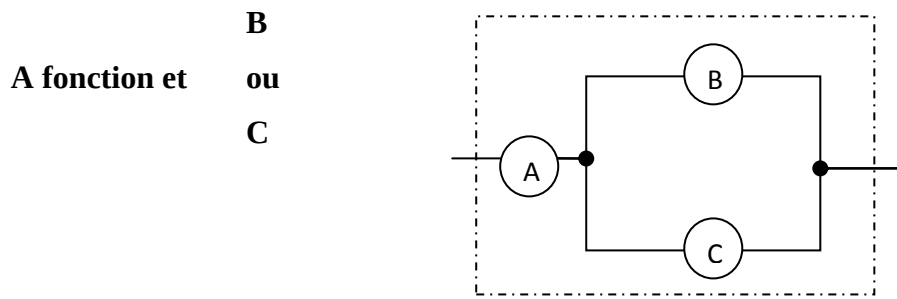


Structure et fiabilité des structures

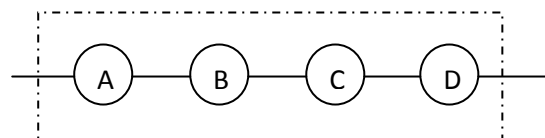
I- Introduction

Le fonctionnement d'un système peut être décrit par un réseau où les nœuds représentent les composantes du système et les arcs représentent les relations fonctionnelles entre les composantes.

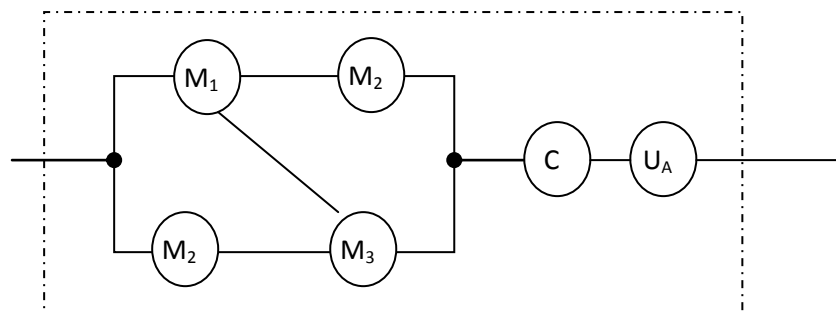
Exemple 1 : Considérons un système composé de 3 composants A, B et C se système ne fonctionnera que si A fonction et B ou C fonctionne



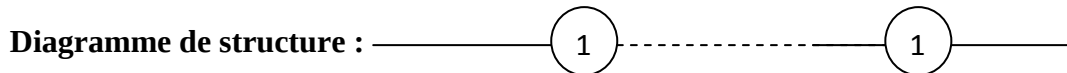
Exemple 2 : Considérons un système constitué de 4 composants A, B, C, D pour que ce système fonctionne A, B, C, D fonctionne.



Exemple 3 : Un ordinateur comporte 3 unités mémoire M1, M2 et M3, un contrôleur et une unité arithmétique. Pour que se système fonctionne il faut qu'au moins 2 unités mémoire fonctionne et l'unité arithmétique fonctionne.



II- Structure série d'ordre « n » :

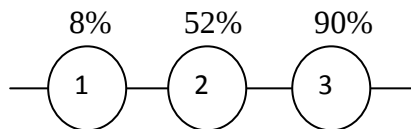


Une structure série d'ordre « n » est une structure qui ne fonctionne que lorsque chacun de ces « n » composants fonctionne.

Fiabilité : soit $R_i(t)$ la fiabilité de $i^{\text{ème}}$ composants ($i = 1 ; \dots ; n$)

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \equiv R_1 \times R_2 \times R_3 \times \dots \times R_i$$

$$MTBF = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$



$$R_t = 0,8 \times 0,52 \times 0,90 = 0,37 \text{ soit } 37\%$$

Remarque : pour augmenter la fiabilité d'un système série on doit agir sur le composant le moins fiable.

Remarque : Si « t_s » désigne la durée de vie d'un système série.

$$t_s = \min_{i=1}^n \{t_i\}$$

$$\text{Exemple : } t_s = \min_{i=1}^n \{t_i\} = C_1 = 100h = t_s$$

Remarque : plus on $\nearrow$ les éléments série plus la fiabilité et le taux de panne augmente.

Exercice 1 : Un poste radio constitue de 4 composants connecté en série comme suit :

Alimentation $\longrightarrow$ réception $\longrightarrow$ amplification $\longrightarrow$ haut parleur

$$R_A = 0.95 \quad R_B = 0.99 \quad R_C = 0.97 \quad R_D = 0.89$$

1- Calculer la fiabilité du poste radio ?

