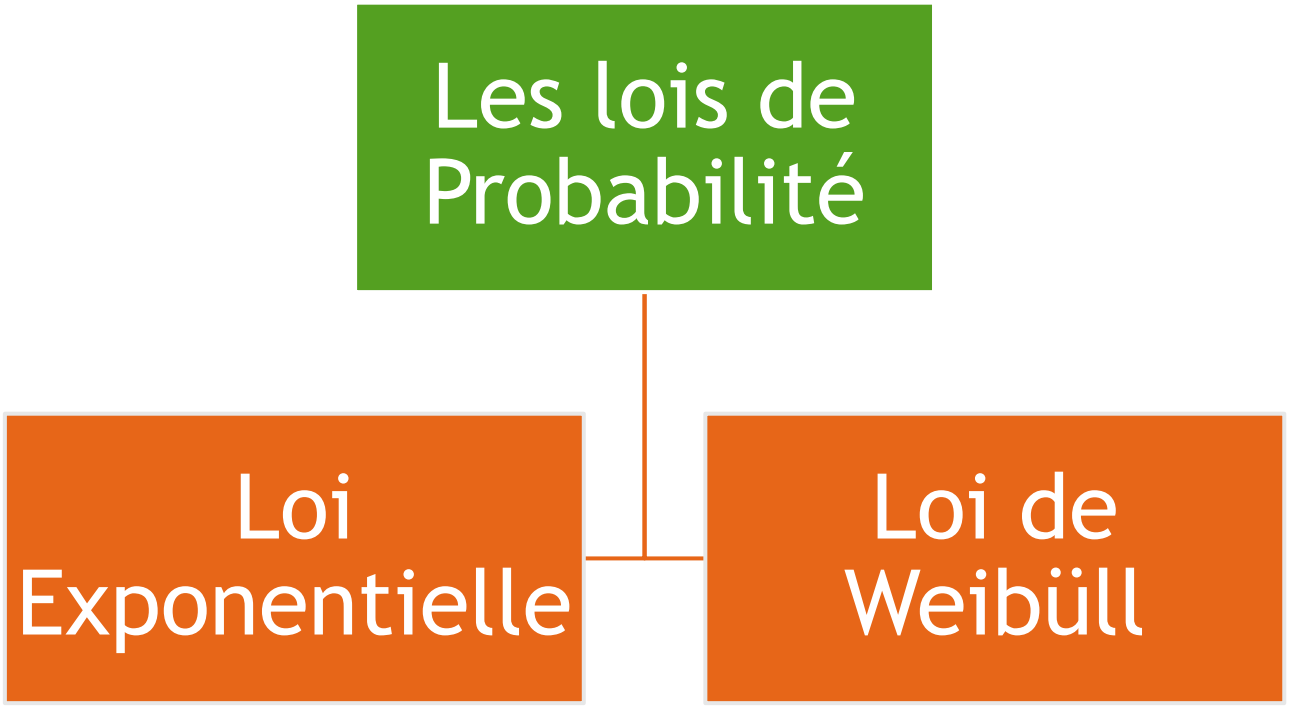
Soit le résultat d 'un essai de durée de vie d'un composant :

Estimer la durée d'utilisation pour une fiabilité de 90%

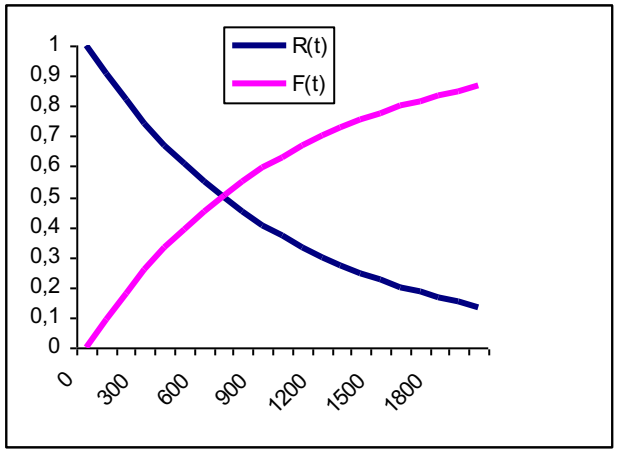
t	N(t)	R(t)
0	30	100%
200	26	87%
400	18	60%
600	9	30%
800	4	13%
1000	0	0%

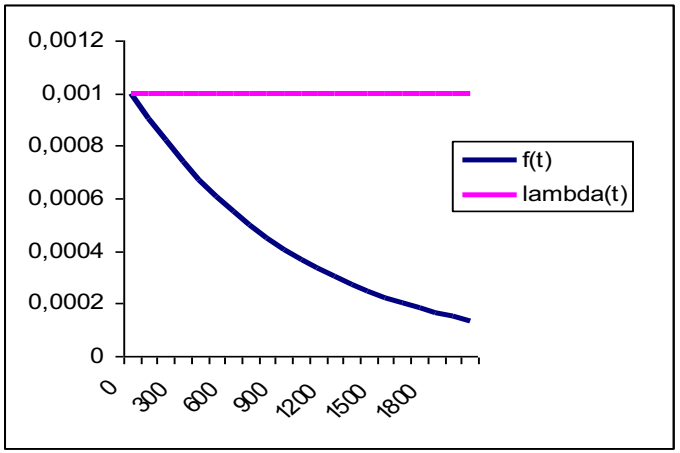


pour R(t) = 90% ➔ t = 180 h


Les lois de Probabilité
Loi Exponentielle
Loi de Weibüll

La Loi Exponentielle





R(t) : Fonction de fiabilité
F(t) : Fonction de défaillance

λ(t) : Taux de défaillance instantané
f(t) : Densité de probabilité de défaillance

Le taux de défaillance est constant ⇒ λ(t) = λ.

Les défaillances sont indépendantes du temps, aléatoires.

$$R(t) = e^{-\lambda.t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda.t}$$

$$t = \frac{-\ln R(t)}{\lambda}$$

$$MTBF = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(t) = \lambda . e^{-\lambda.t}$$

Exploitation de la Loi Exponentielle

Le composant suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001 déf/heure.

- Déterminer la MTBF du composant
- Déterminer la probabilité d 'avoir une défaillance avant 100 heures.
- Déterminer la probabilité de ne pas avoir de défaillance avant 500 heures.
- Déterminer la périodicité de remplacement systématique du composant en admettant une fiabilité de 0,9.

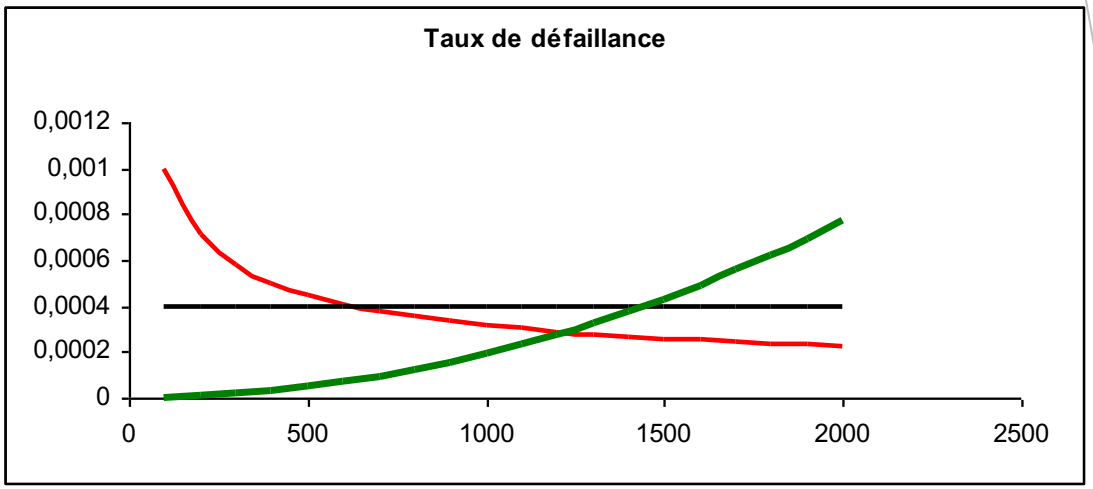
$$MTBF = \frac{1}{0{,}001} = 1000\ heures$$

$$F(100) = 1 - e^{-0{,}001 \bullet 100} = 0{,}0952\ soit\ 9{,}5\%$$

$$R(500) = e^{-0{,}001 \bullet 500} = 0{,}6065\ soit\ 60\%$$

$$t = \frac{-\ln(0{,}9)}{0{,}001} = 105\ heures$$

La Loi De Weibüll



Le taux de défaillance λ(t) peut être :

- **constant (cas des défaillances aléatoires).**
- **croissant (cas des défaillances par usure, fatigue, vieillesse).**
- **décroissant (cas des défaillances de jeunesse).**

La fonction de fiabilité est alors :

$$R(t) = e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$$

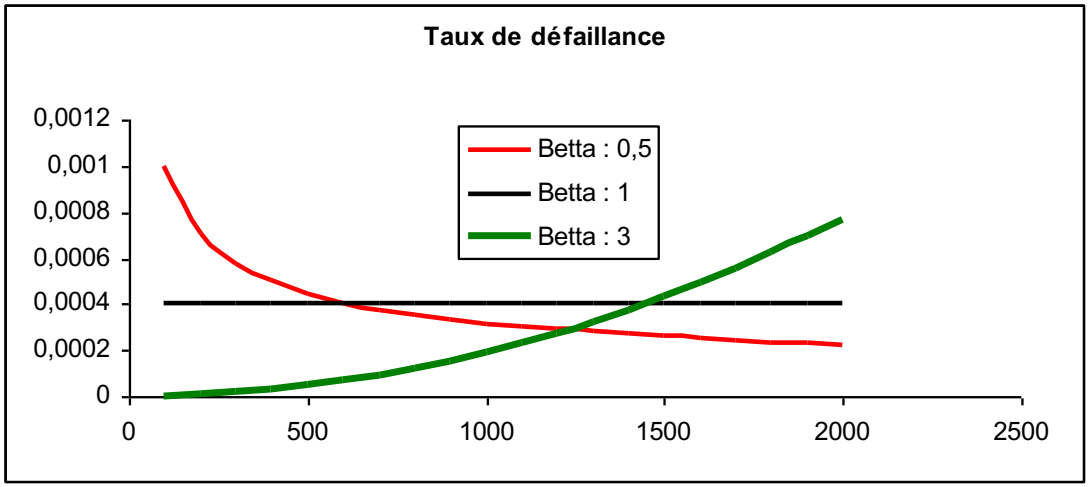
La Loi De Weibüll

$$R(t) = e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$$

La loi de Weibull comporte 3 paramètres

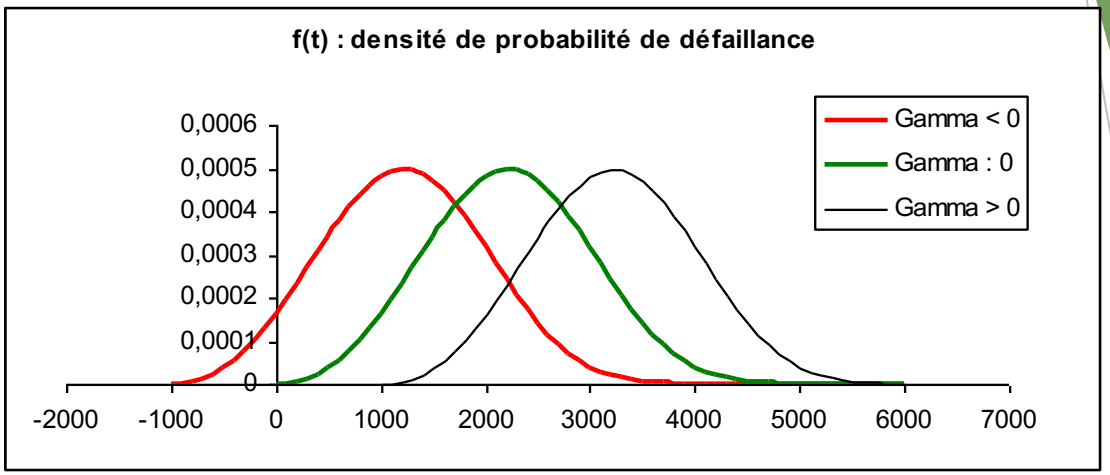
- **β : paramètre de forme (sans unité)**
- **γ : paramètre de position (même unité que « t »)**
- **η : paramètre d 'échelle (même unité que « t »)**

La Loi De Weibüll



Paramètre β	• **Taux de défaillance λ(t)**
β = 1	• **constant (cas des défaillances aléatoires)**
β > 1	• **croissant (cas des défaillances par usure, fatigue, vieillesse)**
β < 1	• **décroissant (cas des défaillances de jeunesse)**

La Loi De Weibüll



La probabilité de défaillance juste à l'instant t.

Paramètre γ	• **Densité de probabilité de défaillance f(t)**
$\gamma = 0$	• **Les défaillances surviennent dès l'utilisation du matériel**
$\gamma > 0$	• **Les défaillances ont débuté à partir du temps t = γ**
$\gamma < 0$	• **Les défaillances ont débuté avant la mise en historique des TBF**

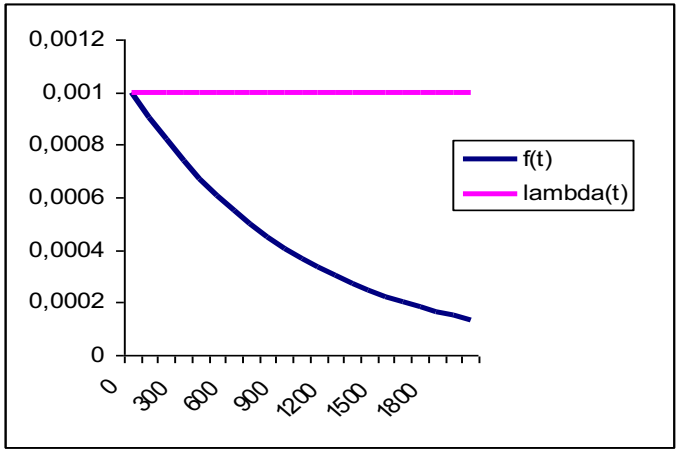
Cas particulier de la Loi De Weibüll

- β = 1

- γ = 0

$$R(t) = e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}} \longrightarrow R(t) = e^{-(\frac{t}{\eta})}$$

La loi exponentielle



$$R(t) = e^{-\lambda.t}$$

$$\lambda = \frac{1}{\eta}$$

Formulaire de la Loi De Weibüll

$$R(t) = e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$$

$$t = \eta \times \left[\ln \frac{1}{R(t)}\right]^{\frac{1}{\beta}} + \gamma$$

$$F(t) = 1 - e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$$

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} (\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1} \times e^{-(\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta}}$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} (\frac{t-\gamma}{\eta})^{\beta-1}$$

$$MTBF = \gamma + A.\eta$$

$$MTBF = \gamma + A.\eta$$

Exemple pour β = 3

A = 0,8930

β	A
0,20	120,0000
0,25	24,0000
0,30	9,2605
0,35	5,0291
0,40	3,3234
0,45	2,4786
0,50	2,0000
0,55	1,7024
0,60	1,5046
0,65	1,3663
0,70	1,2658
0,75	1,1906
0,80	1,1330
0,85	1,0880
0,90	1,0522
0,95	1,0234
1,00	1,0000
1,05	0,9808
1,10	0,9649
1,15	0,9517
1,20	0,9407
1,25	0,9314
1,30	0,9236
1,35	0,9170
1,40	0,9114
1,45	0,9067

β	A
1,50	0,9027
1,55	0,8994
1,60	0,8966
1,65	0,8942
1,70	0,8922
1,75	0,8906
1,80	0,8893
1,85	0,8882
1,90	0,8874
1,95	0,8867
2,00	0,8862
2,10	0,8857
2,20	0,8856
2,30	0,8859
2,40	0,8865
2,50	0,8873
2,60	0,8882
2,70	0,8893
2,80	0,8905
2,90	0,8917
3,00	0,8930
3,10	0,8943
3,20	0,8957
3,30	0,8970
3,40	0,8984
3,50	0,8997
3,60	0,9011
3,70	0,9025
3,80	0,9038
3,90	0,9051

β	A
4,00	0,9064
4,10	0,9077
4,20	0,9089
4,30	0,9102
4,40	0,9114
4,50	0,9126
4,60	0,9137
4,70	0,9149
4,80	0,9160
4,90	0,9171
5,00	0,9182
5,10	0,9192
5,20	0,9202
5,30	0,9213
5,40	0,9222
5,50	0,9232
5,60	0,9241
5,70	0,9251
5,80	0,9260
5,90	0,9269
6,00	0,9277
6,10	0,9286
6,20	0,9294
6,30	0,9302
6,40	0,9310
6,50	0,9318
6,60	0,9325
6,70	0,9333
6,80	0,9340
6,90	0,9347

Exploitation de la Loi De Weibüll

Le composant suit une loi de Weibüll (β = 1.4 ; γ = 0 ; η = 2200 heures).

- Déterminer la MTBF du composant
- Déterminer la probabilité d 'avoir une défaillance avant 1000 heures.
- Déterminer la probabilité de ne pas avoir de défaillance avant 500 heures.
- Déterminer la périodicité de remplacement systématique du composant en admettant une fiabilité de 0,9.

