

Support de cours

Sureté de fonctionnement

2ème année Master GIL

2ème année FI-GIL

3ème année FI-GMSI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

SURETE DE FONCTIONNEMENT

I.1 LE TAUX DE DEFAILLANCE

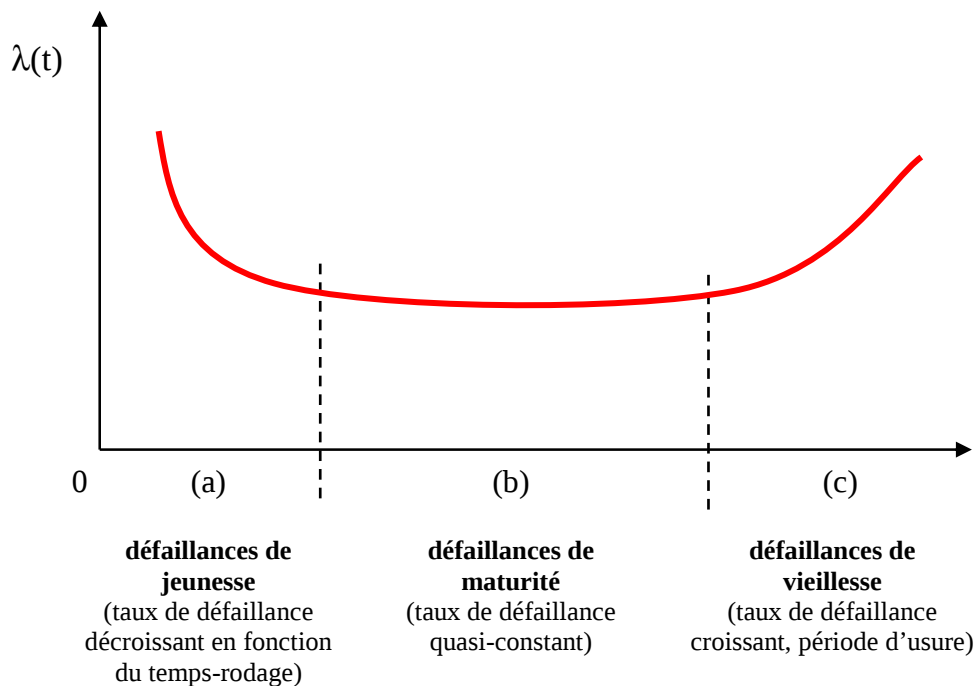
I.1.1 Définition

Le taux de défaillance (ou de panne) $\lambda(t)$ représente la proportion de machines ou de dispositifs survivants (toujours en service) à un instant t .

$$\lambda(t) = \frac{\text{nombre de défaillances}}{\text{durée d'utilisation}}$$

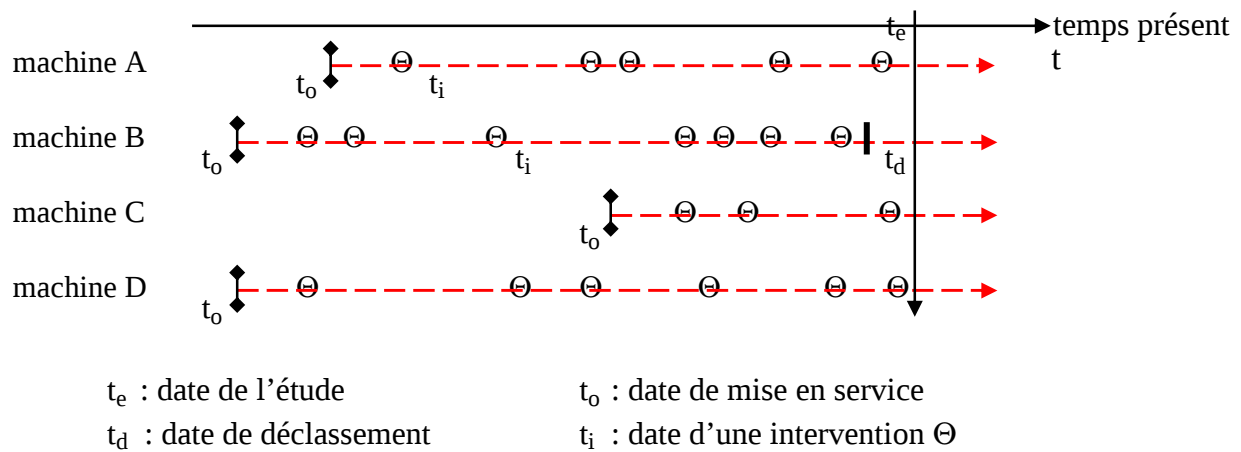
$\lambda(t)$ nous permet d'estimer entre autres la fiabilité d'un système.