2- Déduire l'expression de taux de panne en fonction de (t) ?

Solution :

$$1) R(t) = 0.95 \times 0.99 \times 0.97 \times 0.89 = 81\%$$

$$2) R(t) = e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = e^{-\lambda t} \rightsquigarrow \ln R(t) = \ln e^{-\lambda t}$$

$$\ln R(t) = -4\lambda t$$

$$\lambda = \frac{\ln R(t)}{4t} = -\frac{\ln 0,81}{4t} = 0,0521/t$$

$$\lambda = 0,0521/t$$

Exercice 2 : Une imprimante constituée 200 composants montés en série chaque composant possède une fiabilité 0,999.

- 1- Calculer la fiabilité totale du système ?
 - 2- On souhaite obtenir une fiabilité de 90% pour les 200 composantes ?
- Déterminer la fiabilité que peut voir chaque composant ?

Solution :

$$1) R(t) = \prod_{i=1}^{200} R_i(t) = 0,999^{200} = 81\%$$

$$2) R_i^{200}(t) = 0,9 \Leftrightarrow R_i(t) = \sqrt[200]{0,9} = 0,999473$$

Exercice 3 : un compresseur dont la durée vie total de fonctionnement = 1500h, se compresseur est constitué de 4 sous ensembles A, B, C, D monté en série et ayants les MTFBF suivant :

$$MTBF_A = 4500h$$

$$MTBF_B = 3200h$$

$$MTBF_C = 6000h$$

$$MTBF_D = 10500h$$

- 1- Déterminer MTBF total du système ?
- 2- Calculer la fiabilité totale du système ?
- 3- Est-ce que ce système possède un bon niveau de fonctionnement ?
- 4- Quel est la probabilité pour que le système fonctionne sans panne jusqu'à 5000h ?
- 5- Que doit être le temps « t » pour que la fiabilité soit 85% ?

Solution :

$$1. \text{ MTBF} = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 \lambda_i}$$

$$\lambda_A = \frac{1}{\text{MTBF}_A} = \frac{1}{4500} = 2,210^{-4}$$

$$\lambda_B = 3,110^{-4}$$

$$\lambda_C = 1,610^{-4}$$

$$\lambda_D = 0,910^{-4}$$

$$\Rightarrow \text{MTBF} = \frac{1}{(2,2 + 1,6 + 3,1 + 0,9)10^{-4}} = 1282h$$

$$2. R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\text{AN : } R(t) = e^{-7,810^{-4} \cdot 1500} = 0,32 = 32\%$$

$$3. \lambda = 7,810^{-4} \rightarrow \rightarrow \rightarrow t = 1500$$

$$\lambda = ? \quad \rightarrow \rightarrow \rightarrow t = 1000$$

$$\Rightarrow \lambda = 5,210^{-4} \notin]10^{-7}, 10^{-5}[\text{ pour } t = 1000h$$

- Ce système ne possède pas un bon niveau de fiabilité.

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-7,810^{-4} \cdot 5000} = 0,02 = 2\%$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\ln R(t) = \ln e^{-\lambda t}$$

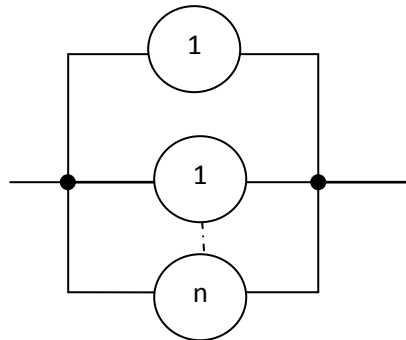
$$\ln R(t) = -\lambda t$$

$$\Rightarrow t = \frac{-\ln R(t)}{\lambda}$$

$$t = \frac{\ln 0,85}{7,85 \cdot 10^{-4}} = 208,35h$$

III. Structure parallèle d'ordre « n »

- Diagramme de structure

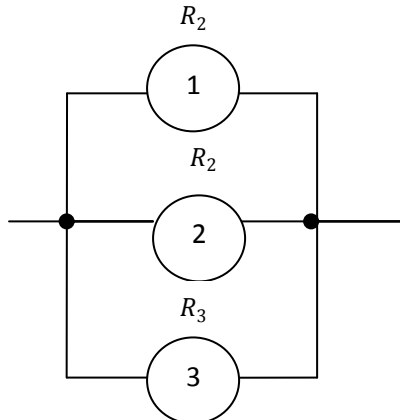


- Fiabilité

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$$

$$MTBF = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots \dots \dots \frac{1}{\lambda_n} - \left[\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \dots \frac{1}{\lambda_{n+1} + \lambda_n} \right] - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Exemple :