β = 1.4 ➔ A = 0,9114

$$MTBF = 0 + 0{,}9114 \times 2200 = 2005\ heures$$

$$F(1000) = 1 - e^{-(\frac{1000}{2200})^{1,4}} = 0{,}2822\ soit\ 28\%$$

$$R(500) = e^{-(\frac{500}{2200})^{1,4}} = 0{,}8819\ soit\ 88\%$$

$$T = 2200 \times \left[\ln \frac{1}{0{,}9}\right]^{1/1,4} = 440\ heures$$

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46

TBF (t)	Effectif (ni)	Effectif cumulé (Σni)	F(t) en %

1- Compléter le tableau ci-contre :

- Classer les TBF dans l'ordre croissant.
- Déterminer l'effectif de chaque TBF.
- Calculer l'effectif cumulé.
- En déduire la taille de l'échantillon (N = nombre total de TBF)

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46

TBF (t)	Effectif (ni)	Effectif cumulé (Σni)	F(t) en %
14	1	1	
19	1	2	
24	1	3	
26	1	4	
29	1	5	
31	1	6	
36	1	7	
40	1	8	
43	1	9	
46	1	10	
48	1	11	

1 - Compléter le tableau ci-contre :

- Classer les TBF dans l'ordre croissant.
- Déterminer l'effectif de chaque TBF.
- Calculer l'effectif cumulé.
- En déduire la taille de l'échantillon (N = nombre total de TBF)

2 – Approximer la fonction défaillance F(t) en fonction de la taille de l'échantillon

- Si N>50, F(t) = Σni / N ; les TBF seront regroupées en classe de valeurs.
- Si 20<N<50, on utilisera la méthode des rangs moyens ; F(t) = Σni / (N+1).
- Si N≤20, on utilisera la méthode des rangs médians :

  Voir table de Johnson

  Par calcul, F(t) = (Σni - 0,3) / (N + 0,4)

Table de Johnson

Ordre de rang (Σni)	Taille de l'échantillon (N)									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6,107	5,613	5,192	4,830	4,516	4,240	3,995	3,778	3,582	3,406
2	14,796	13,598	12,579	11,702	10,940	10,270	9,678	9,151	8,677	8,251
3	23,578	21,669	20,045	18,647	17,432	16,365	15,422	14,581	13,827	13,147
4	32,380	29,758	27,528	25,608	23,939	22,474	21,178	20,024	18,988	18,055
5	41,189	37,853	35,016	32,575	30,452	28,589	26,940	25,471	24,154	22,967
6	50,000	45,951	42,508	39,544	36,967	34,705	32,704	30,921	29,322	27,880
7	58,811	54,049	50,000	46,515	43,483	40,823	38,469	36,371	34,491	32,795
8	67,620	62,147	57,492	53,485	50,000	46,941	44,234	41,823	39,660	37,710
9	76,422	70,242	64,984	60,456	56,517	53,059	50,000	47,274	44,830	42,626
10	85,204	78,331	72,472	67,425	63,033	59,177	55,766	52,726	50,000	47,542
11	93,893	86,402	79,955	74,392	69,548	65,295	61,531	58,177	55,170	52,458
12		94,387	87,421	81,353	76,061	71,411	67,296	63,629	60,340	57,374
13			94,808	88,298	82,568	77,526	73,060	69,079	65,509	62,290
14				95,170	89,060	83,635	78,822	74,529	70,678	67,205
15					95,484	89,730	84,578	79,976	75,846	72,120
16						95,760	90,322	85,419	81,012	77,033
17							96,005	90,849	86,173	81,945
18								96,222	91,323	86,853
19									96,418	91,749
20										96,594

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46

TBF (t)	Effectif (ni)	Effectif cumulé (Σni)	F(t) en %
14	1	1	**6.107**
19	1	2	**14.796**
24	1	3	**23.578**
26	1	4	**32.380**
29	1	5	**41.189**
31	1	6	**50**
36	1	7	**58.811**
40	1	8	**67.620**
43	1	9	**76.421**
46	1	10	**85.204**
48	1	11	**93.893**

1 - Compléter le tableau ci-contre :

- Classer les TBF dans l'ordre croissant.
- Déterminer l'effectif de chaque TBF.
- Calculer l'effectif cumulé.
- En déduire la taille de l'échantillon (N = nombre total de TBF)

2 – Approximer la fonction défaillance F(t) en fonction de la taille de l'échantillon

- Si N>50, F(t) = Σni / N ; les TBF seront regroupées en classe de valeurs.
- Si 20<N<50, on utilisera la méthode des rangs moyens ; F(t) = Σni / (N+1).
- Si N≤20, on utilisera la méthode des rangs médians :

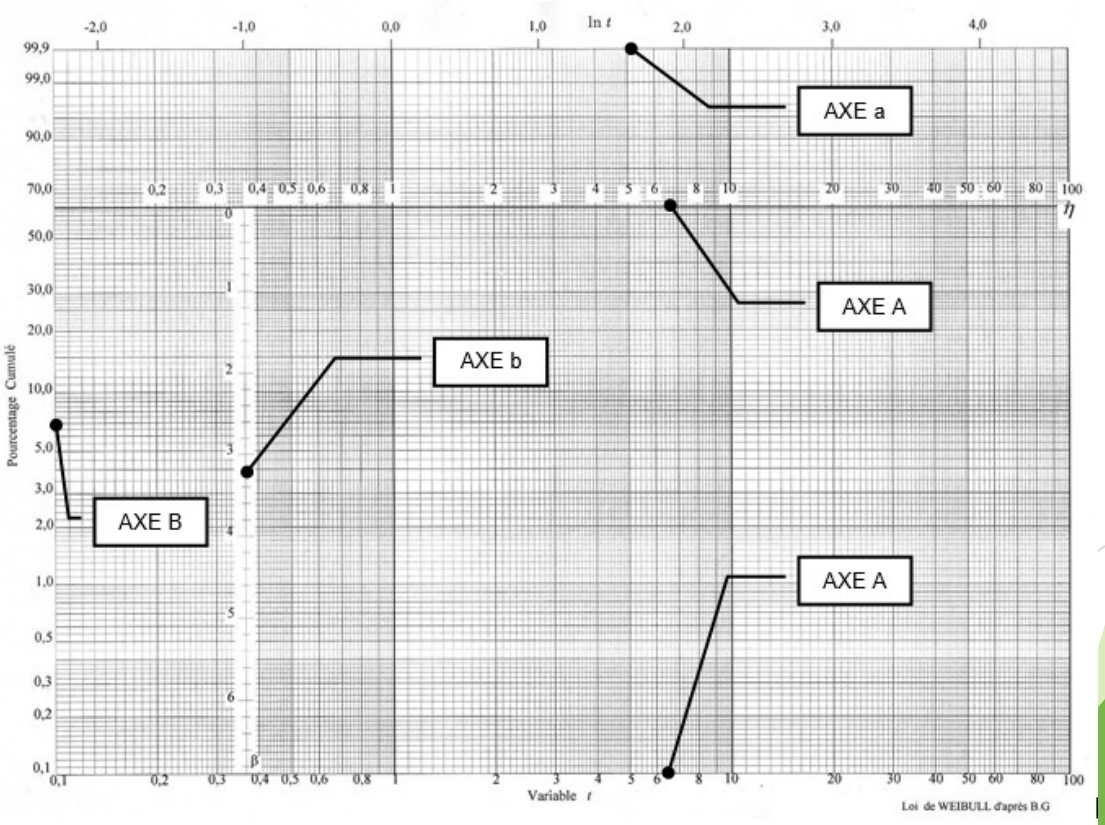
  Voir table de Johnson

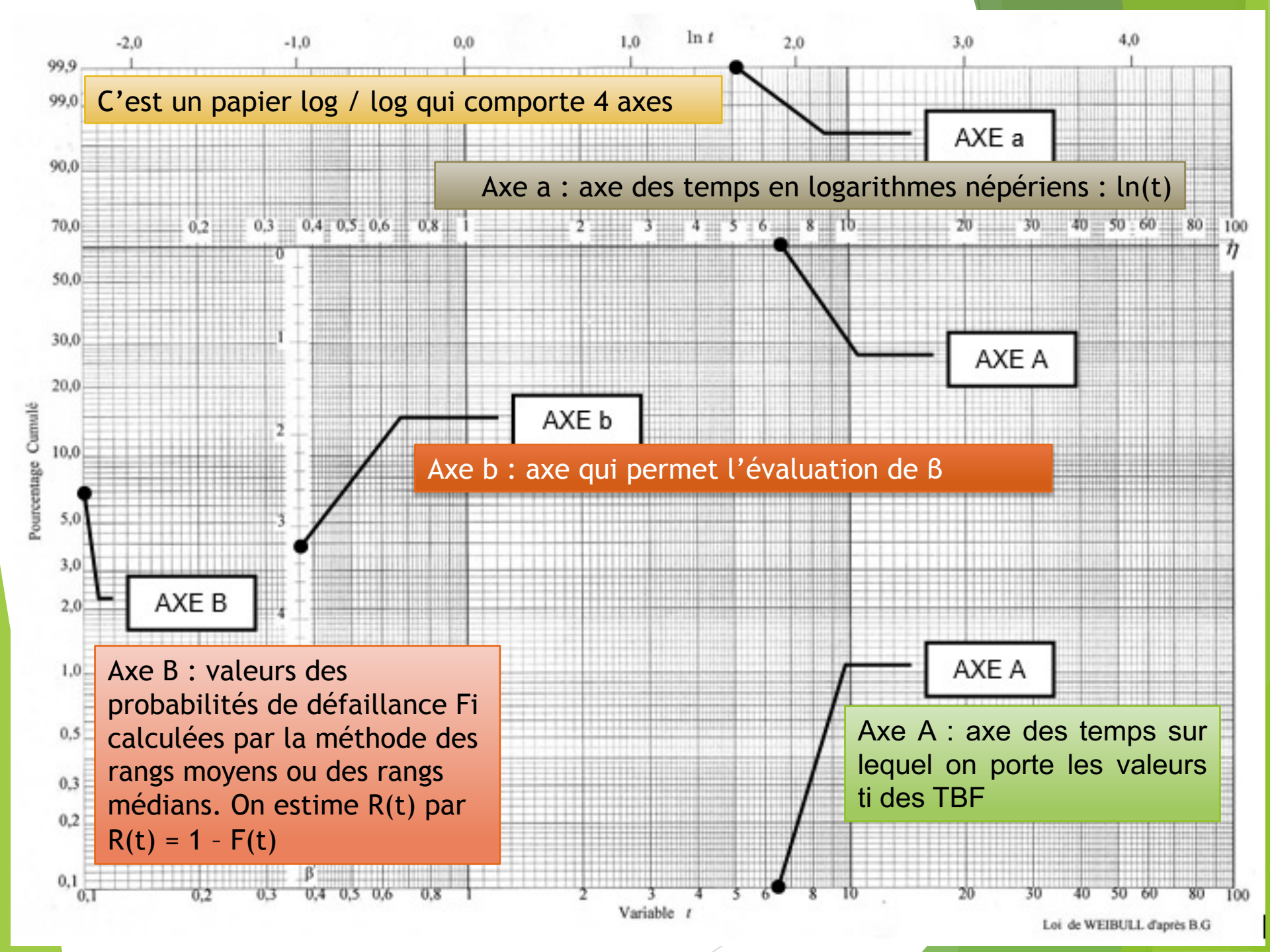
  Par calcul, F(t) = (Σni - 0,3) / (N + 0,4)

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46

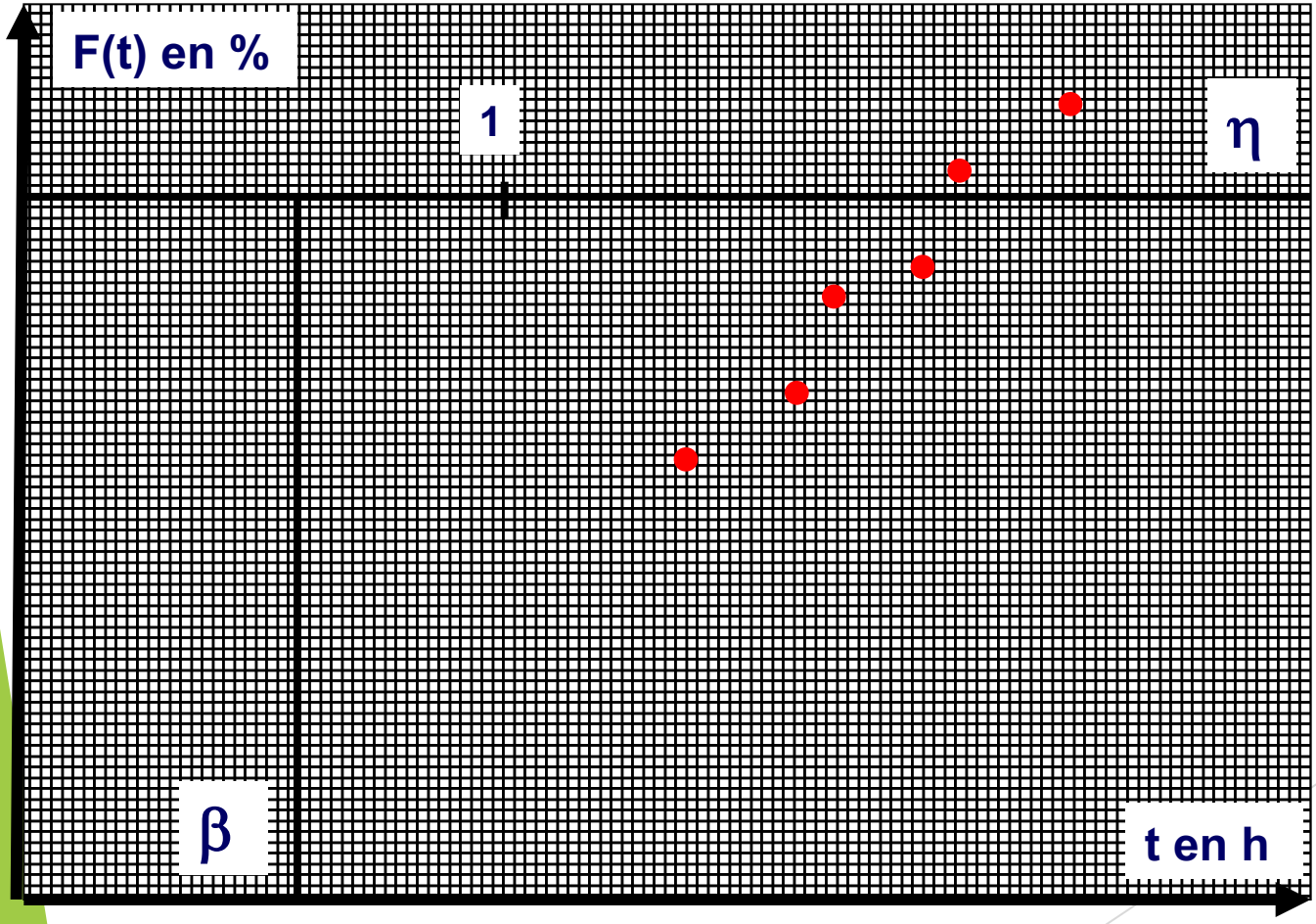
3 – Tracer le nuage de points [t, F(t)] sur du papier Weibüll




C’est un papier log / log qui comporte 4 axes
AXE a
Axe a : axe des temps en logarithmes népériens : ln(t)
AXE A
AXE b
Axe b : axe qui permet l’évaluation de ß
AXE B
Axe B : valeurs des probabilités de défaillance Fi calculées par la méthode des rangs moyens ou des rangs médians. On estime R(t) par R(t) = 1 – F(t)
AXE A
Axe A : axe des temps sur lequel on porte les valeurs ti des TBF
ln t
Pourcentage Cumulé
Variable t
Loi de WEIBULL d’après B.G

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

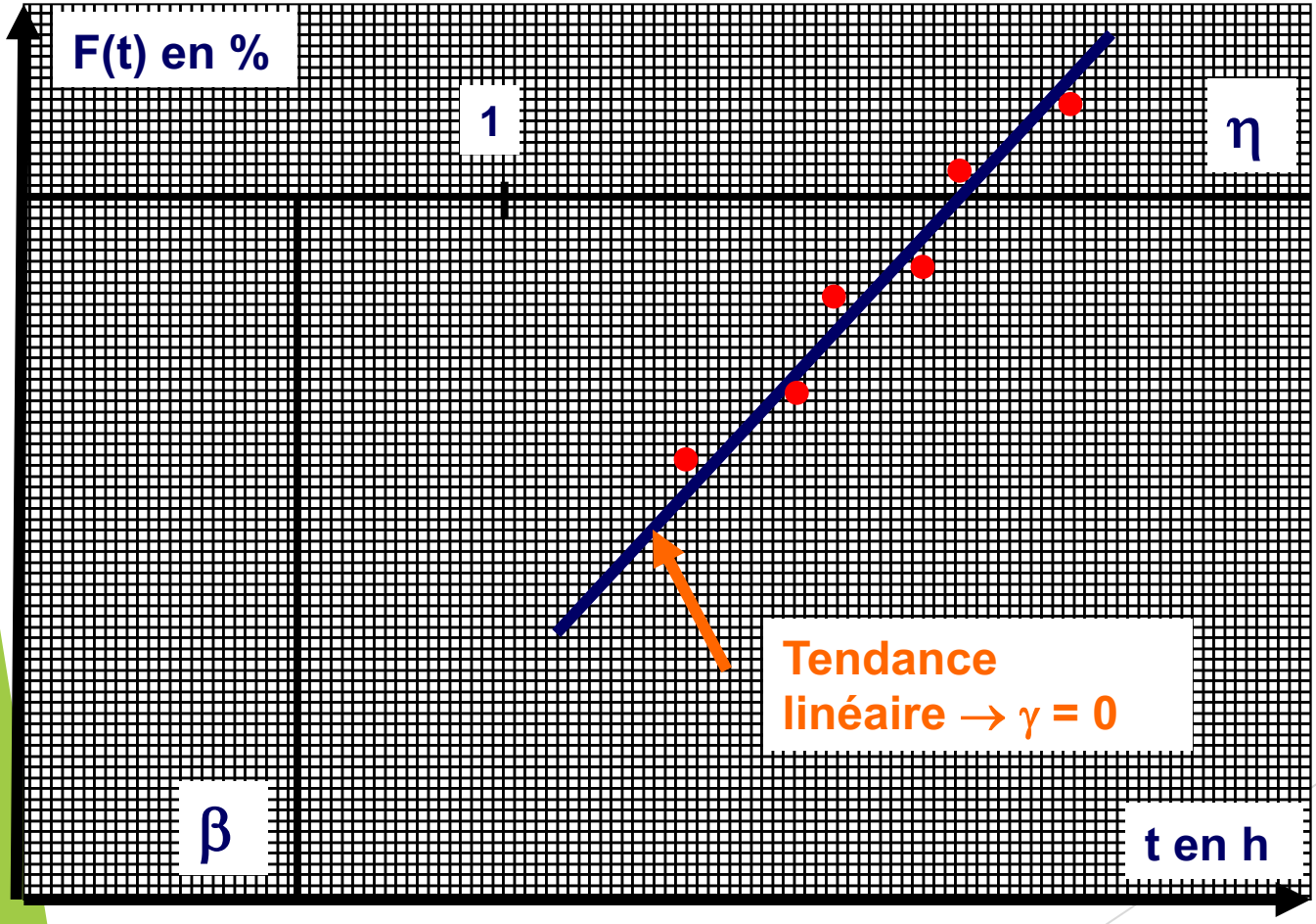
Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46



3 – Tracer le nuage de points [t, F(t)] sur du papier Weibüll

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

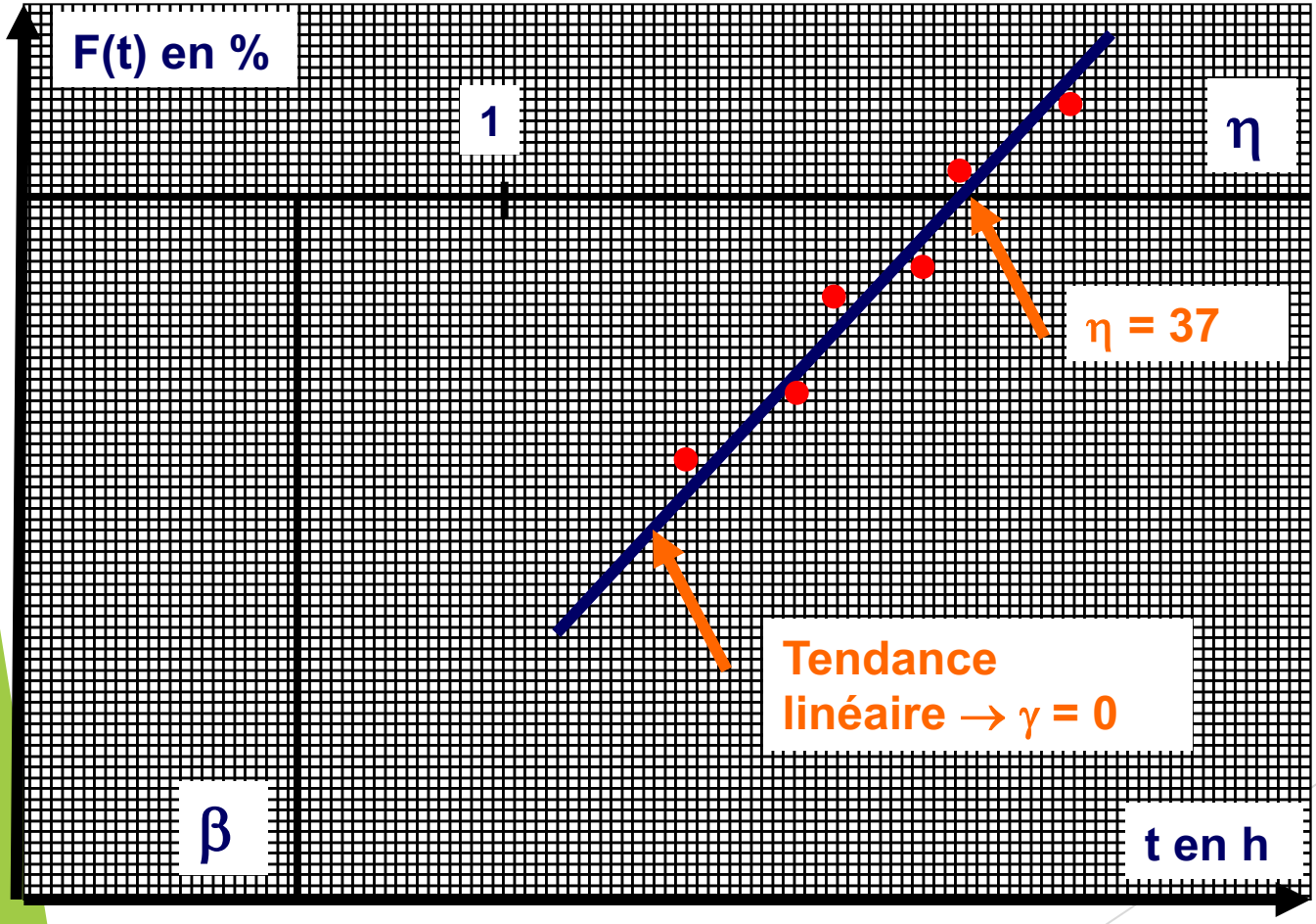
Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46