D'une manière générale, l'évolution du taux de défaillance se présente sous la forme d'une courbe en baignoire.



I.1.2 Détermination de la courbe en baignoire : « méthode de l'actuariat »

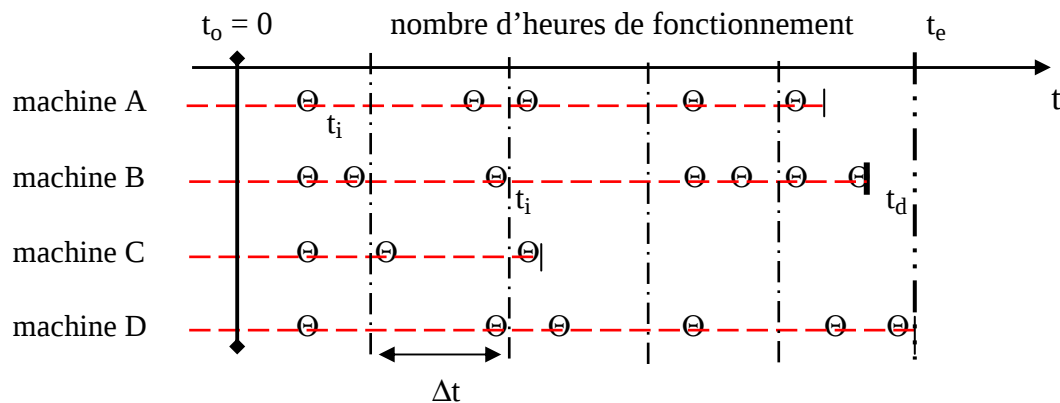
La détermination d'une courbe traçant l'historique des pannes d'un parc de machines semblables nécessite un grand nombre de relevés de défaillances s'étalant sur toute la durée de vie de chacune des machines. Soient A, B, C, D... des machines semblables. L'historique individuel de chaque machine pourrait être celui de la page suivante :



Remarques

- Les dates de mise en route des divers systèmes ne sont pas les mêmes
- Certains éléments ne fonctionnent pas sur toute la période d'examen (machines A et C).
- D'autres éléments sont arrêtés avant la date d'observation (machine B)

Afin d'avoir un outil de comparaison de l'historique des diverses machines, **on initialise la mise en service de chaque machine à 0**. On porte en abscisse le **nombre d'heures de fonctionnement** de chaque machine



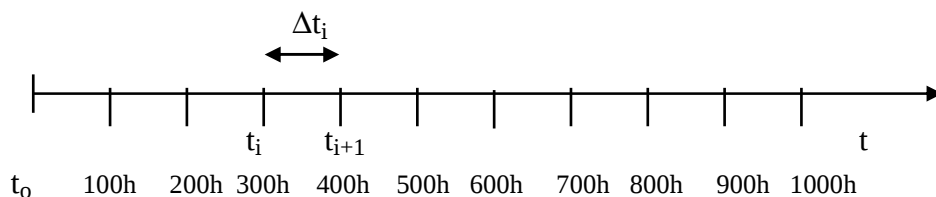
On découpe le temps de fonctionnement étudié t_e en k intervalles de temps Δt appelés classes de temps avec :

$$k = \sqrt{N} \quad \text{ou} \quad k = 1 + 3.3 \log N \quad (\text{Règle de Sturges})$$

$$\Delta t = t_e / k$$

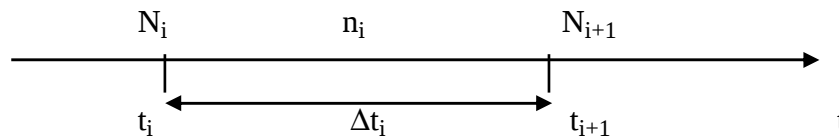
Exemple

Pour un nombre total de défaillances de 112 au bout de 1000h de fonctionnement, $k = \sqrt{112}$ est pris égal à 10 classes de 100 h (simplification des données).