$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$$

$$= 1 - [(1 - R_1) \cdot (1 - R_2) \cdot (1 - R_3)]$$

$$MTBF = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} - \left[\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} \right] - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

Remarque :

+ Si t_p désigne la durée de vie // alors $t_p = \max_{i=1}^n \{t_i\}$

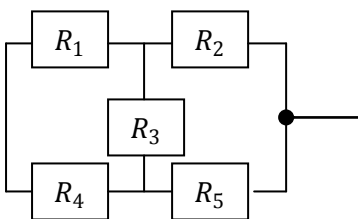
+ Pour augmenté ↗ la fiabilité d'un système // on doit agir sur le composant le plus fiable.

III- Fiabilité d'une structure complexe :

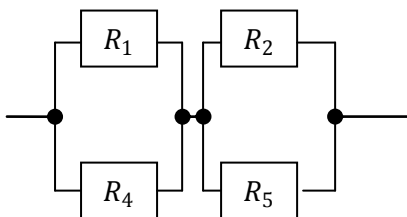
Pour un composant quel que X d'un système S la probabilité de sur vie jusqu'à l'instant « t » s'écrit :

$$R(t) = \underbrace{\text{Prob}\{Sf^+/Xf^+\}\{\text{Prob}Xf^+\}}_{R_{1(t)}} + \underbrace{\text{Prob}\{Sf^+/Xf^-\}\{\text{Prob}Xf^-\}}_{R_{2(t)}}$$

Exemple 1 :

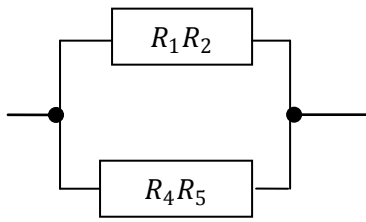


- Si $R^3 f^+$



$$R_1(t) = [1 - ((1 - R_1) \cdot (1 - R_4) \cdot [1 - ((1 - R_2) \cdot (1 - R_5))]) \cdot R_3$$

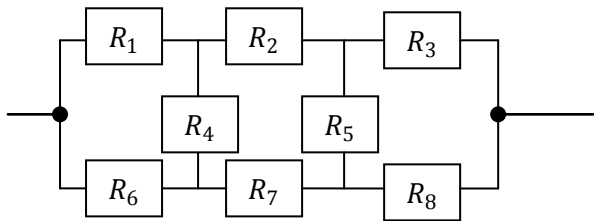
- Si $R_3 f^-$



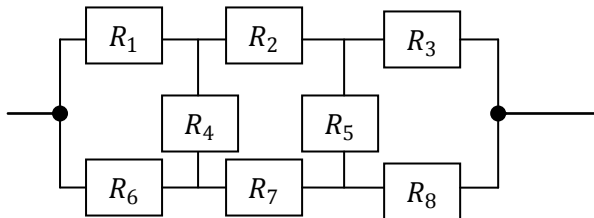
$$R_2(t) = [1 - ((1 - R_1 \cdot R_2) \cdot (1 - R_4 R_5))] \cdot (1 - R_3)$$

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t)$$

Exemple 2 :



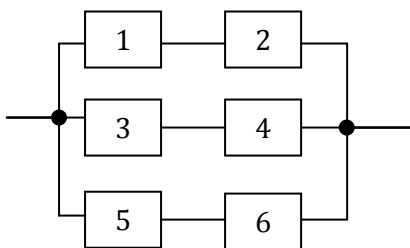
- Si R_4 et $R_5 f^+$



$$R_1(t) = [1 - ((1 - R_1) \cdot (1 - R_6))] \cdot [1 - ((1 - R_2) \cdot (1 - R_7))]$$

$$[1 - ((1 - R_3) \cdot (1 - R_8))] \cdot R_3 - R_5$$

Exercice :



Pour $t = 1500h$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 8 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 9 \cdot 10^{-5}$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = 7 \cdot 10^{-5}$$

1.

a- Donner l'expression de la fiabilité Totale ?

b- Calculer la fiabilité du système ?