4 – Ajuster graphiquement le nuage de points

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

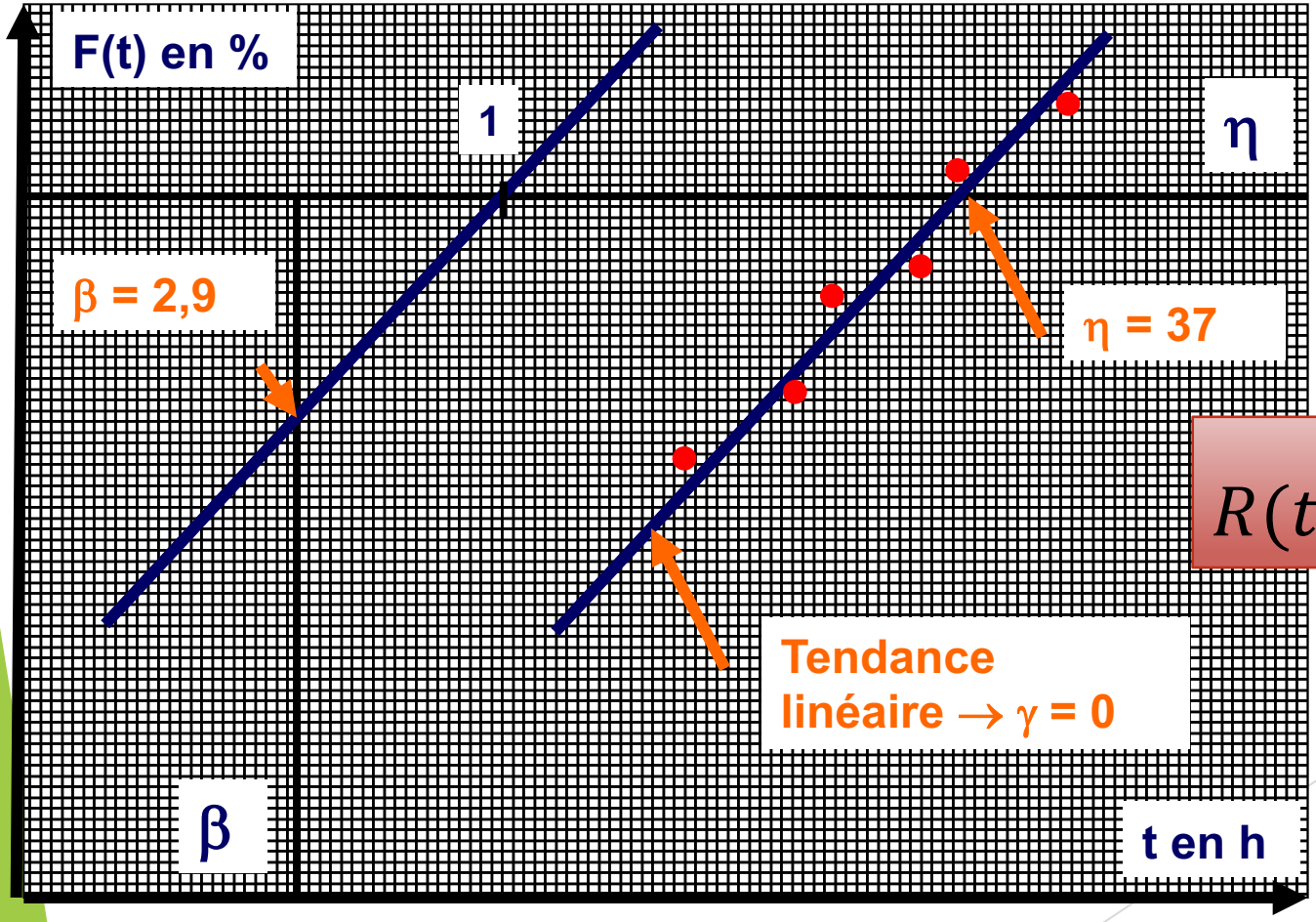
Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46



5 – Déterminer η

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46

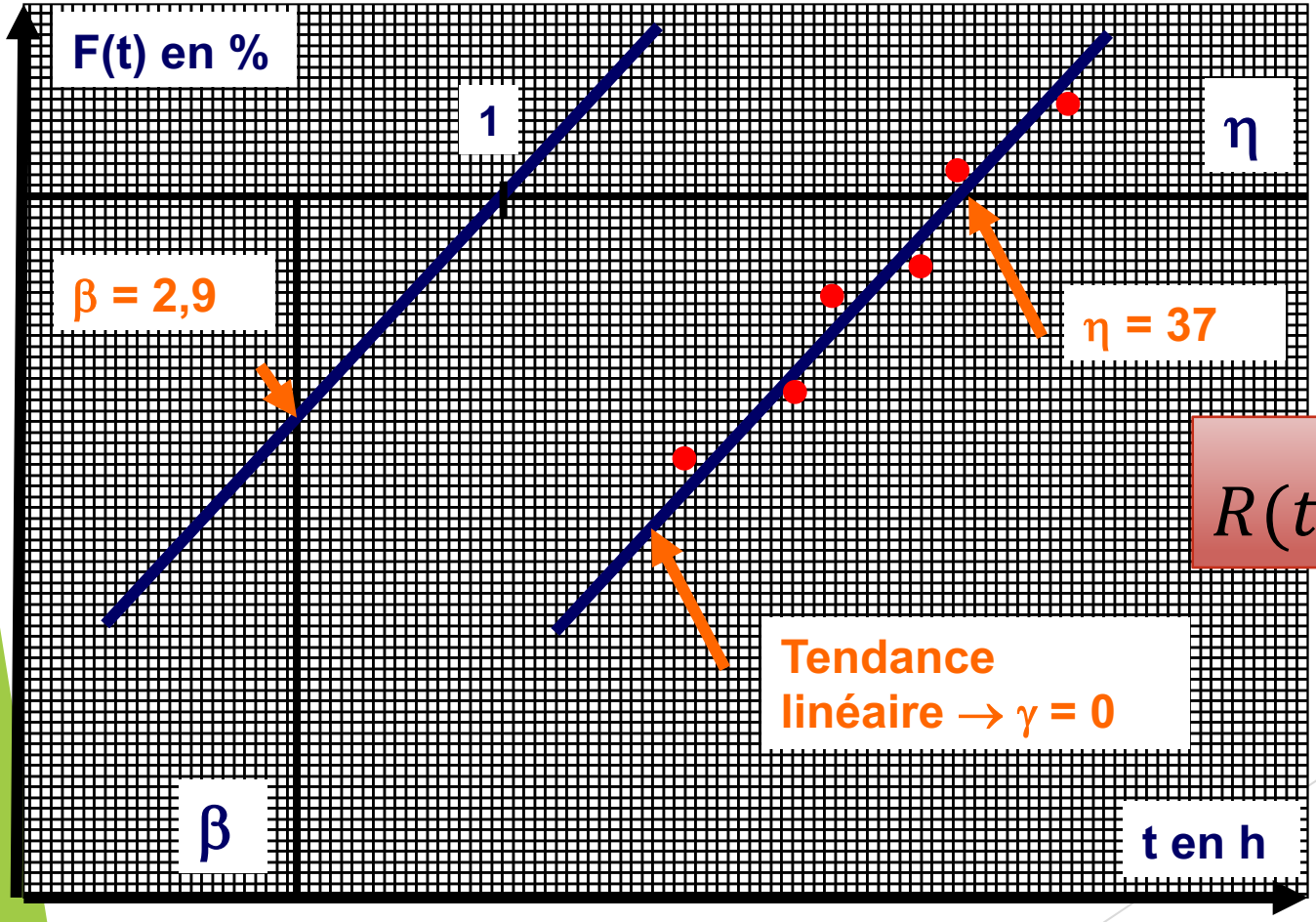


6 – Déterminer β

$$R(t) = e^{-(\frac{t}{37})^{2,9}}$$

Recherche des paramètres de la Loi De Weibüll

Soit les TBF (en heure) issus d'un historique : 29 – 31 – 26 – 14 – 19 – 40 – 48 – 24 – 36 – 43 – 46

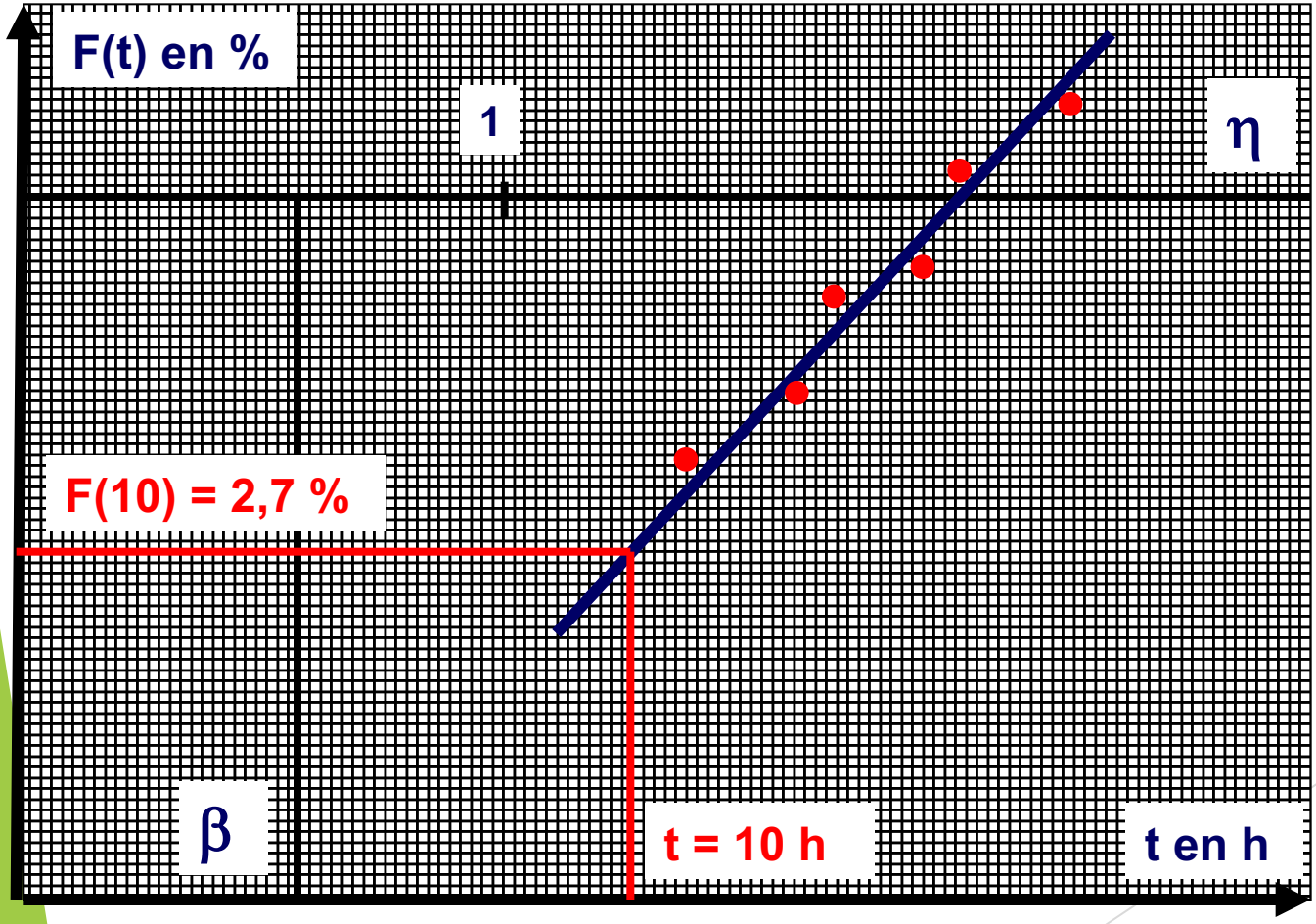


7 – Déterminer la loi de fiabilité

$$R(t) = e^{-(\frac{t}{37})^{2,9}}$$

Exploitation du graphique de Weibüll

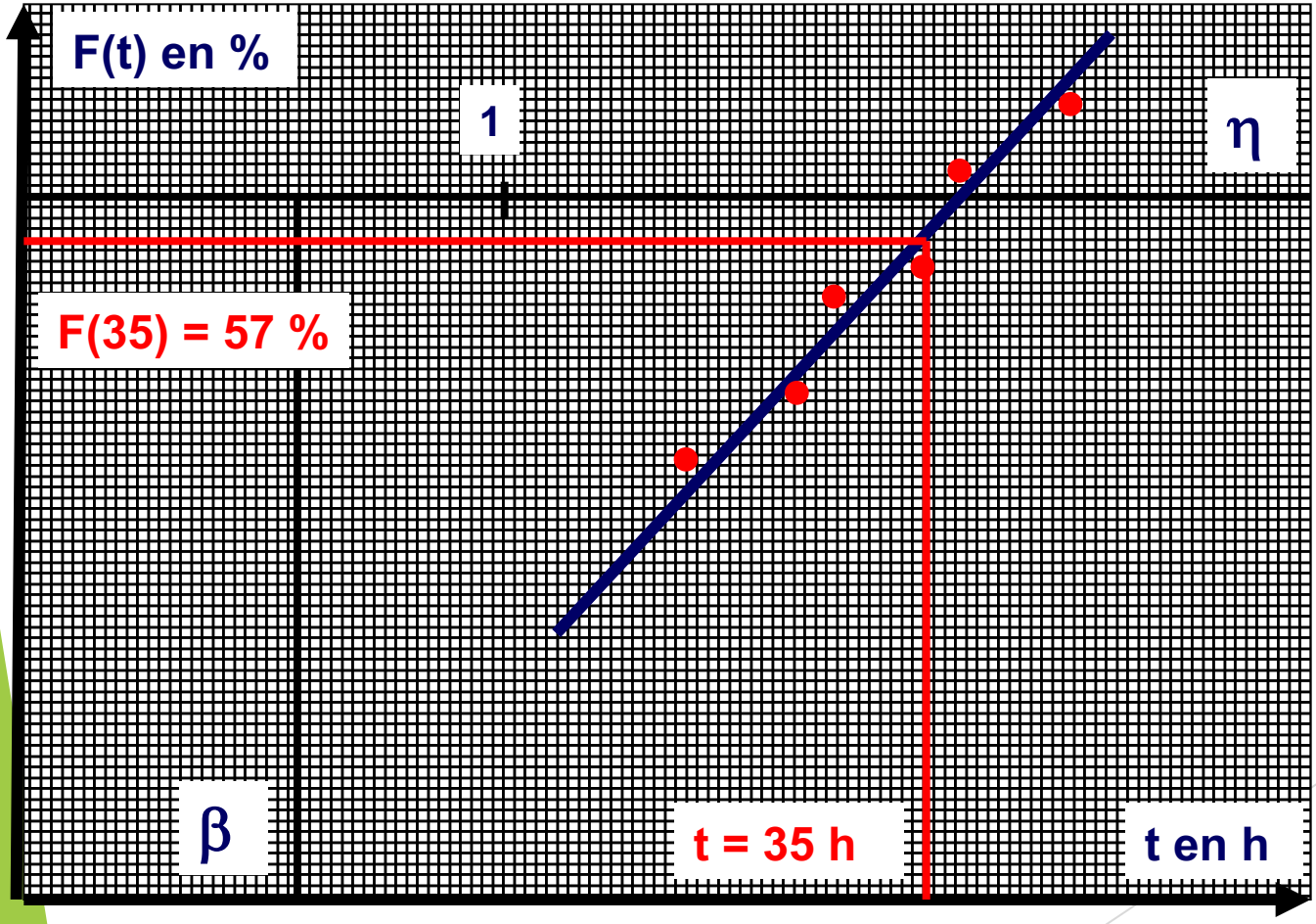
Quelle est la probabilité d'avoir une défaillance avant 10h ?



F(10) = 2,7 %

Exploitation du graphique de Weibüll

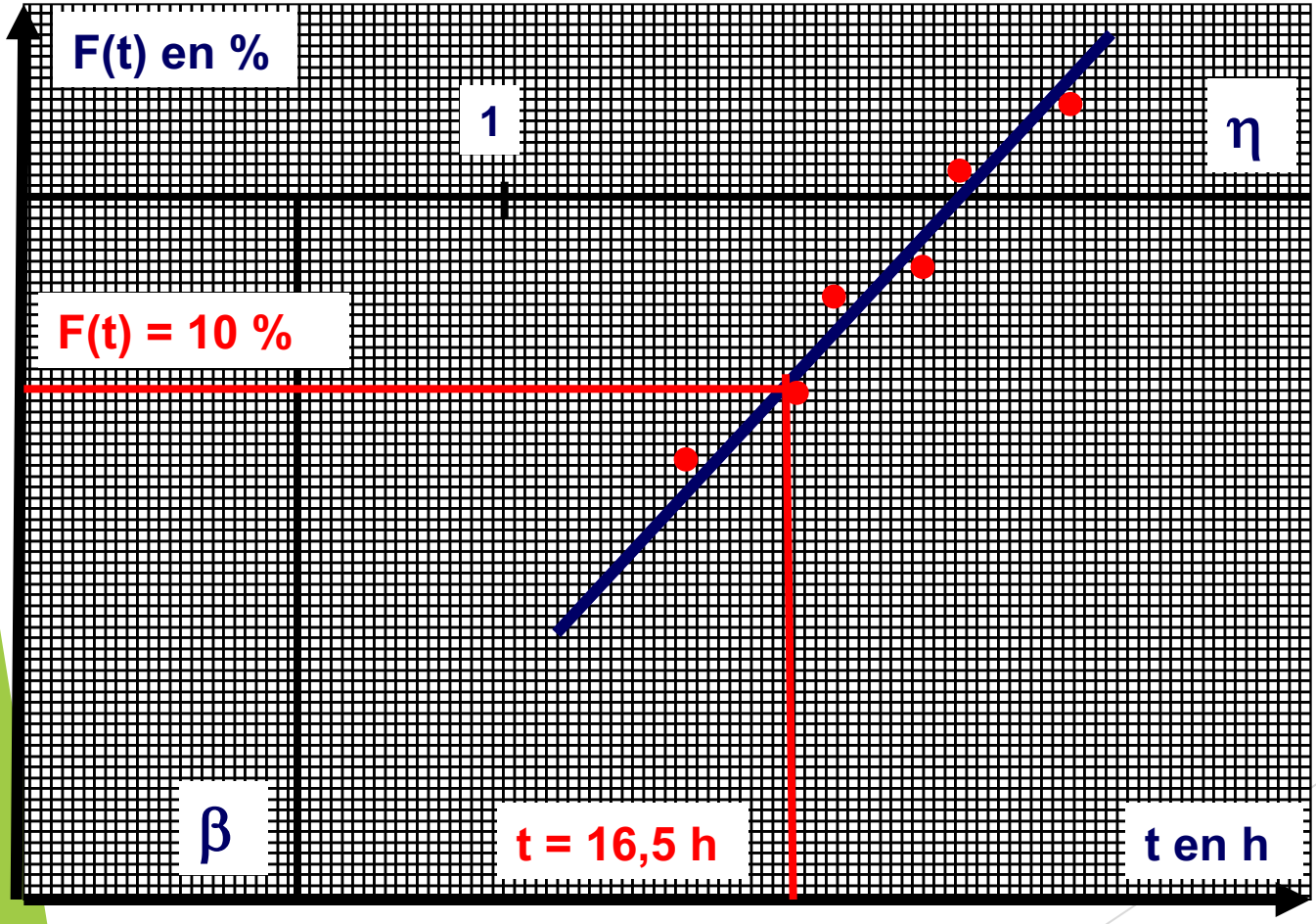
Quelle est la probabilité de ne pas avoir de défaillance avant 35h ?