Pour chaque classe d'âge $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, on établit :

- le nombre N_i de machines en service (ou nombre de survivants) à l'instant t_i
- le nombre n_i de défaillances entre les instants t_i et t_{i+1}



n_i n'est pas forcément égal à $\Delta N_i = N_{i+1} - N_i$; n_i contient le nombre d'interventions effectuées + le nombre de machines déclassées ΔN_i .

Une estimation du taux de défaillance $\lambda(t)$, supposé constant par intervalle de temps Δt_i , est déterminée par :

$$\lambda(t_i) = \frac{n_i}{N_i \cdot \Delta t_i} \text{ (en pannes / unité de mesure)}$$

Exemple 1

41 défaillances ont été réparées sur 70 véhicules pendant une période allant de 80000 à 90000 km. Quel est le taux de défaillance relatif à cette période ?

$$\lambda(t) = \frac{41}{70 \cdot (90\,000 - 80\,000)} = 0.585 \cdot 10^{-4} \text{ pannes/km}$$

Exemple 2

On teste un lot de 50 électrovannes soumises en continu à 8 impulsions/minute. A la 50^{ème} heure, il en reste 33. A la 60^{ème} heure, il en reste 27. Quel est le taux de défaillance sur cette classe, par heure et par impulsion.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{33 - 27}{33 \times 10} = 0.018 \text{ défaillances/heure} \\ &= \frac{0.018}{60 \times 8} = 3.79 \cdot 10^{-5} \text{ défaillances/impulsion} \end{aligned}$$

Exercice

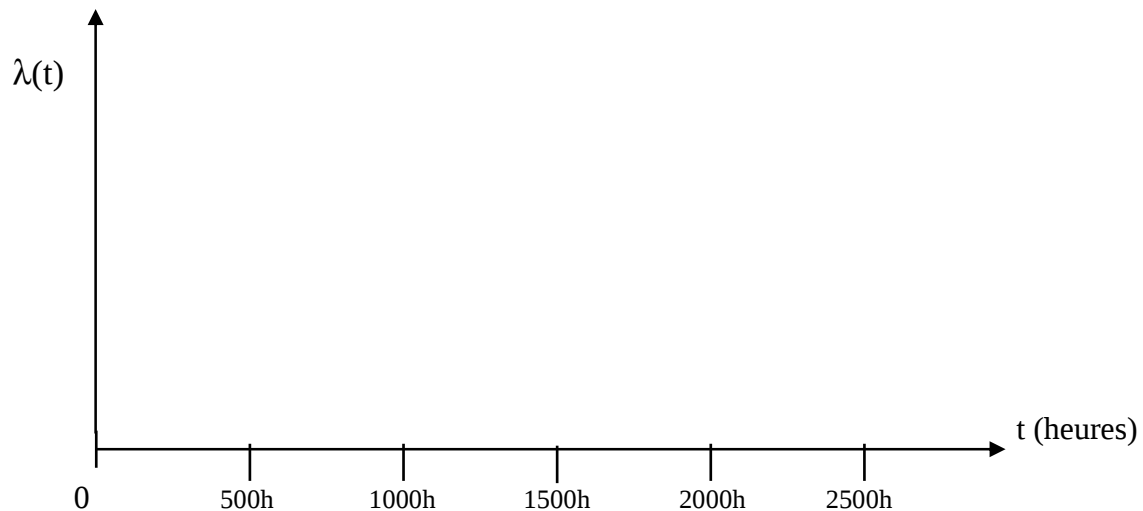
Tracer la courbe du taux de défaillance relative au tableau suivant (N = 50 machines) :

Intervalles de temps (ou classes) $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$	Nombre de défaillances par intervalle n_i	Machines n'ayant pas encore atteint t_{i+1}	Nombre de machines en service à l'instant t_i N_i	Taux de défaillance $\lambda(t_i)$
0-500	5	3	50	
500-1000	3	4		
1000-1500	2	3		
1500-2000	2	6		
2000-2500	4	-		

Commentaire

- Le nombre de machines au départ est de 50
- Pour la classe 500h - 1000h, on enlève les 3 machines qui n'ont pas un nombre suffisant d'heures de fonctionnement pour appartenir à la classe 500 – 1000h, d'où $N_2 = 50 - 3 = 47$

De même pour la classe 1000h – 1500 h : $N_3 = 47 - 4 = 43$, etc...