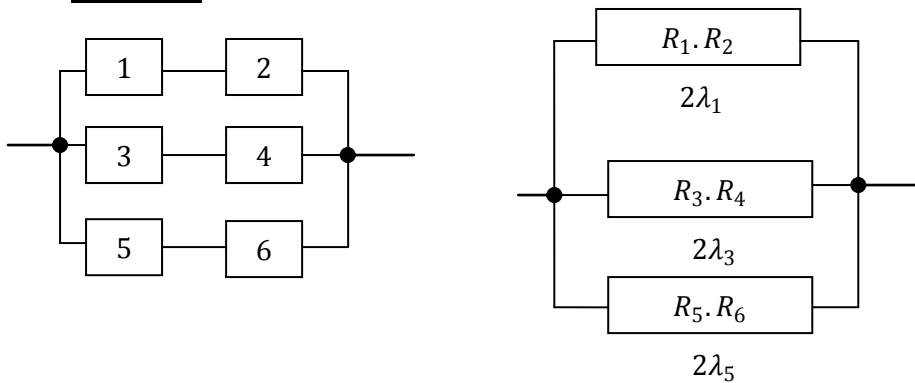
2.

a- Donner l'expression MTBF ?

b- Calculer MTBF du système ?

3. Donner l'expression de MTBF lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = cte$?

Solution :



1. a - $R_1(t) = 1 - [1 - ((1 - R_1 \cdot R_2) \cdot (1 - R_3 \cdot R_4))] \cdot [1 - R_5 \cdot R_6]$

b = $1 - [1 - e^{-2\lambda_1 t}] \cdot (1 - e^{-2\lambda_3 t}) \cdot (1 - e^{-2\lambda_5 t})$

$R(t) = 0,989$ soit $tR(t) = 98,9\%$

2. a- $MTBF = \frac{1}{2\lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_3} + \frac{1}{2\lambda_5} - \left[\frac{1}{2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_3)} + \frac{1}{2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_5)} + \frac{1}{2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_5)} \right] - \frac{1}{2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5)}$

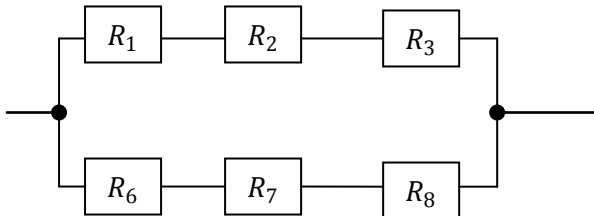
b- $MTBF = \frac{1}{16 \cdot 10^{-5}} + \frac{1}{18 \cdot 10^{-5}} + \frac{1}{14 \cdot 10^{-5}} - \left[\frac{1}{34 \cdot 10^{-5}} + \frac{1}{30 \cdot 10^{-5}} + \frac{1}{32 \cdot 10^{-5}} \right] - \frac{1}{48 \cdot 10^{-5}}$

3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = cte$?

$$MTBF = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} - \left[\frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{4\lambda} \right] - \frac{1}{6\lambda} = \frac{3}{2\lambda} - \frac{3}{4\lambda} - \frac{1}{6\lambda} = \frac{18-9-2}{12\lambda} = \frac{7}{12\lambda}$$

$$\text{Si } \lambda = \text{cte} \rightsquigarrow \rightsquigarrow \rightsquigarrow \rightsquigarrow MTBF = \frac{7}{12\lambda}$$

- Si R_4 et R_5 f

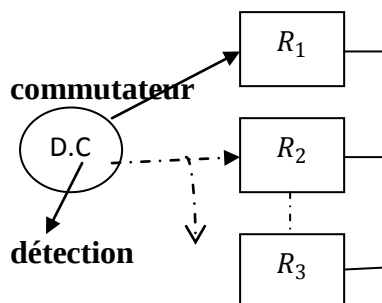


$$R_2(t) = [1 - ((1 - R_1 \cdot R_2 \cdot R_3) \cdot (1 - R_6 \cdot R_7 \cdot R_8)) \cdot (1 - R_4) \cdot (1 - R_5)]$$

V. Structure stand-by d'ordre « n » :

Un système Stand-by d'ordre "n" est un système à rotendance passive de "n" composant.

Exemple :



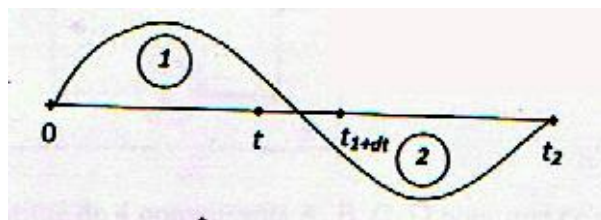
0 ————— t

$$R'(t) = R_1(t)$$

La durée de vie $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \sum_{i=1}^n t_i$

$$f_1(t) = R_1(t) : F_1(t)$$

$$f_2(t) = R_2(t) : F_2(t)$$



$$\int_0^{t_2} f(t_1) dt \cdot R_2(t_2 - t_1)$$

$$R''(t) = \int_0^{t_2} f(t_1) \cdot R_2(t_2 - t_1) dt$$

$$R(t) = R'(1) + R''(t)$$