F(35) = 57 % ➔
R(35) = 100 – 57 = 43 %

Exploitation du graphique de Weibüll

Quelle est durée de vie du composant pour une fiabilité de 90% ?



R(t) = 90% ➔ F(t) = 10 %

t = 16,5 h

Pourquoi déterminer $\lambda(t)$ ou $F(t)$?

- Optimisation des interventions systématiques
- Optimisation de la gestion des rechanges par la connaissance des lois de consommation (qui coïncident avec les lois de défaillance)
- Gestion d ’équipement par l ’indicateur *disponibilité* en connaissant *MTTR* et *MTBF* d ’un équipement
- Constitution de base de données
- Mise en place de la MBF (Maintenance Basée sur la Fiabilité)

Série N° 5

Méthode analytique pour déterminer les deux paramètres (β, η, γ=0) de la loi de Weibull

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \Leftrightarrow \ln\left(1 - F(t)\right) = -\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(1 - F(t)\right) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(1 - F(t)\right)\right) = \beta \ln\frac{t}{\eta}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(1 - F(t)\right)\right) = \beta \ln t - \beta \ln \eta$$

$$\Leftrightarrow Y = \beta X - \beta \ln \eta$$

L'équation est sous la forme de Y=aX+b

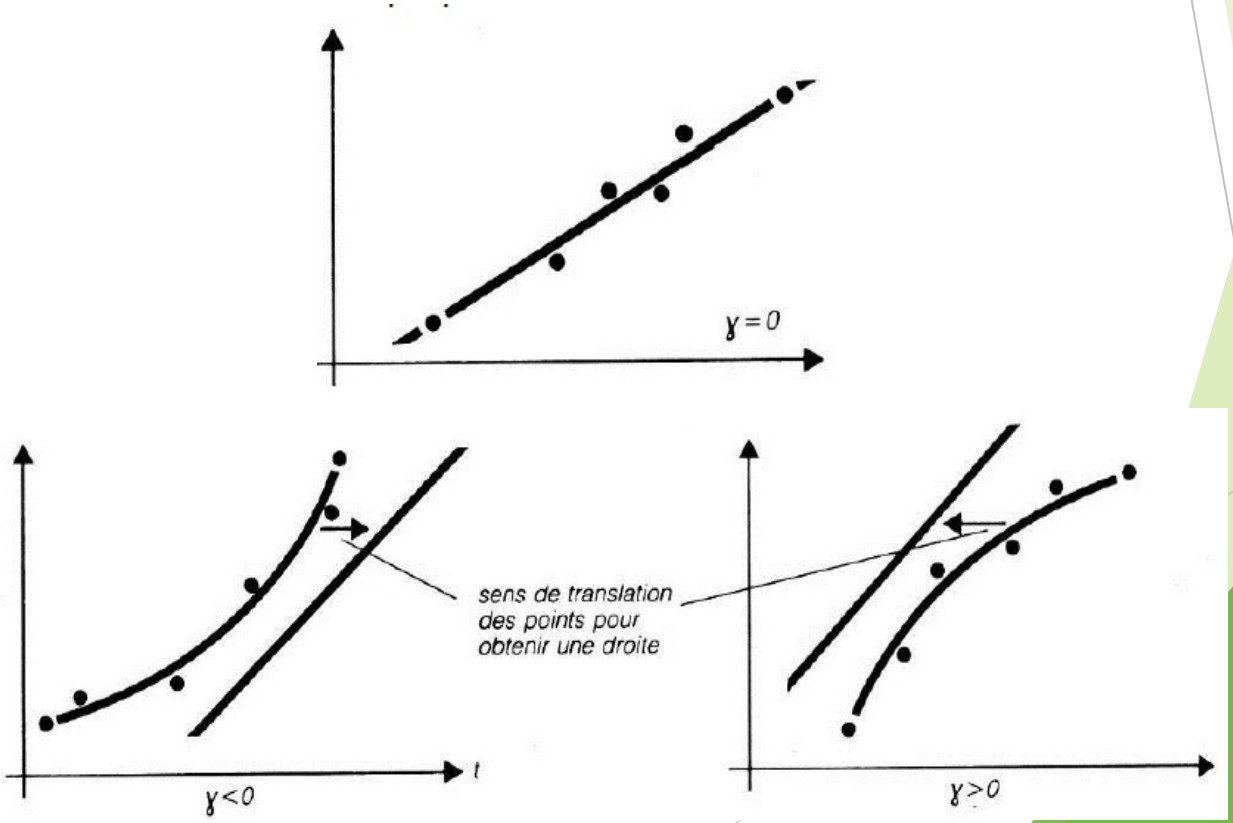
β =a et

$-\beta \ln(\eta)=b \rightarrow \ln(\eta)=-b/\beta \rightarrow \eta=\exp(-b/\beta)$

On peut utiliser Excel pour déterminer les paramètres de la droite β, η.

Méthode graphique pour déterminer les trois paramètres (β, η, γ) de la loi de Weibull

Si le coefficient γ n'est pas nul (cas assez exceptionnel), la représentation n'est pas linéaire. Pour déterminer γ, il faut faire un changement de variable ($t - \gamma$) ; on obtient alors une droite. Il faut donc translater tous les points d'une valeur égale à γ, mais qui, du fait de la non-linéarité de la fonction logarithme, ne correspond pas à la même distance pour chaque point.

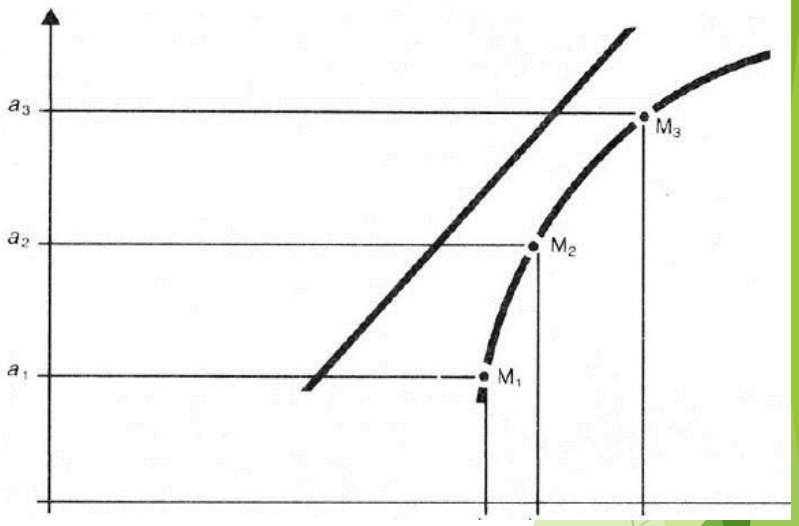


Méthode analytique pour déterminer les deux paramètres (β, η, γ non nulle) de la loi de Weibull

Méthode de calcul pour obtenir la valeur de γ :

Prendre sur l'axe F(t) 3 points équidistants a1, a2, a3. Ces 3 points permettent d'obtenir les abscisses correspondantes au niveau des TBF : t1, t2, t3. Sur la courbe, on obtient donc les points M1, M2, M3 de coordonnées :

En effectuant le changement de variable ($t - \gamma$), ces 3 points sont translatés et on obtient donc une droite. Les points M1, M2 et M3 ont alors les coordonnées suivantes :



$$M1\begin{vmatrix} t1 \\ \log(t1-\gamma) \end{vmatrix} \quad M2\begin{vmatrix} t2 \\ \log(t2-\gamma) \end{vmatrix} \quad M3\begin{vmatrix} t3 \\ \log(t3-\gamma) \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M1.M2}\begin{vmatrix} t2-t1 \\ \log(t2-\gamma)-\log(t1-\gamma) \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{M2.M3}\begin{vmatrix} t3-t2 \\ \log(t3-\gamma)-\log(t2-\gamma) \end{vmatrix}$$

Méthode analytique pour déterminer les deux paramètres (β, η, γ non nulle) de la loi de Weibull

Comme sur l'axe des F(t), les points sont équidistants, on a donc l'égalité suivante :

$$\log(t2-\gamma)-\log(t1-\gamma)=\log(t3-\gamma)-\log(t2-\gamma)$$

$$\Rightarrow \log\frac{t2-\gamma}{t1-\gamma}=\log\frac{t3-\gamma}{t2-\gamma}\Rightarrow\frac{t2-\gamma}{t1-\gamma}=\frac{t3-\gamma}{t2-\gamma}\Rightarrow(t2-\gamma).(t2-\gamma)=(t3-\gamma).(t1-\gamma)$$

$$\Rightarrow t2^2-2.t2.\gamma+\gamma^2=t3.t1-\gamma.t3-\gamma.t1+\gamma^2\Rightarrow t2^2-2.t2.\gamma=t3.t1-\gamma.t3-\gamma.t1$$

$$\Rightarrow \gamma.(t3+t1-2.t2)=t3.t1-t2^2$$

Ce qui permet d'obtenir la valeur de gamma :

$$\boxed{\gamma=\frac{t_1.t_3-t_2^2}{t_1+t_3-2.t_2}}$$

Série N° 6



Méthode d'optimisation de la maintenance préventive systématique

Problématique

Système réparable avec un composant « fragile » interchangeable

Loi de fiabilité R(t) du composant connue (les valeurs de γ, β,η et la MTBF sont données par la loi de Weibüll)

Cout direct « p » du correctif connu, égal au cout de l'intervention préventive de remplacement du composant

Cout indirect « P » des conséquences de la défaillance connu

A quelle périodicité θ doit-on effectuer le remplacement préventif du composant ?

Problématique

Questions qui reviennent sans cesse dans un service maintenance pour un équipement

Faut-il choisir de garder le correctif ou de mettre en œuvre un préventif systématique ?

La mise en place d'une maintenance préventive systématique supprime-t-elle tous les risques de défaillance?

Evaluation du cout d'une intervention corrective

Cout total d'une intervention corrective

- C1 = Couts directs + couts indirects = p + P

Cout par unité d'usage (heure, tonne, km, etc.) d'une intervention corrective

- C1 = (p + P) / MTBF

Evaluation du cout d'une intervention préventive

Ce cout est composé :

- Du cout direct de l'intervention « p »
- Du cout du correctif résiduel lié au risque de défaillance avant θ : P.[1-R(t)]

Cout total d'une intervention préventive

- C2 = Couts directs + couts correctif résiduel = p + P.[1-R(t)]

Cout par unité d'usage (heure, tonne, km, etc.) d'une intervention préventive

- C2 = (p + P.[1-R(t)]) / MTBF

Intérêt économique de la mise en place d'une maintenance préventive systématique

Pour que l'opération présente ,un intérêt économique, il faut :

$C2(\theta) < C1$

Soit encore :

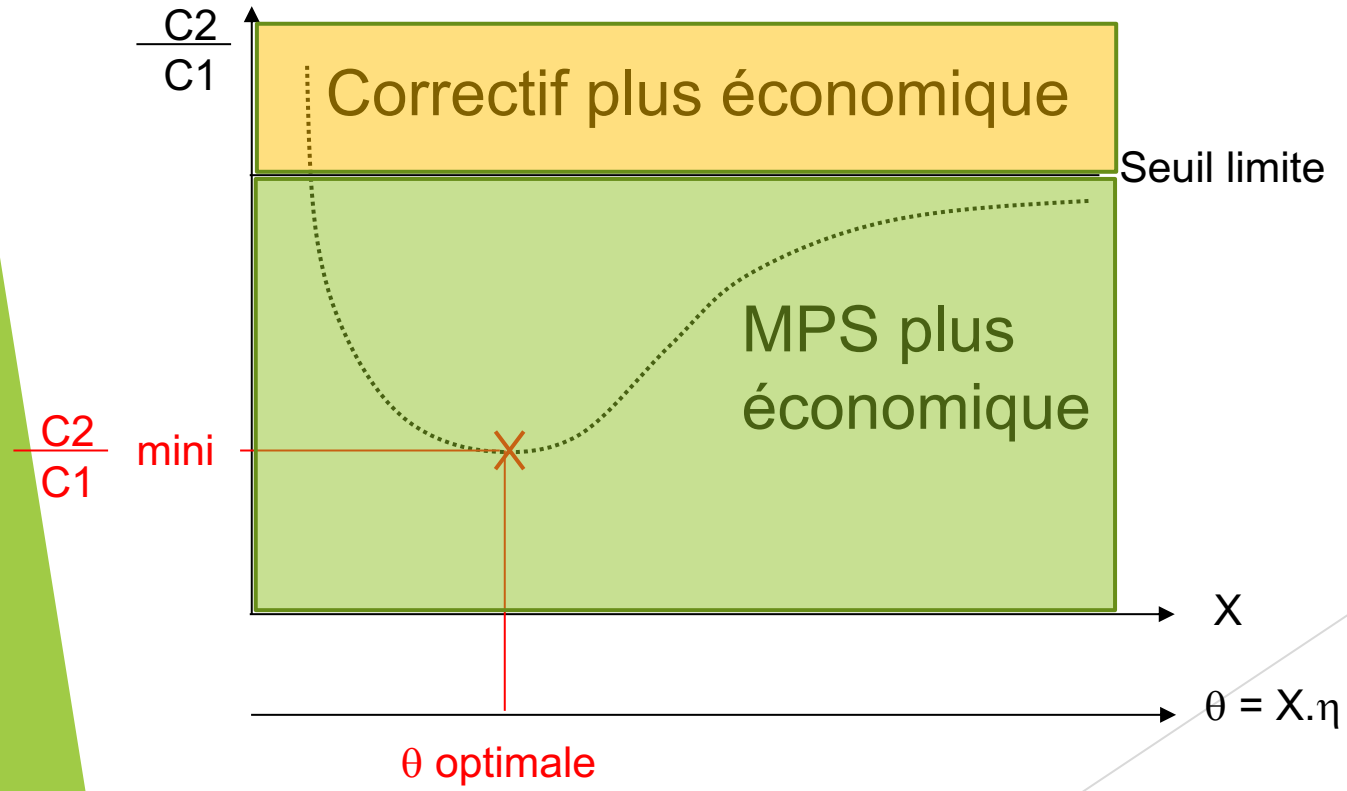
$(C2(\theta) / C1) < 1$

On compare les coûts C2 et C1 lorsque θ varie en traçant la courbe C2/C1

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{p + P.(1 - R(\theta))}{MTBF_{préventif}} \cdot \frac{MTBF_{correctif}}{p + P}$$

En posant : $X = \frac{\theta}{\eta}$ $r = \frac{P}{p}$

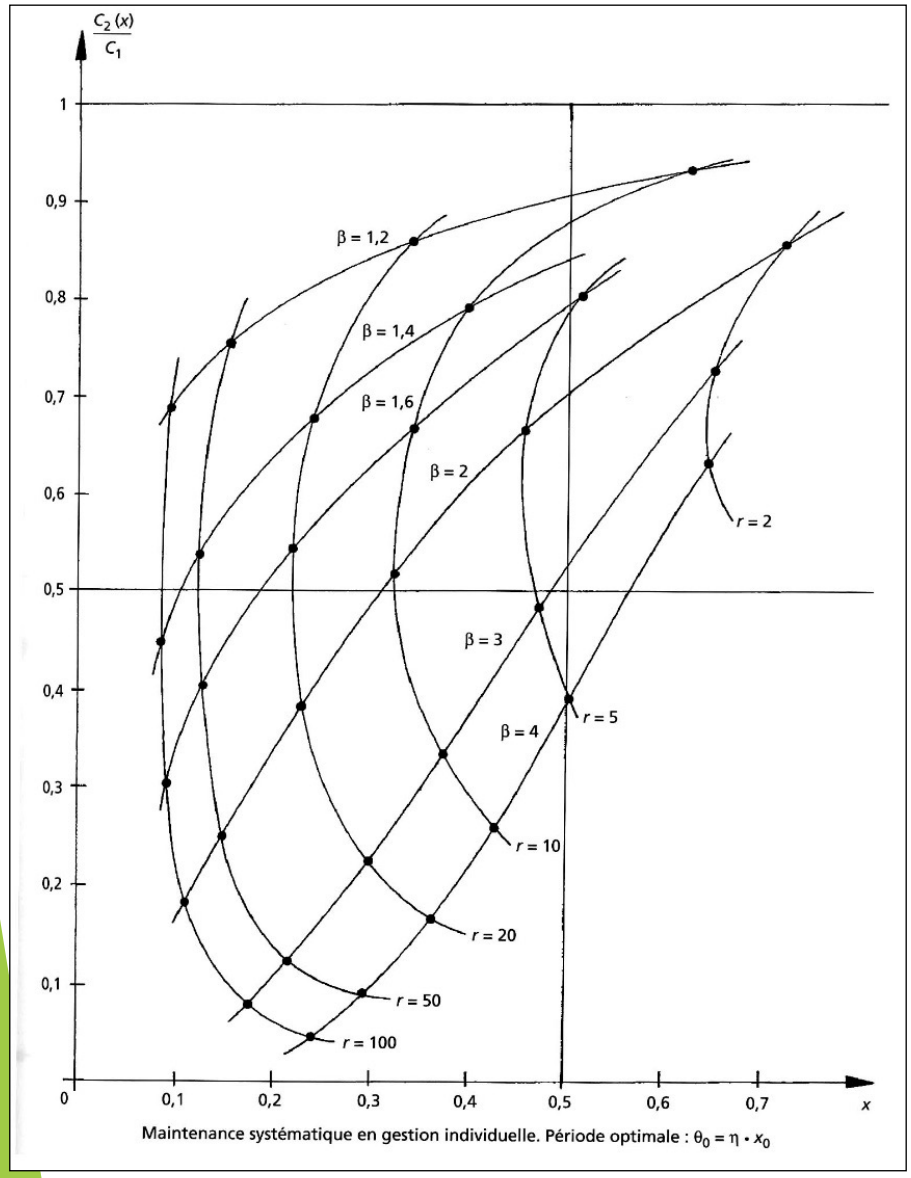
On obtient, en faisant varier θ, la courbe :



Des abaques donnent les résultats du minimum du rapport C_2/C_1 pour différentes valeurs de r et de β

Recherche de la périodicité θ

➔ ABAQUE DE KELLY



Maintenance systématique en gestion individuelle. Période optimale : $\theta_0 = \eta \cdot x_0$