I.2 LA FIABILITE

I.2.1 Définition (AFNOR X 06 501)

Aptitude d'un bien à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, durant un intervalle de temps donné.

Commentaires :

Le terme «fiabilité» est également utilisé pour désigner la valeur de la fiabilité et peut être défini comme une probabilité :

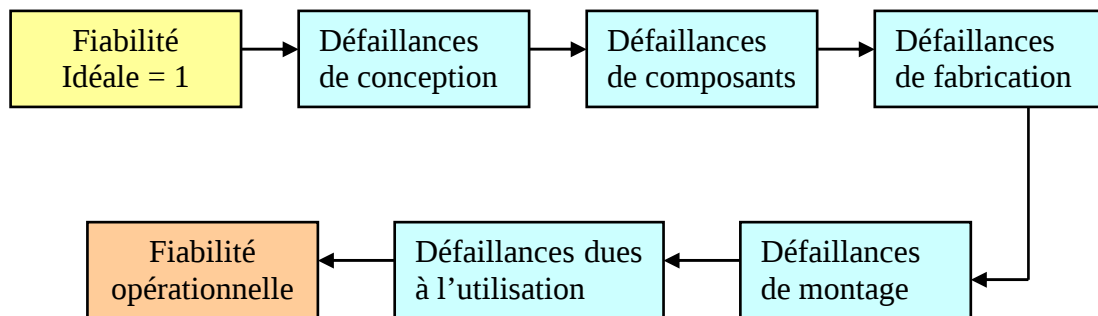
$$R(t) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} < 1$$

Fonction requise : accomplir une mission, rendre le service attendu. La définition de la fonction requise implique un seuil d'admissibilité au delà duquel la fonction n'est plus remplie.

Conditions données : conditions d'usage, soit l'environnement et ses variations, les contraintes mécaniques et physiques.... Le même matériel placé dans deux contextes de fonctionnement différents n'aura pas la même fiabilité.

Intervalle de temps : durée de la mission en temps de fonctionnement (ou unité d'usage). Le produit doit demeurer conforme pendant toute la période de temps déterminée.

La fiabilité peut être déterminée de façon opérationnelle à partir d'une suite de défaillances potentielles :



Il est également possible d'estimer la fiabilité prévisionnelle (avant fonctionnement) de façon théorique (banque de données, calculs de durée de vie) ou de façon expérimentale (essais)

I.2.2 Définitions

On a N : nombre d'éléments fonctionnant à t_0 (instant initial)
 N_i : nombre d'éléments fonctionnant à l'instant t_i
 n_i : nombre d'éléments défaillants entre t_i et t_{i+1}
 Δt : intervalle de temps observé égal à $(t_{i+1} - t_i)$

On définit la fonction de défaillance cumulée $F(t_i)$ par :