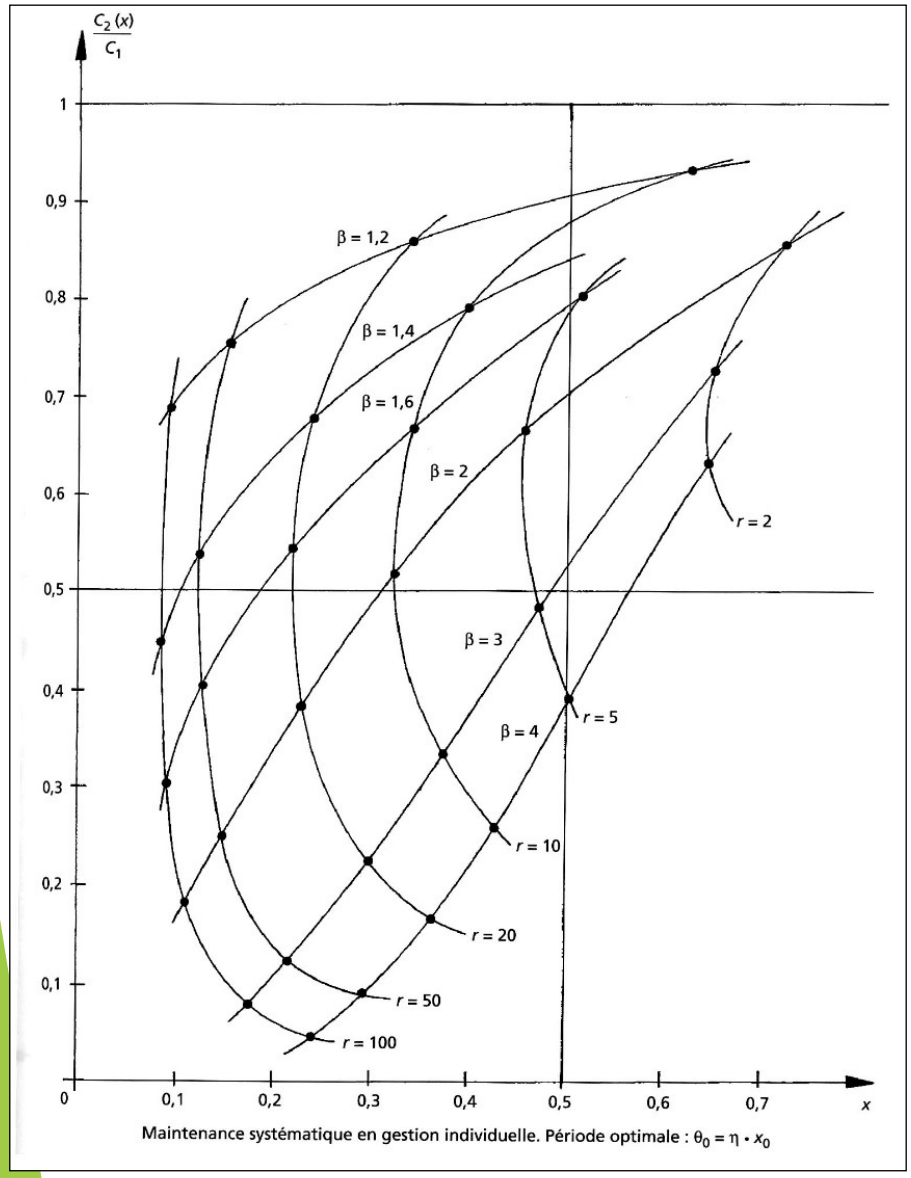
Cette abaque prend en compte le fait que C2(x)/C1 est dépendant de 2 paramètres:

- β Paramètre technique qui caractérise la forme de la distribution.
- « r » ratio de criticité « P / p » économique entre coûts Indirects et coûts directs.

La valeur « x » sur l'axe des abscisses var permettre de connaitre la périodicité optimale θ_0, grâce au paramètre η.
$\theta_0 = x_0.\eta$

La valeur sur l'axe des ordonnées va permettre de calculer en % le gain obtenu par la mise en place du préventif :
Gain = 1 – valeur lue sur l'axe des ordonnées

Recherche de la périodicité θ
➔ ABAQUE DE KELLY



Maintenance systématique en gestion individuelle. Période optimale : $\theta_0 = \eta \cdot x_0$

METHODE D'UTILISATION

Calculer le ratio « r = P / p »

➔ il donne la courbe « r »

Identifier le paramètre « β » de la loi de Weibüll

➔ il donne la courbe « β »

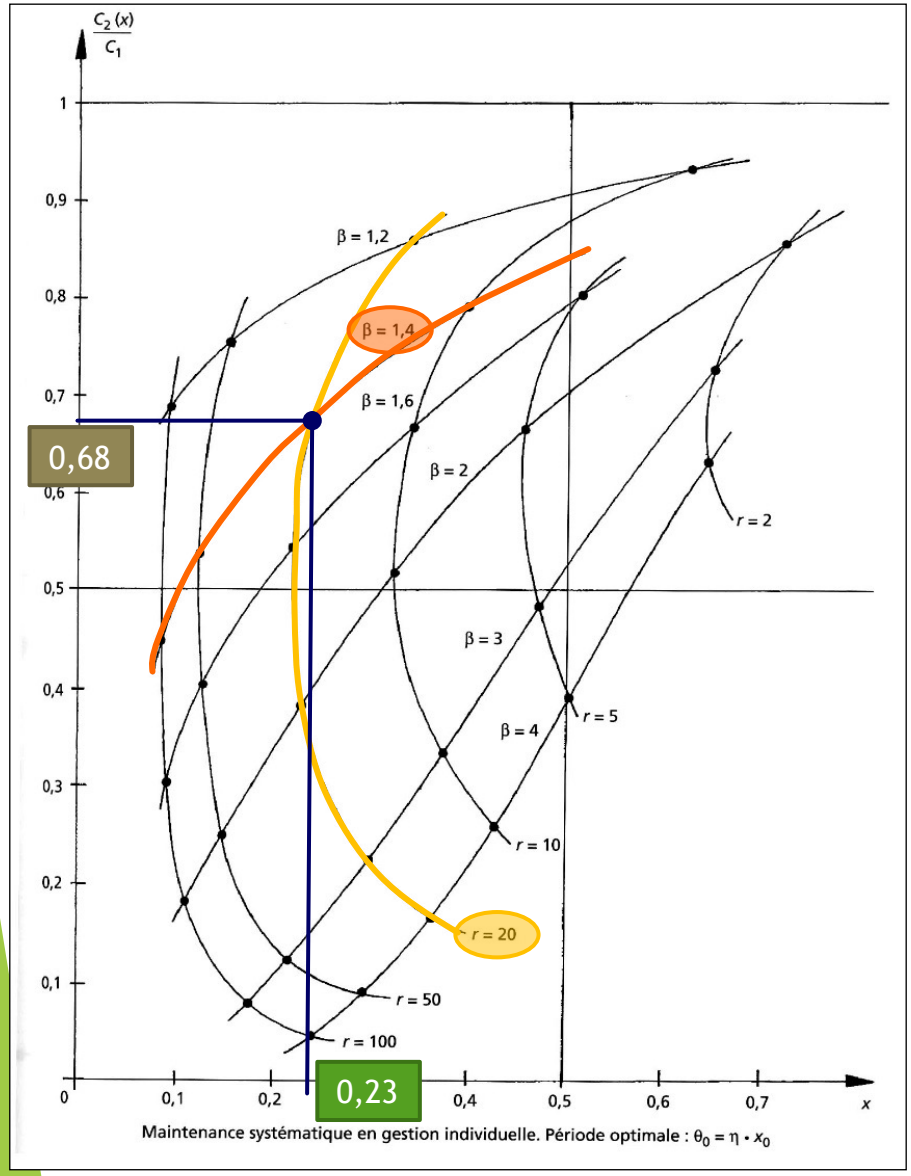
Au point d'intersection des 2 courbes « r » et « β », tracer une droite horizontale et verticale

La droite horizontale va permettre d'estimer le gain en % obtenu par la mise en place du préventif

La droite verticale va permettre de déterminer le paramètre « x_0 »

On en déduit la périodicité optimale de remplacement par la relation :
$\theta_0 = x_0.\eta$

Recherche de la périodicité θ
➔ ABAQUE DE KELLY



Exemple :

p = 40€ - P = 800€ - β = 1,4 - η = 700h

Calculer le ratio « r = P / p »

r = 800 / 40 = 20

Identifier le paramètre « β » de la loi de Weibüll

β = 1,4

Au point d'intersection des 2 courbes « r » et « β », tracer une droite horizontale et verticale

La droite horizontale va permettre d'estimer le gain en % obtenu par la mise en place du préventif

Valeur lue = 0,68 ➔ Gain = 1 - 0,68 = 0,32 = 32%

La droite verticale va permettre de déterminer le paramètre « x_0 »

X_0 = 0,23

On en déduit la périodicité optimale de remplacement par la relation : $\theta_0 = x_0.\eta$

$\theta_0 = x_0.\eta$ = 0,23 x 700 = 161 heures

Diagramme de fiabilité

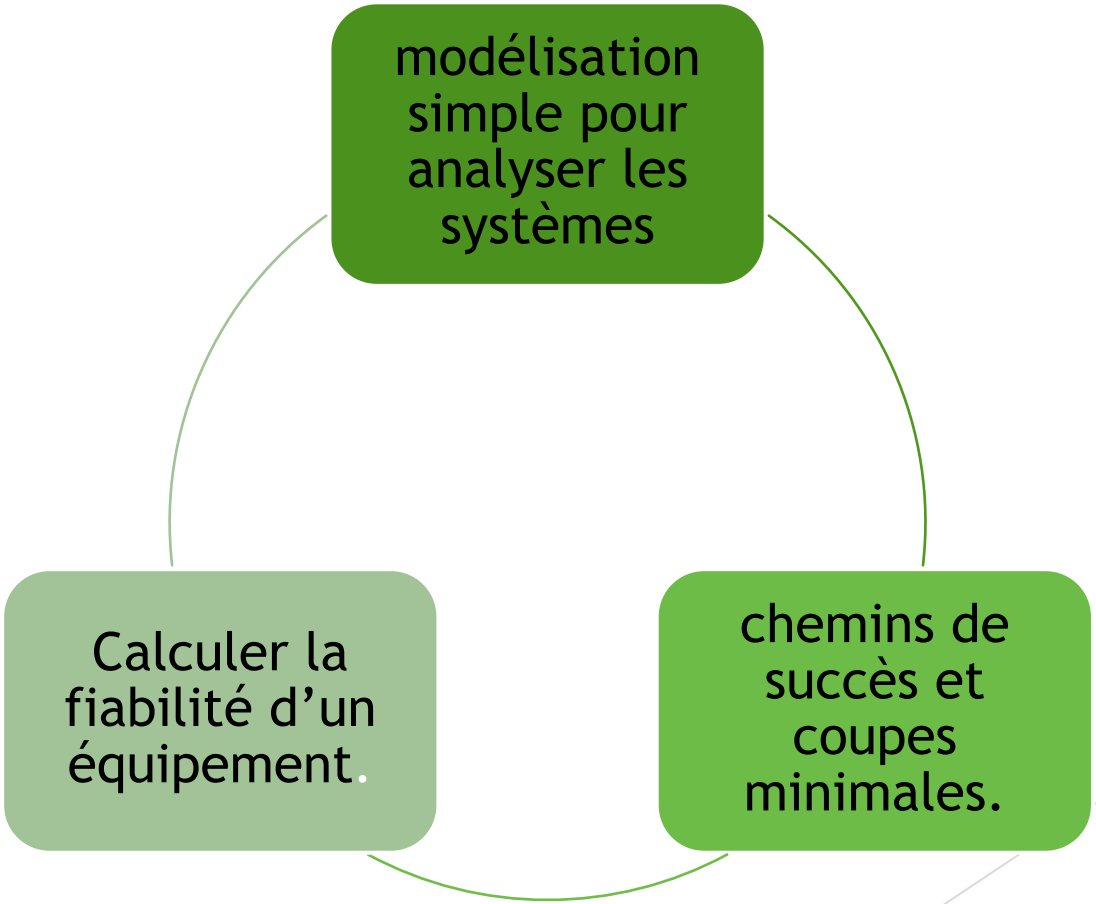
Plan

1. Objectifs
2. BDF
3. BDF : Chemins de succès
4. BDF : Coupe & propriétés
5. Calcul de probabilité
6. Exemple
7. Etude de cas

Objectifs



Objectifs


modélisation simple pour analyser les systèmes
chemins de succès et coupes minimales.
Calculer la fiabilité d'un équipement.

Définition



Définition

Diagramme de fiabilité est un modèle qui permet de représenter le comportement d'un système sous une vue fonctionnelle.

- La méthode d'analyse par diagramme de fiabilité repose sur :

- Une décomposition du système en sous-systèmes, chaque entité est modélisée par des blocs (Les sous-systèmes, Les fonctions, Les composants)

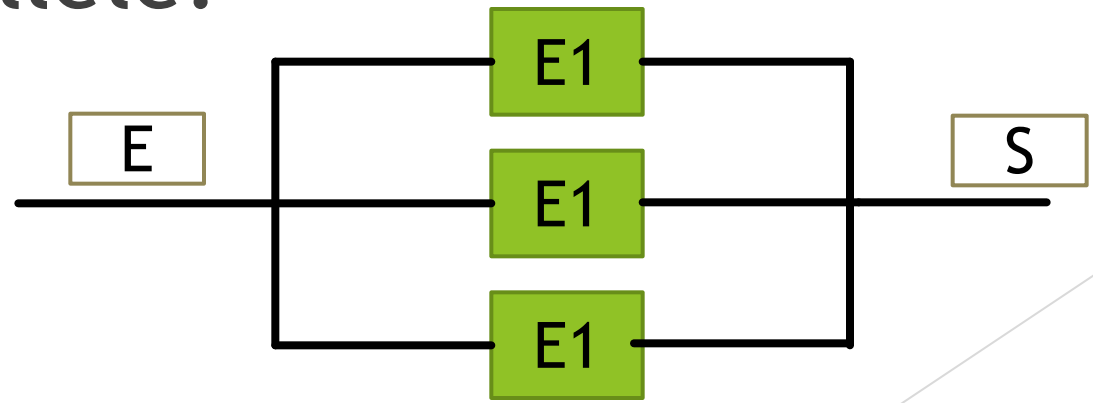
Ces blocs modélisent leur participation au succès de la mission.

Dispositions

- Série:



- Parallèle:



Chemin de succès



Chemin de succès

Un Lien ou chemin de succès est un ensemble d'entites dont le fonctionnement assure le succès de la mission du système.

Un chemin de succès minimal est une des plus petites combinaisons d'entités qui lorsqu'elles sont en fonction permettent d'assurer la fonction requise pour le système.

Les coupes & Propriété

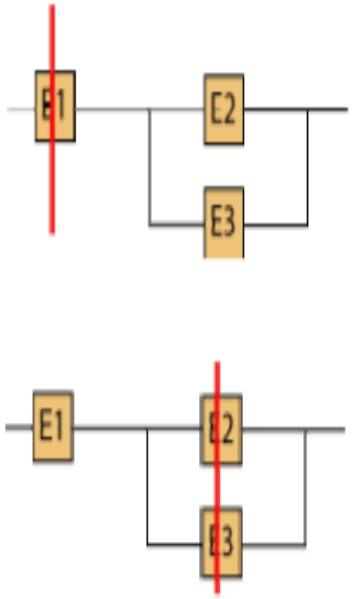


Les coupes

Une coupe est un ensemble de blocs ou d ’entités qui conduit a la panne ou la non réussite de la mission du système si ces blocs ne peuvent plus réaliser leurs fonctions (ex : défaillance de composant).

Une coupe minimale est la plus petite combinaison d ’entités entraînant l ’échec de la mission du système (elle ne contient aucune autre coupe)





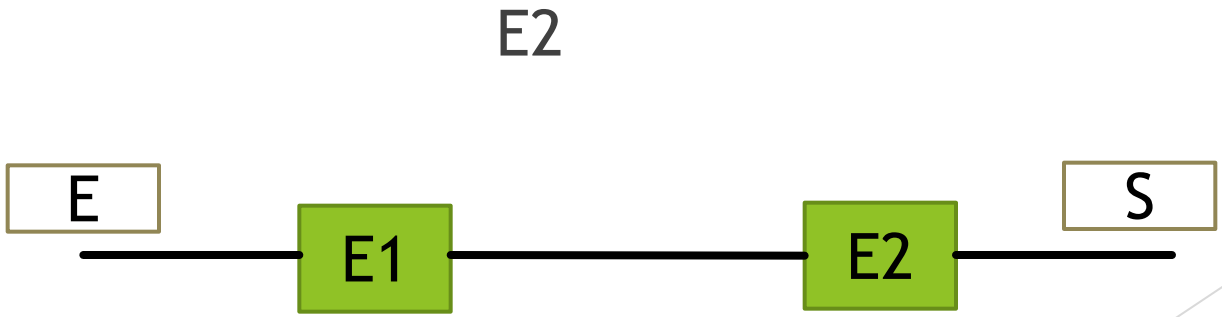
Propriétés

- Le diagramme série :

La panne de l ’un ou de l ’autre des éléments entraîne la panne du système

-Chemins de succès ou liens minimaux : E1, E2.

-Coupes minimales : E1



Propriétés

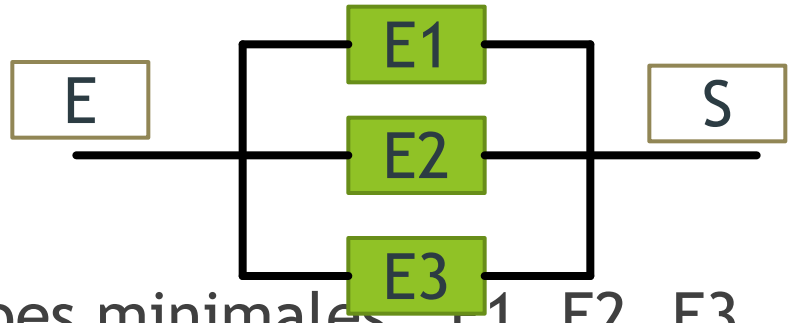
- Le diagramme parallèle (ou redondance active)

La panne de tous les éléments entraîne la panne du système. Si un seul des éléments fonctionne alors il conduit au fonctionnement du système.

Chemins de succès ou liens minimaux : E1

E2

E3



Coupes minimales : E1, E2, E3

Propriétés

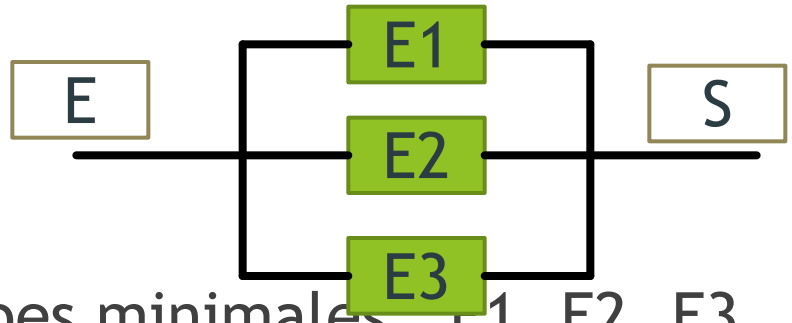
- Le diagramme parallèle (ou redondance active)

La panne de tous les éléments entraîne la panne du système. Si un seul des éléments fonctionne alors il conduit au fonctionnement du système.

Chemins de succès ou liens minimaux : E1

E2

E3



Coupes minimales : E1, E2, E3

Propriétés

- Le diagramme série-parallèle

Chemins de succès ou liens minimaux : E1, E2

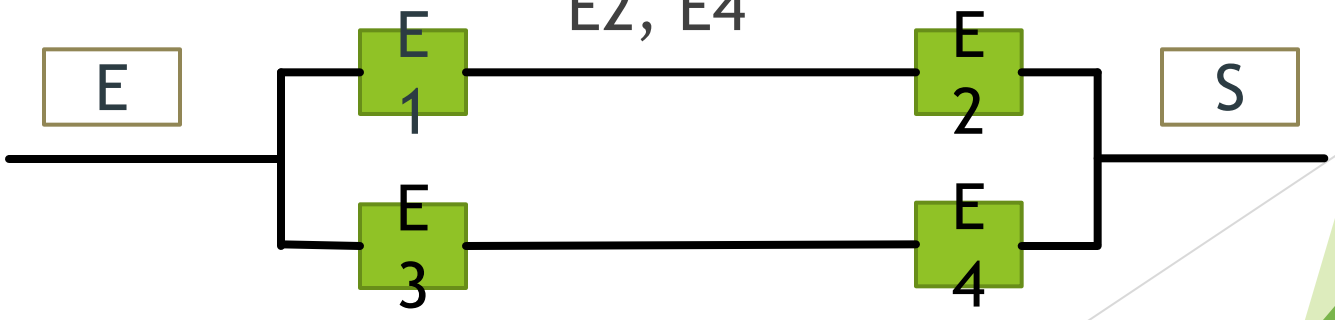
E3, E4

Coupes minimales : E1, E3

E1, E4

E2, E3

E2, E4



Propriétés

- Le diagramme parallèle-série

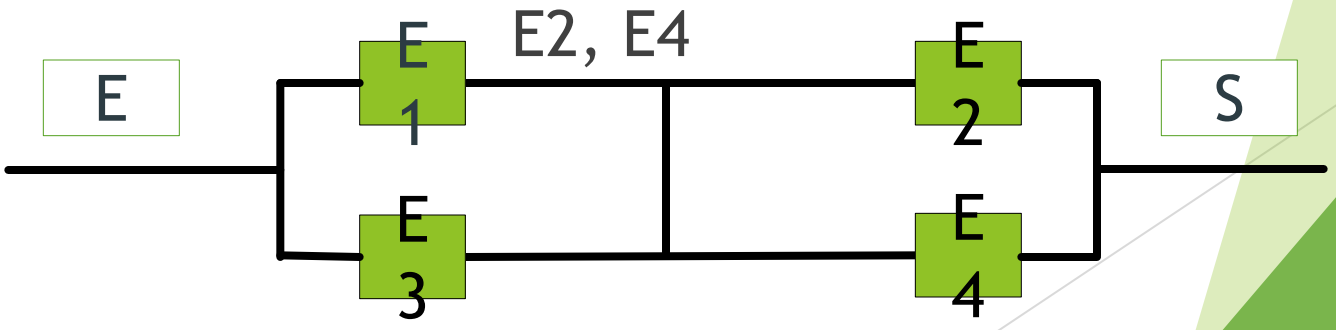
Chemins de succès ou liens minimaux : E1, E2

E1, E4

E2, E3

E3, E4

Coupes minimales : E1, E3



Calcul de probabilités



Calcul de probabilités

- Blocs en Série:

N composants en séries

Ei le composants i fonctionne

Rs= P(E1∩E2∩… ∩En)

A cause de l'indépendence

$$P(E1 \cap E2 \cap \dots \cap En) = \prod_1^n P(Ei)$$

En notons Ri=P(Ei), On obtient:

$$Rs = \prod_1^n Ri$$

On remarque que Rs<min(Ri). Le système est moins faible que sa composante la moins.

Calcul de probabilités

- Blocs en parallèle :

N composants en parallèle

Ei le composants i fonctionne

Rs= P(E1UE2U… UEn)

Le système est en panne si tout les composants sont en panne:

$$1\text{-}R(p)= \prod_1^n 1 - R(i)$$

Calcul de probabilités

- Blocs en Série parallèle:

Décomposition récursive: un système série- parallèle (SP) est soit: -Un bloc isolé

-Plusieurs sous-systèmes SP en série

-Plusieurs sous-systèmes SP en parallèle

Utiliser la décomposition récursive de la construction pour obtenir la fiabilité.

Exemple simple: n étages en série, chaque étage composé de m composants en parallèle tous identiques:

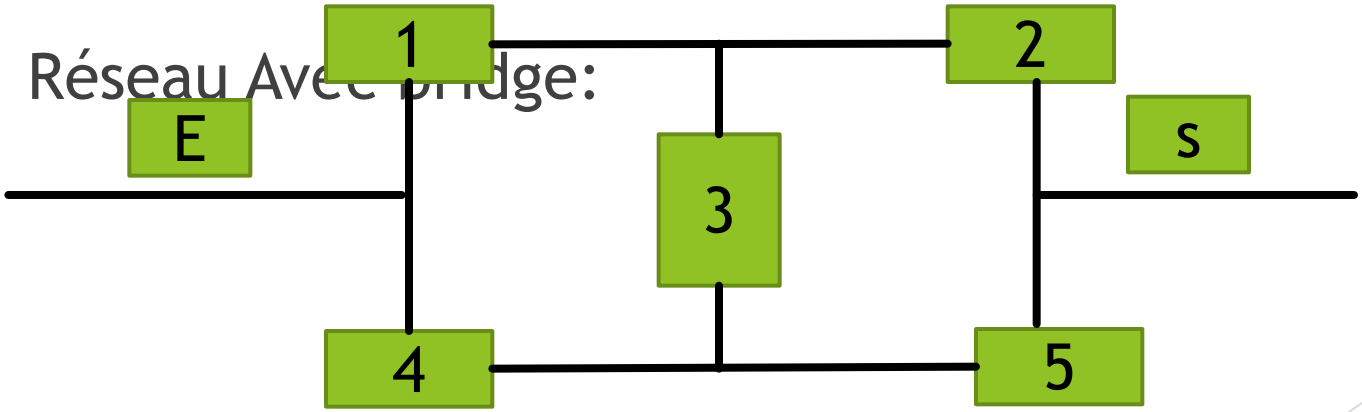
$$Rsp=(1-(1-R)^m)^n$$

Calcul de probabilités

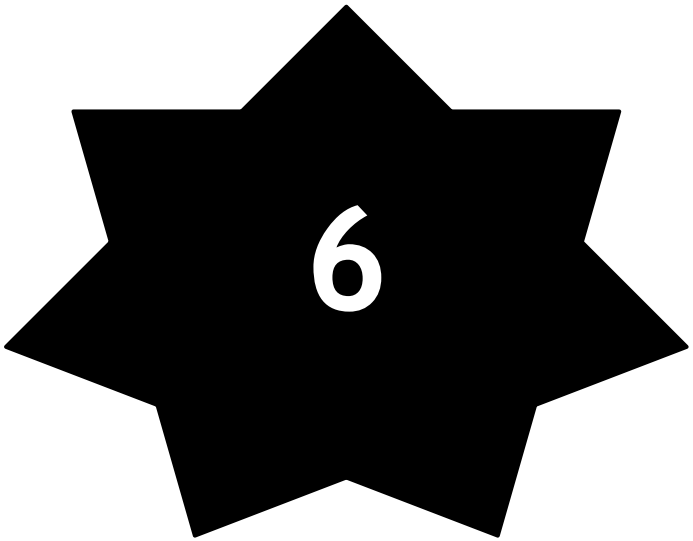
- Système Non série-parallèles:

On ne peut plus utiliser la décomposition SP.
On peut énumérer et construire la table booléenne.

Réseau Avec bridge:

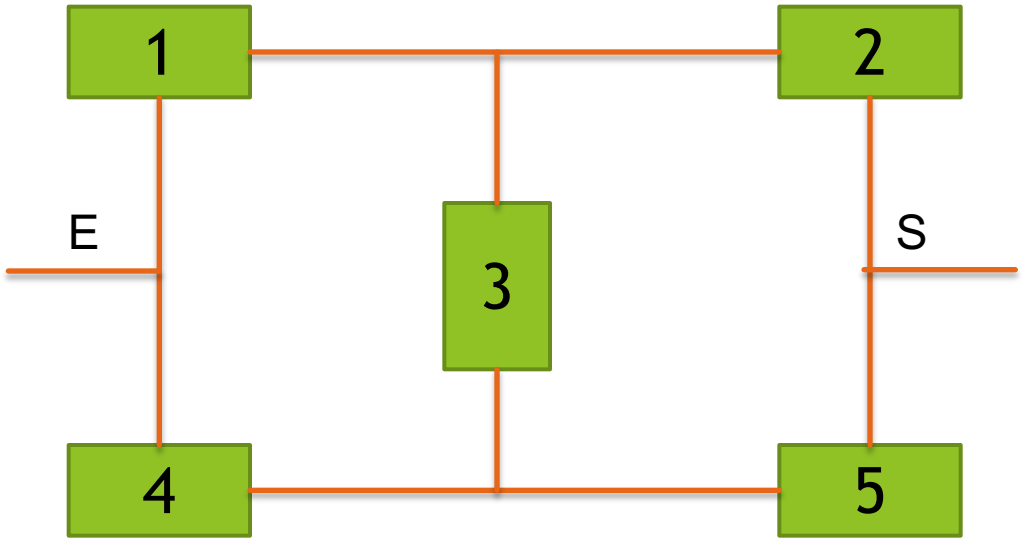


Exemple



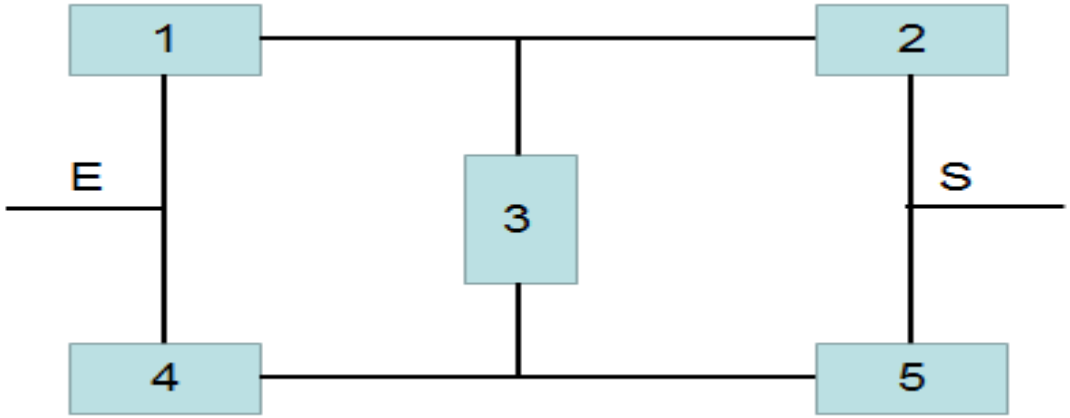
Exemple

- Réseau bridge



Exemple

- **Etapes**
- Examiner tous les cas UP et DOWN pour tous les composants Dans chaque cas, évaluer si le système est UP ou DOWN Calculer les probabilités de chaque cas (facile, c'est le produit des probabilités élémentaires à



P

le système est UP

Exemple

1	2	3	4	5	Bridge	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	0	
0	0	0	1	1	1	(1-R1)(1-R2)(1-R3)R4R5
0	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	
0	0	1	1	1	1	(1-R1)(1-R2)R3R4R5
0	1	0	0	0	0	
0	1	0	0	1	0	
0	1	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	(1-R1)R2(1-R3)R4R5

Exemple

1	2	3	4	5	Bridge	
0	1	1	0	0	0	
0	1	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	1	(1-R1)R2R3R4(1-R5)
0	1	1	1	1	1	(1-R1)R2R3R4R5
1	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	0	
1	0	0	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	R1(1-R2)(1-R3)R4R5
1	0	1	0	0	0	
1	0	1	0	1	1	R1(1-R2)R3(1-R4)R5
1	0	1	1	0	0	
1	0	1	1	1	1	R1(1-R2)R3R4R5

Exemple

1	2	3	4	5	Bridge	
1	1	0	0	0	1	R1R2(1-R3)(1-R4)(1-R5)
1	1	0	0	1	1	R1R2(1-R3)(1-R4)R5
1	1	0	1	0	1	R1R2(1-R3)R4(1-R5)
1	1	0	1	1	1	R1R2(1-R3)R4R5
1	1	1	0	0	1	R1R2R3(1-R4)(1-R5)
1	1	1	0	1	1	R1R2R3(1-R4)R5
1	1	1	1	0	1	R1R2R3R4(1-R5)
1	1	1	1	1	1	R1R2R3R4R5

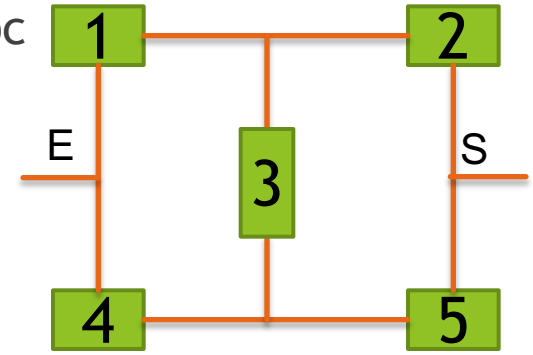
En agrégeant la table et en factorisant:
Rbridge = R1R2+R1(1-R2)(R4R5+R3(1-R4)R5)+(1-R1)R4(R5+(1-R5)R2R3)

Exemple (suite)

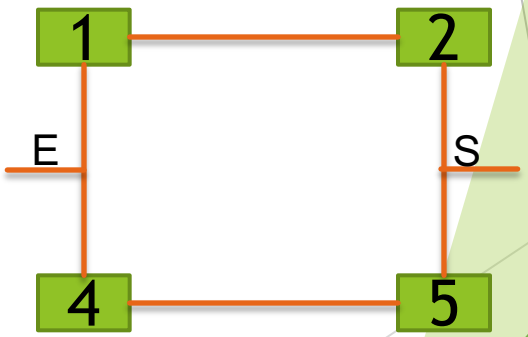
Mais il faut considerer la 2^n configurations s'il y a n objets

On conditionne sur l'état d'un composant (ou de plusieurs composants) pour se ramener à des structures déjà étudiées ou faciles (SP)

Sur l'exemple du bridge,on conditionne sur l'etat du 3 éme bloc



3 Fonctionne



3 ne fonctionne pas

Exemple

- Si le composant 3 est Down ou UP ,on obtient un modele SP
- On applique le théorème de conditionnement et les formules pour les modèles série-parellèles

$$R3_{down}=1-(1-R1R2)(1-R4R5)$$

$$R_{3up}=(1-(1-R1)(1-R2))(1-(1-R4)(1-R5))$$

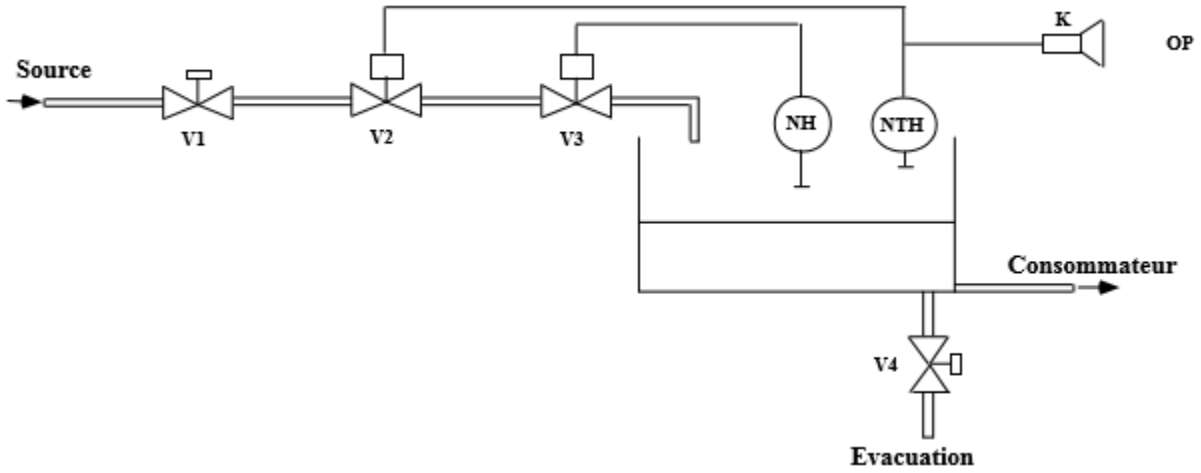
On applique le théorème de conditionnement :

$$Rbridge = R3*Rsup+(1-R3)R3down$$

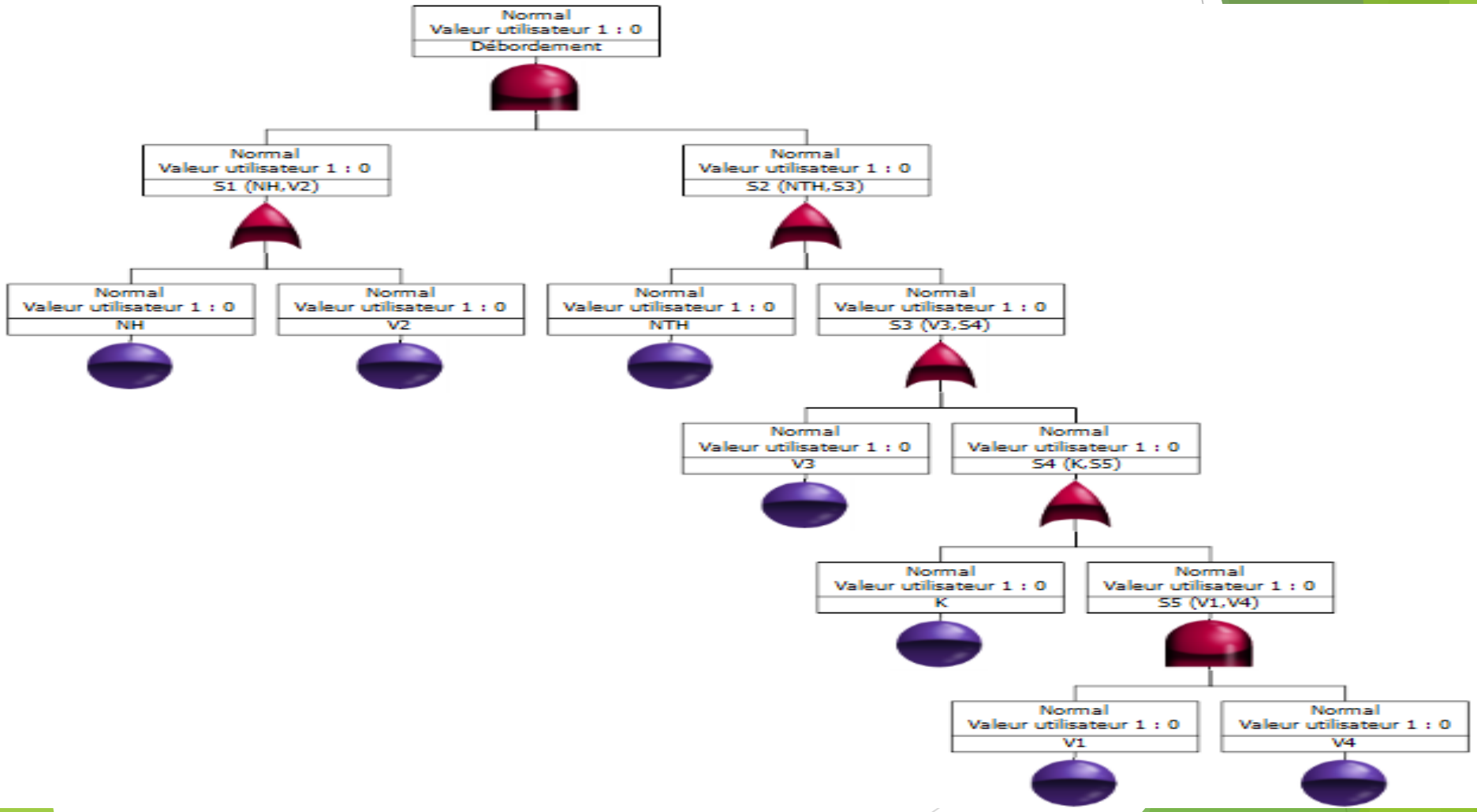
Exemple

On considère un système composé d'un réservoir et d'un dispositif associé destiné à prévenir tout débordement de celui-ci (cf. schéma ci-après). Le sécurité du système est envisagée de la manière suivante :

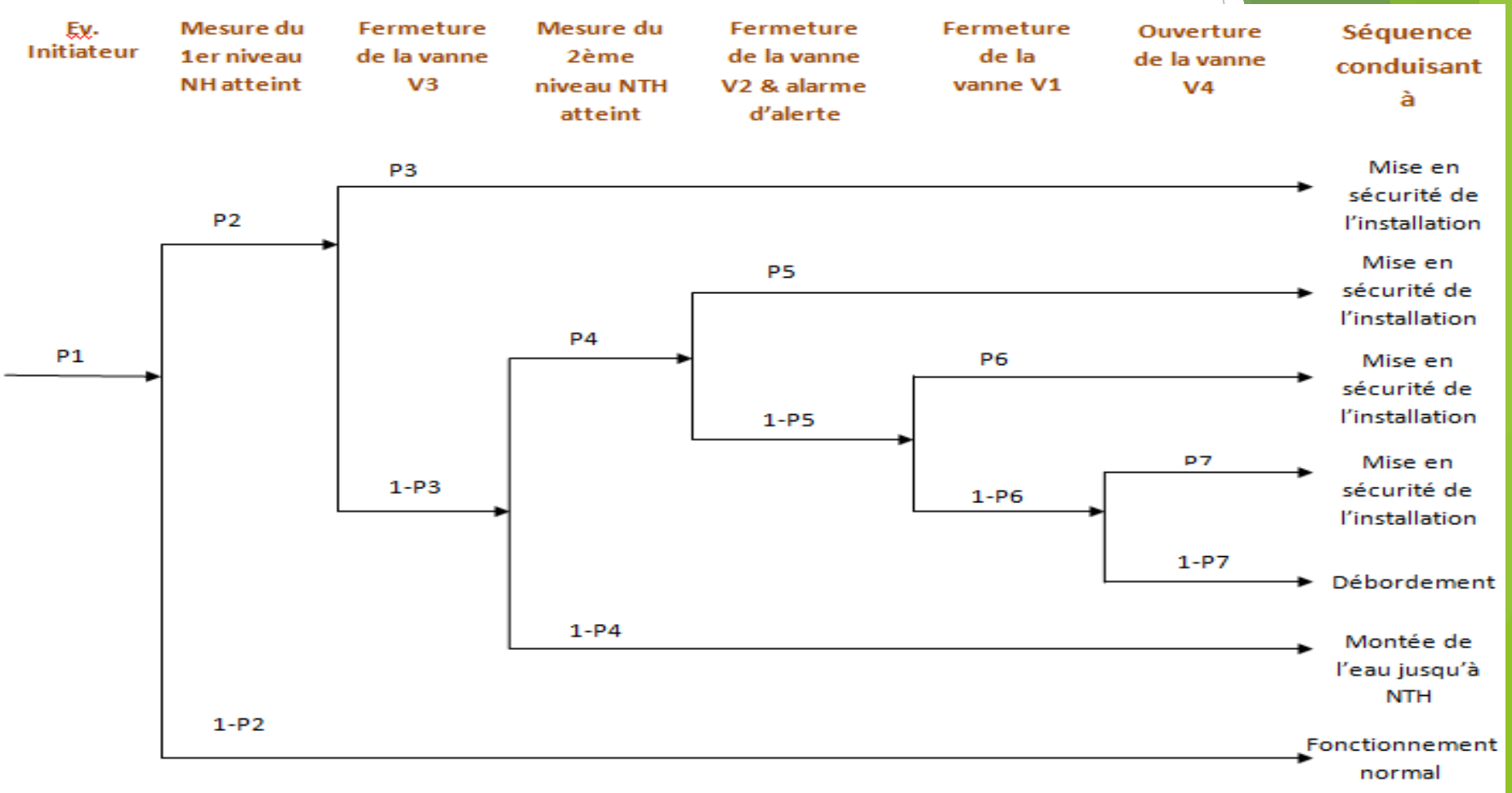
- Dès que le niveau du fluide contenu dans le réservoir atteint un premier seuil, le détecteur NH (Niveau Haut) commande la fermeture de la vanne V3.
- En cas d'échec de l'action précédente un second capteur de niveau NTH (Niveau Très Haut) commande la fermeture de la vanne V2 et alerte un opérateur OP par l'intermédiaire d'un signal d'alarme émis par un klaxon K.
- L'opérateur OP vérifie alors que l'alimentation en fluide est coupée, sinon il ferme la vanne manuelle V1 ou, en dernier recours, ouvre la vanne manuelle d'évacuation V4 qui autorise un débit supérieur à celui des autres vannes.



Arbre de défaillance



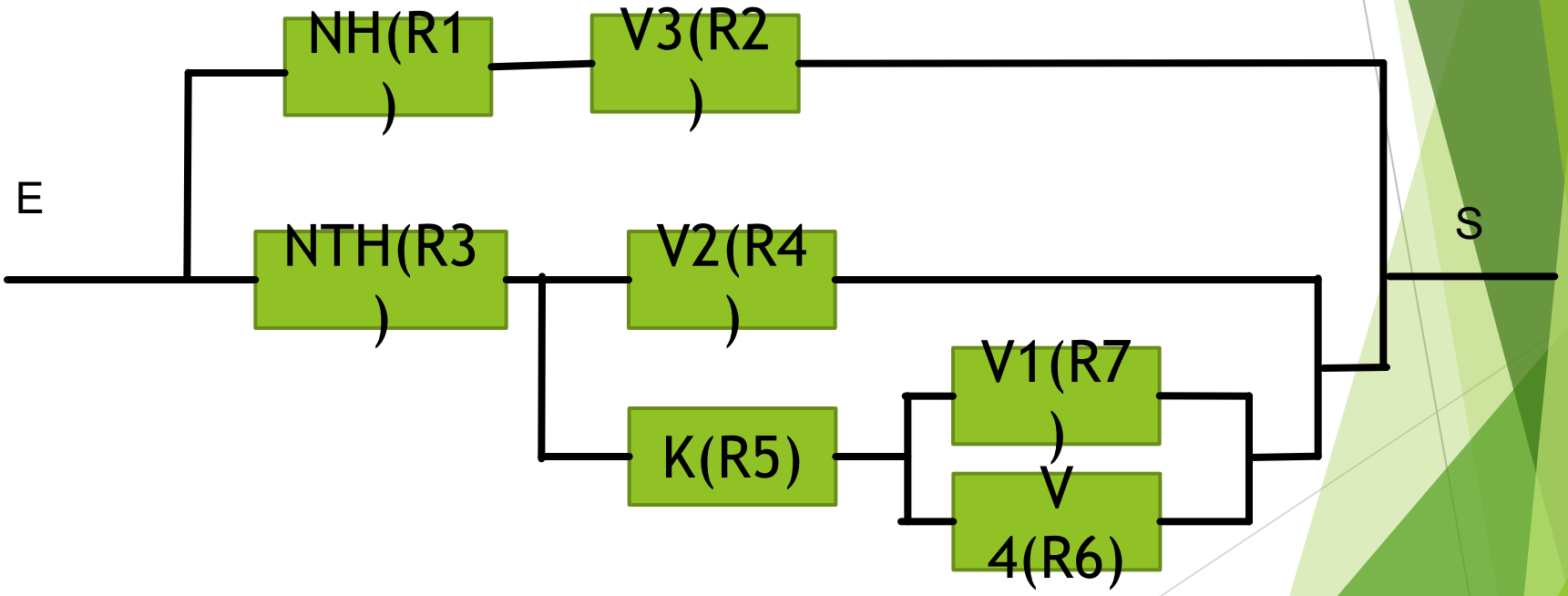
Arbre d'évènement



Chemins et coupes

Chemins de succès	Coupes minimales
NH,V2	NTH,NH
NTH,V3	NTH,V2
NTH,K,V1	
NTH,K,V4	

Diagramme de fiabilité



Exemple

- fiabilité du système:

R=1-(1-R1*R2)(1-NH*(1-(1-R4)(1-K*(1-(1-R7)(1-R6))))

Etude de cas



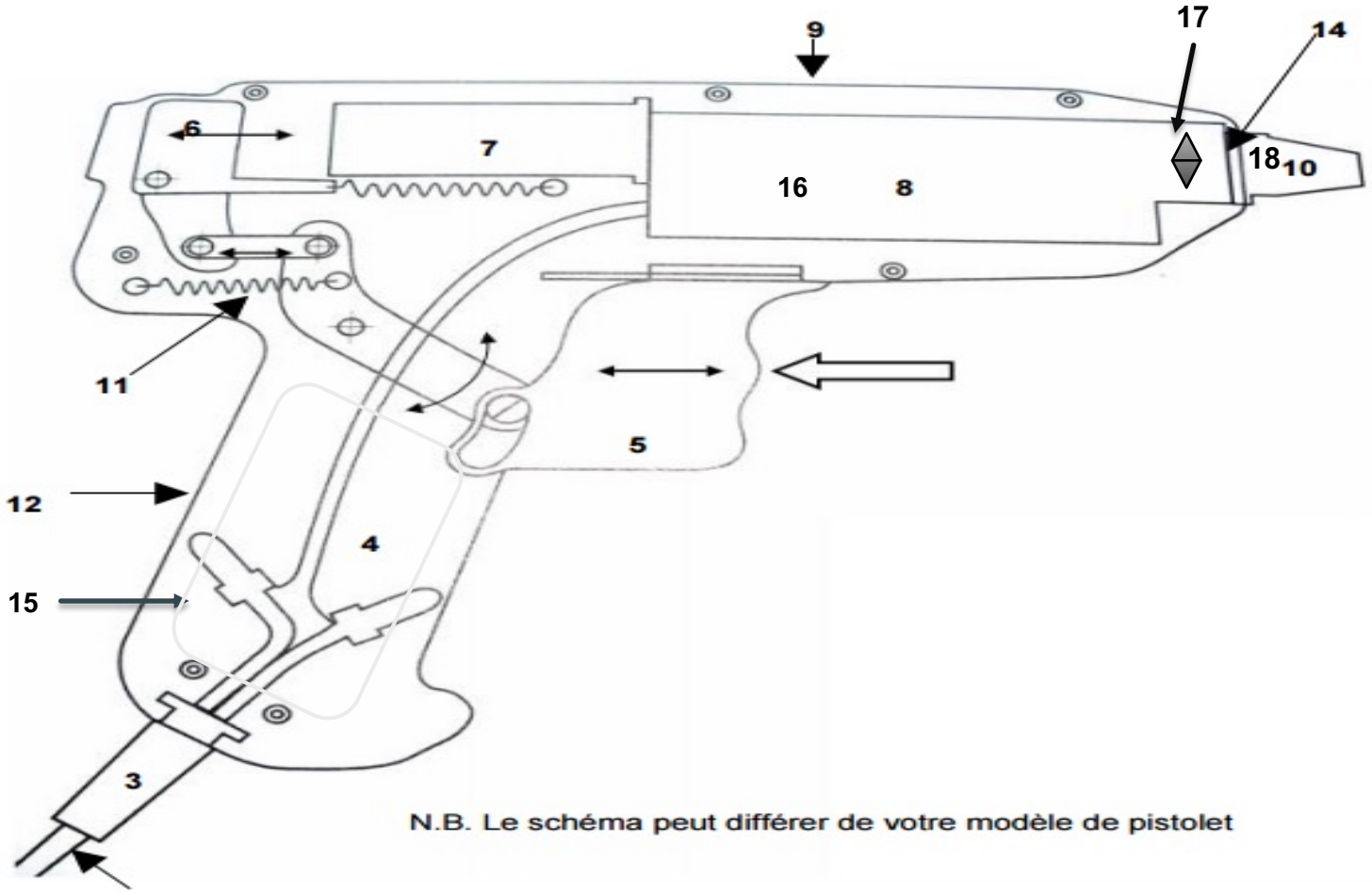
Etude de cas



Pistolet à colle chaude

Composants et leurs matériaux

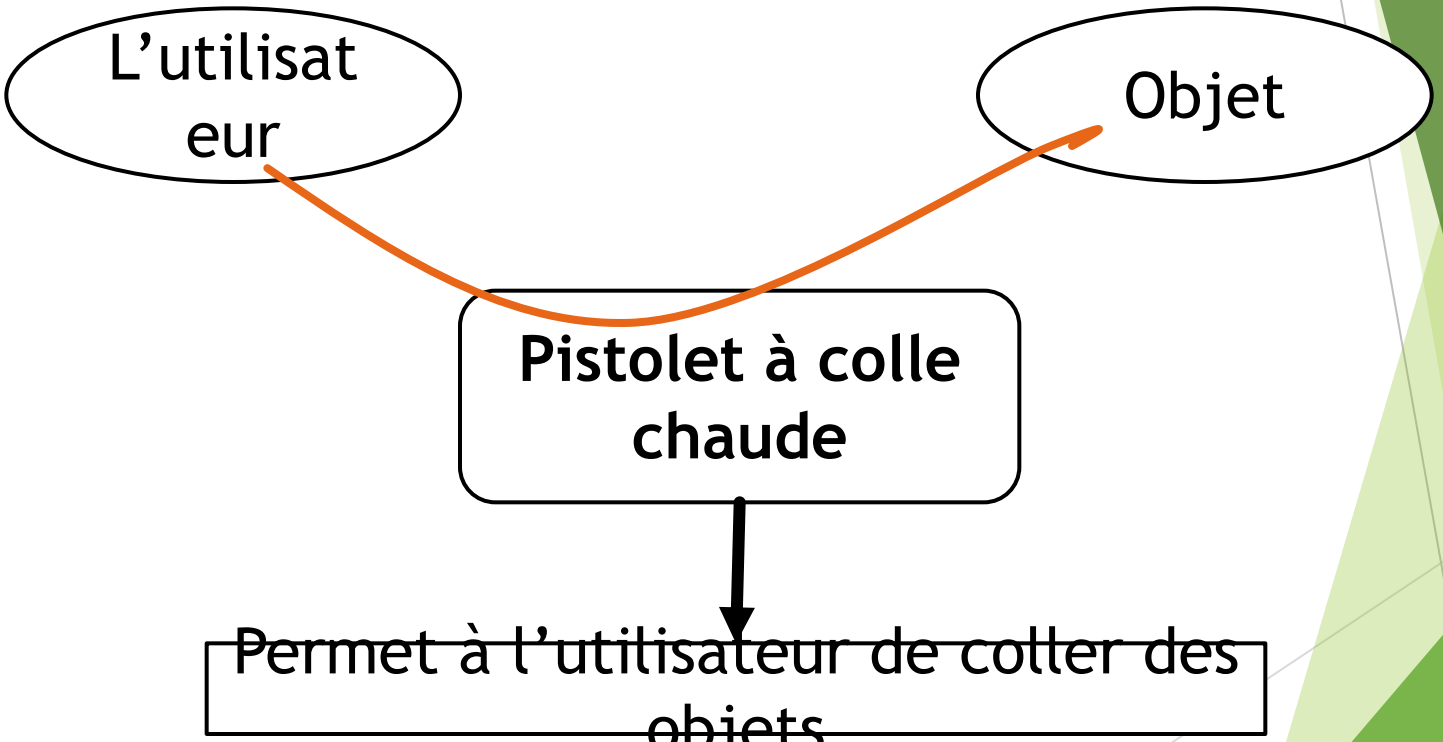
Composant	Matériaux
1.Fiche électrique	Plastique et acier
2.Fil électrique	Métal: cuivre
3.Gaine du fil électrique	Plastique
4.Capuchon de connexion	Plastique
5.Gachette	Plastique
6.Mécanisme d'avance de la colle	Plastique et acier
7.Tube isolant du bâton de la colle	Caoutchouc
8.Résistance1 électrique	Métal
9.Boitier	Plastique
10.Buse à colle 1	Métal
11.Ressort	Métal
12.Poinier de pistolet	Plastique
13.Vis	Métal
14.Anneau de retenue	Métal
15.Batterie	Diff Matériaux
16.Résistance2	Métal
17.Switch	Plastique
18.Buse à colle2	Métal



N.B. Le schéma peut différer de votre modèle de pistolet

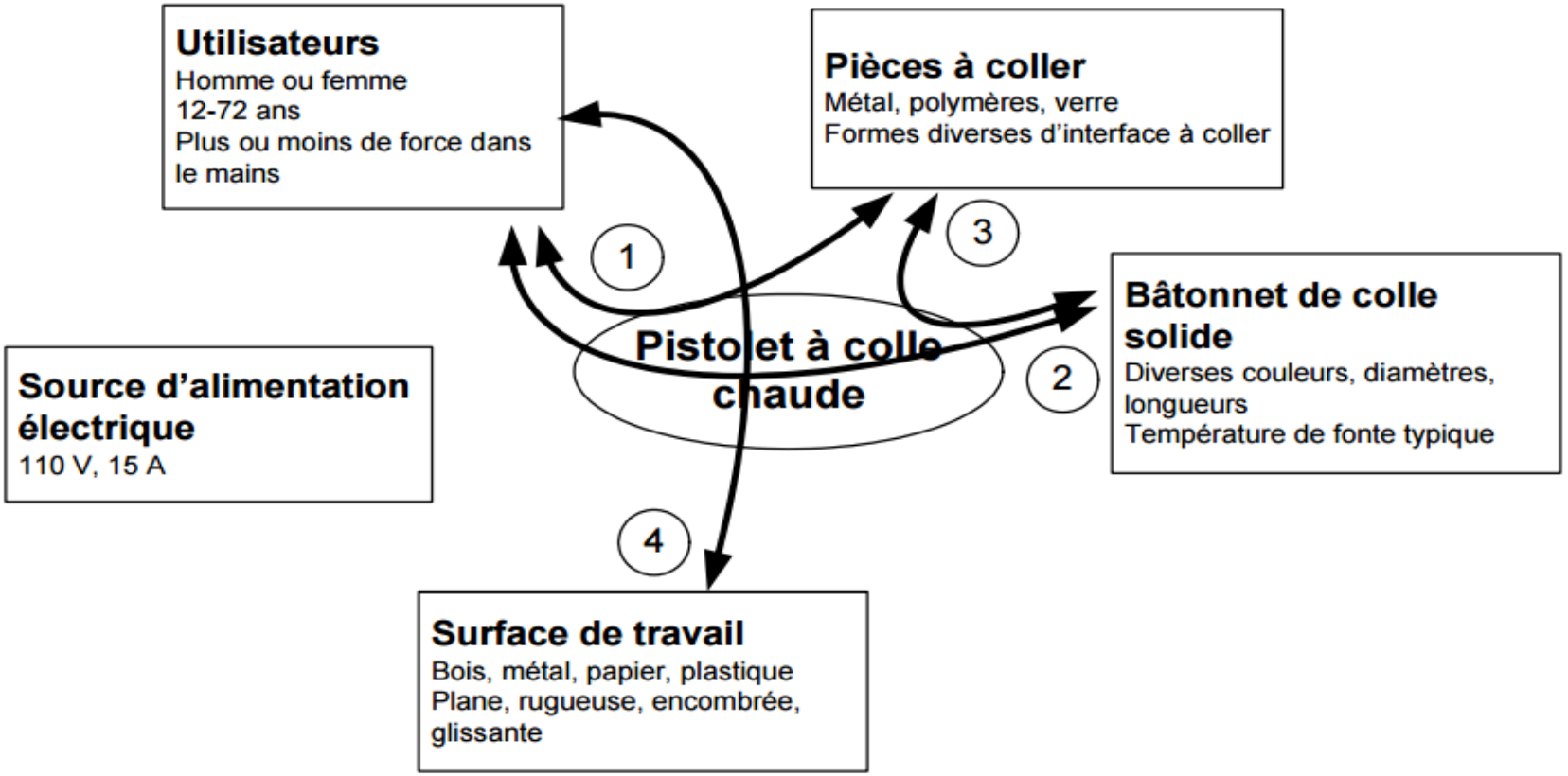
Analyse fonctionnelle

- Bête à cornes



Analyse fonctionnelle

- Diagramme pieuvre



Analyse fonctionnelle

La Figure montre les liens d'interaction entre les interacteurs du pistolet. Les fonctions d'interaction trouvées sont les suivantes :

- 1. Utilisateurs – pièces à coller ▫ Permettre à l'utilisateur de bien voir la surface à coller
- 2. Utilisateurs – bâtonnet de colle ▫ Permettre à l'utilisateur d'insérer et de retirer facilement les bâtonnets
- 3. Pièces à coller – bâtonnets de colle solide ▫ Éviter que de la colle chaude ne soit appliquée partout sur les pièces à assembler (ou localiser l'application de la colle)
- 4. Utilisateurs – surface de travail ▫ Tenir debout sur une surface plane

Analyse fonctionnelle

N°	Fonctions	Type
1	Appliquer la colle chaude liquide	Usage
2	Fondre un bâtonnet de colle	Usage
3	Déplacer un bâtonnet de colle vers la zone de chaleur	Usage
4	Stocker un ou des bâtonnets de colle	Usage
5	Contrôler et limiter la quantité de la colle appliquée	Usage
8	Utiliser une source d'électricité standard	Contrainte
9	Convertir l'électricité en chaleur	technique
10	Protéger l'utilisateur de la chaleur	Usage
13	Minimiser l'effort nécessaire pour appliquer la colle	technique
15	Refroidir rapidement après utilisation de la colle	Usage
23	Evacuer toute la colle fondue	Usage
25	Protéger toute la surface de travail	Usage

Diagramme de fiabilité



Diagramme de fiabilité

- Sous système d'alimentation

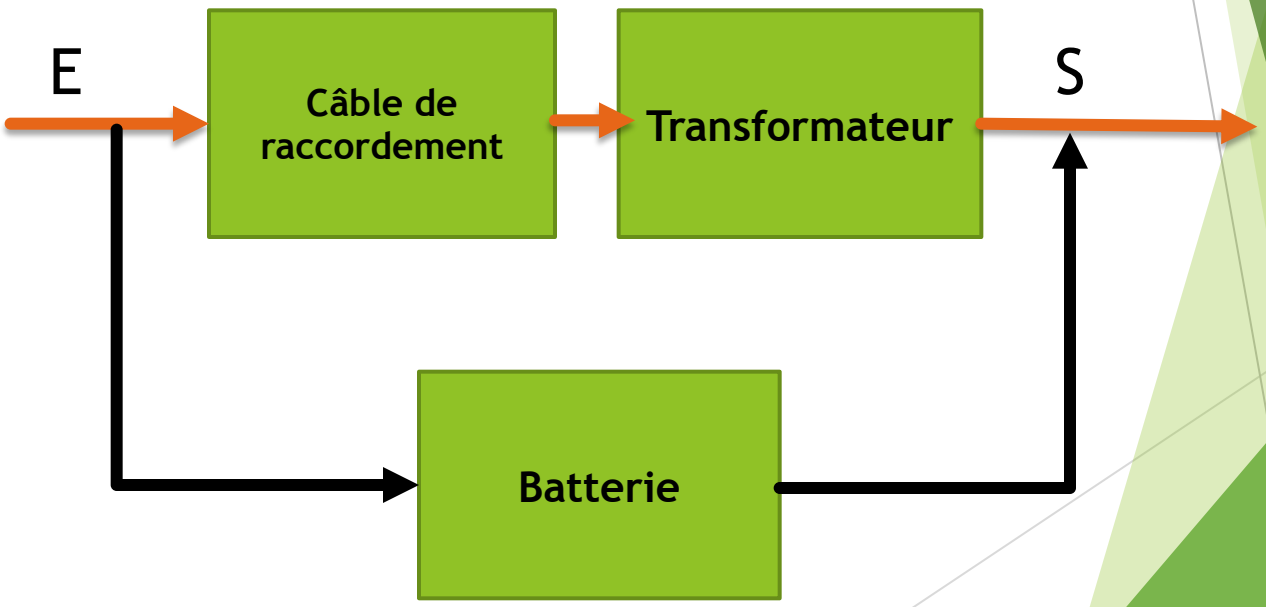


Diagramme de fiabilité

- Sous système de stockage

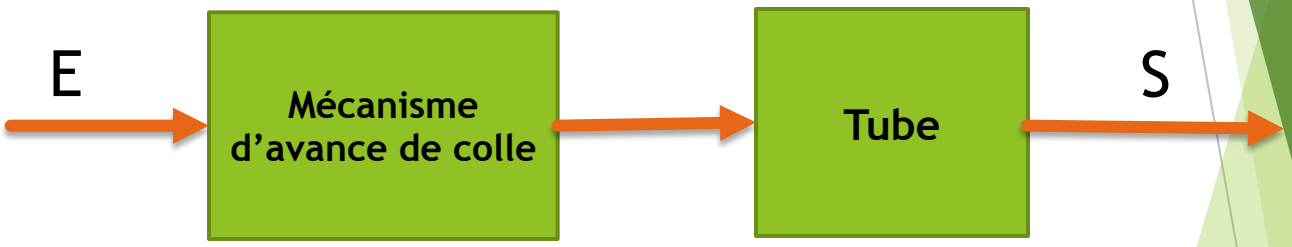


Diagramme de fiabilité

- Sous système de chauffage

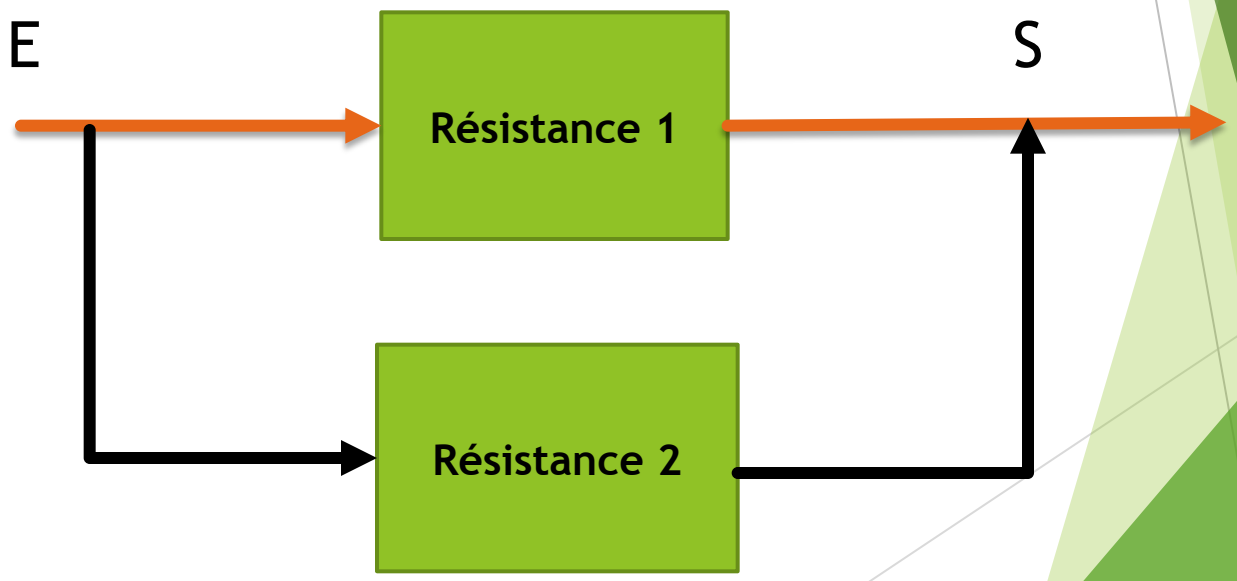


Diagramme de fiabilité

- Sous système de versement

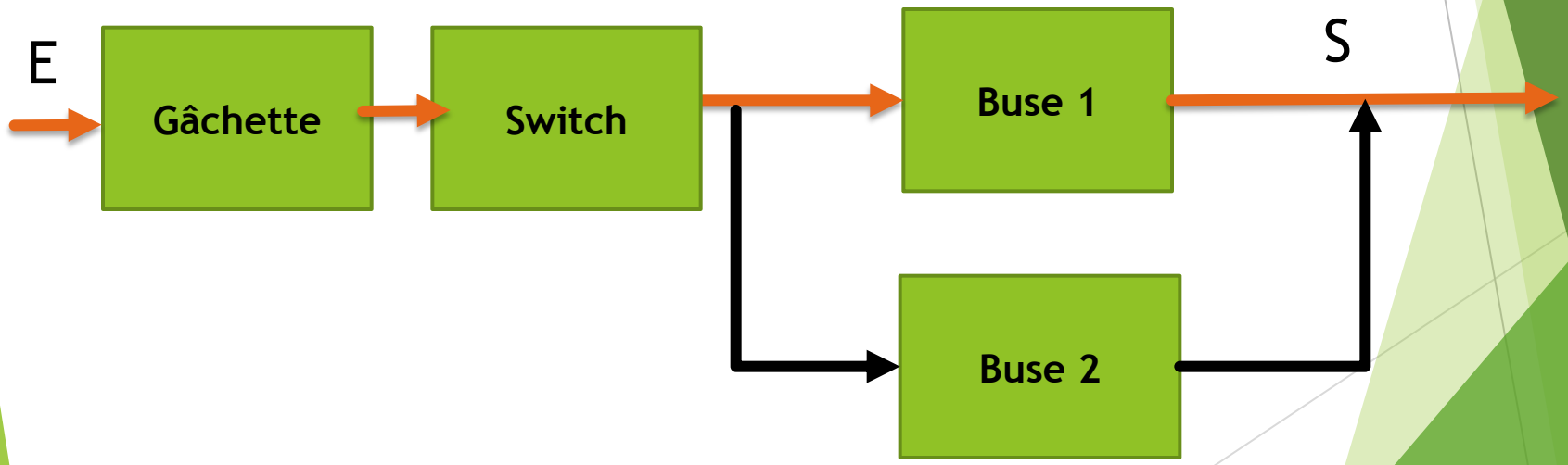


Diagramme de fiabilité

- Sous système de protection

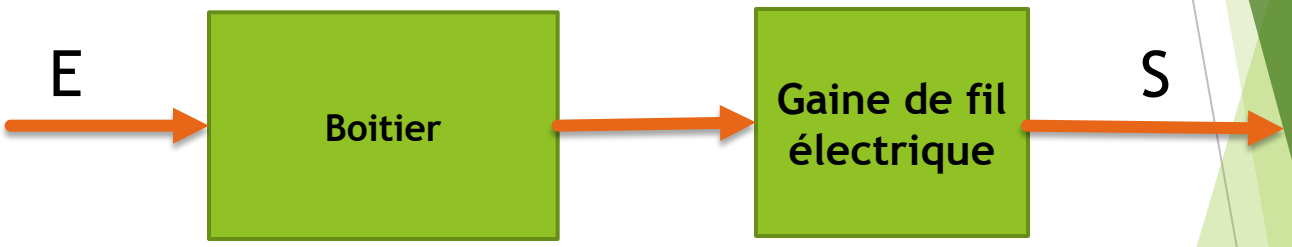
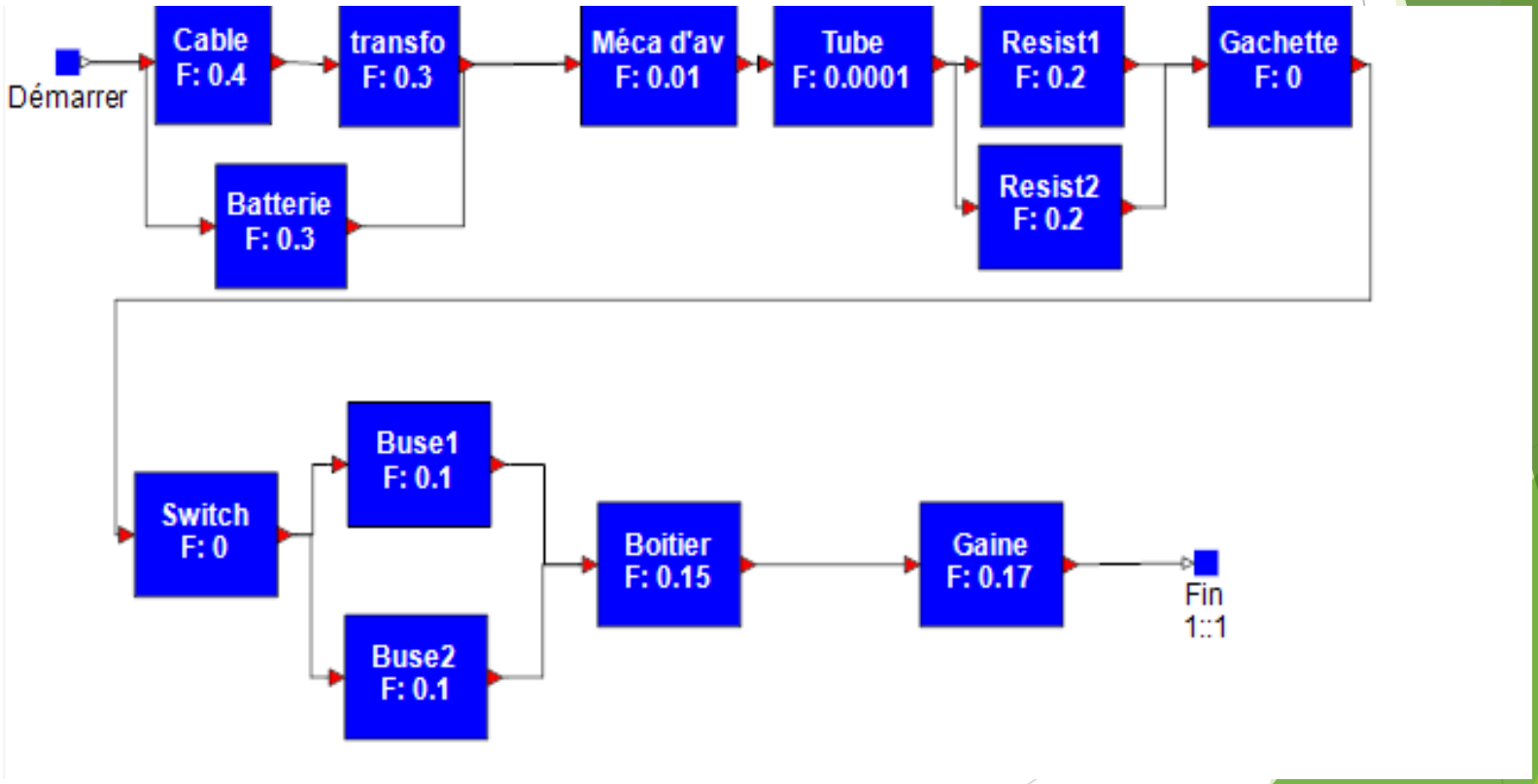
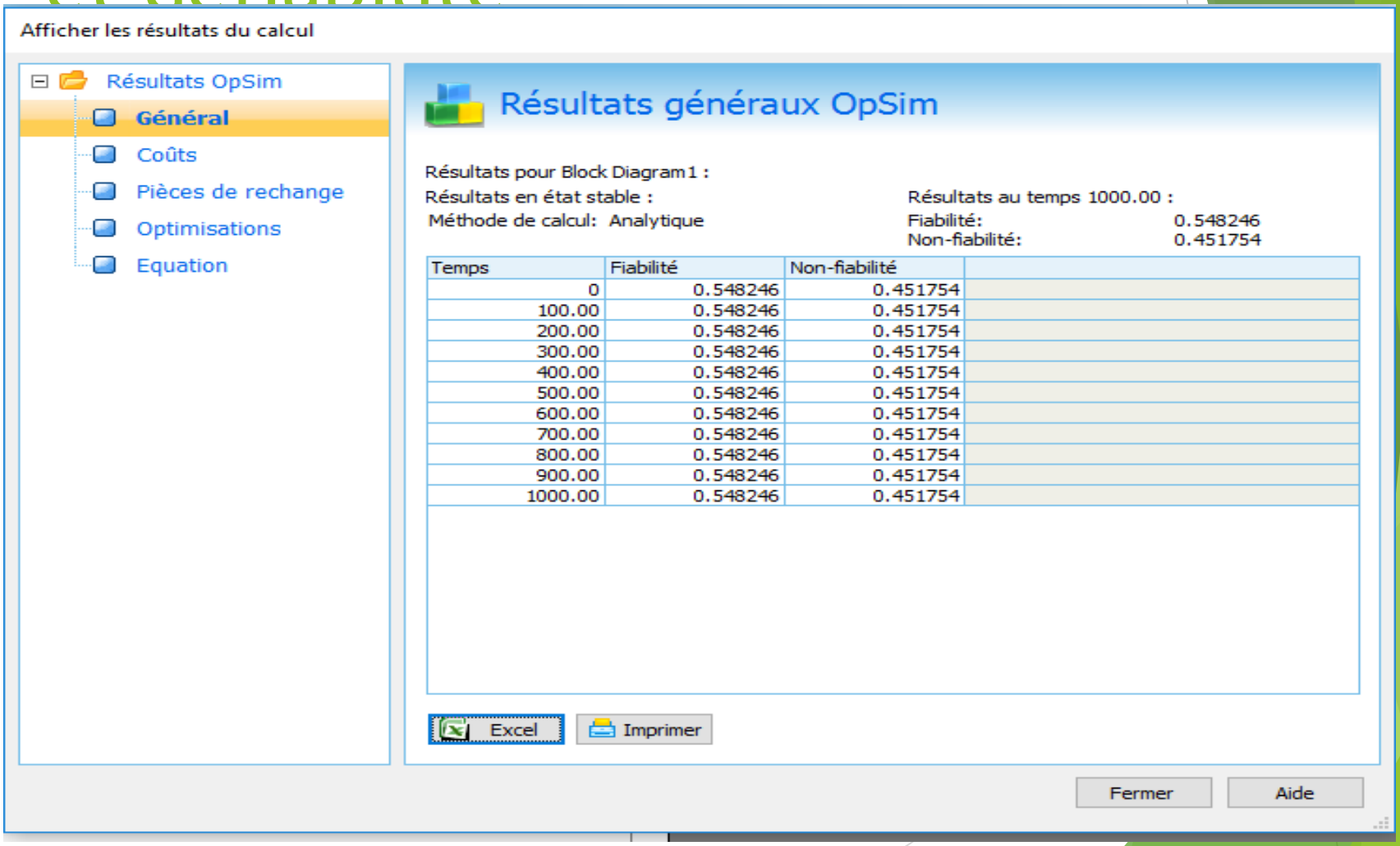


Diagramme de fiabilité

- Diagramme de fiabilité du système (Relex)



Calcule de Fiabilité et défiabilité



Les chemins de succès
2-6-7-8-5-17-10-9-3
2-6-7-8-5-17-18-9-3
2-6-7-16-5-17-10-9-3
2-6-7-16-5-17-18-9-3
15-6-7-8-5-17-10-9-3
15-6-7-8-5-17-18-9-3
15-6-7-16-5-17-10-9-3
15-6-7-16-5-17-18-9-3