$$F(t_i) = \frac{\sum_0^i n_i}{N} = \frac{N - N_i}{N} = 1 - \frac{N_i}{N}$$

↖ Eléments défaillants non réparables

$F(t_i)$: probabilité pour que le dispositif soit en panne à l'instant t_i

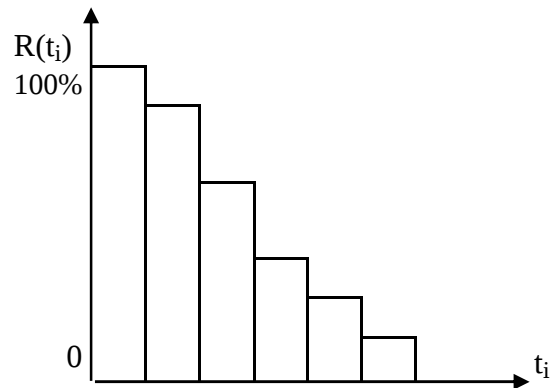
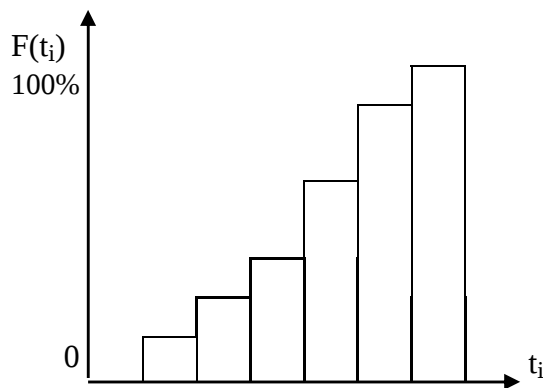
On définit la fonction de fiabilité $R(t_i)$ par :

$$R(t_i) = \frac{N_i}{N} = 1 - F(t_i)$$

$R(t_i)$: probabilité de bon fonctionnement à l'instant t_i

Remarque : $F(t_i) + R(t_i) = 1$

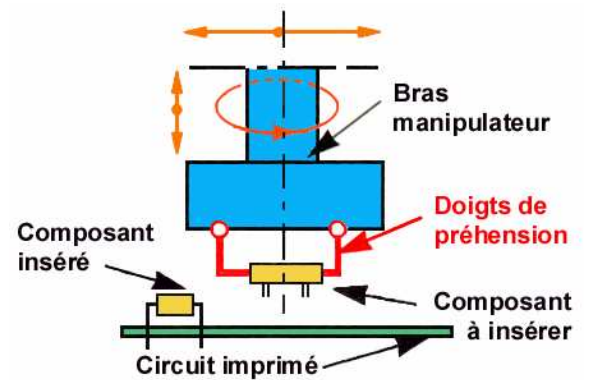
Représentation graphique



Application

Sur une machine d'insertion automatique de composants électroniques sur des circuits imprimés la rupture des doigts de préhension des composants, situés à l'extrémité d'un bras manipulateur, provoque des arrêts importants (changement des doigts, réinitialisation de la machine, réglages).

Le service maintenance décide d'étudier la fiabilité de ces éléments en vue d'instaurer une action de maintenance préventive systématique les concernant. Sachant que l'entreprise possède **N=14 machines** d'insertion automatique de composants électroniques.



- Compléter le tableau de calcul du taux de défaillance puis tracer la courbe taux de défaillance en fonction du temps et conclure.

La courbe de défaillance montre que le changement systématique des doigts doit être envisagé. On se propose donc de déterminer la périodicité de changement.

- Compléter le tableau de calcul de la fonction fiabilité puis représenter graphiquement la fiabilité en fonction du temps.

Intervalle Δt (en heures)	Nombre n_i de matériels défaillants pendant Δt	Nombre N_i de matériels en service au début de Δt	Taux de défaillance (défaillance/h) $\lambda(t_i) = n_i / N_i \cdot \Delta t_i$	Fiabilité $R(t_i) = \frac{N_i}{N}$
0 – 150	1			
150 – 300	2			
300 – 450	4			
450 – 600	5			
600 – 750	2			

Définir graphiquement sur le graphique une périodicité T de changement systématique correspondant à une fiabilité de 90 %.

$T =$

I.2.3 Approximation de la fonction de défaillance $F(t)$

Les données d'études de fiabilité proviennent souvent des historiques de défaillance, parfois de résultats d'essais. La variable prise en compte en fiabilité est le temps (unité d'usage). On enregistre les dates de N défaillances d'un système (historique). On calcule les TBF (temps de bon fonctionnement entre deux défaillances) et on les classe par ordre **croissant**. Ils sont au nombre de N .

- **Si $N > 50$** , on regroupe les TBF par classes de valeur Δt . Le nombre de classes $k \approx \sqrt{N}$
Dans ce cas on estime la fonction de défaillance cumulée $F(t_i)$ par :

$$F(t_i) = \frac{\sum n_i}{N} \quad n_i \text{ nombre de défaillances dans la classe considérée } (t_i, t_{i+1}) = \Delta t$$

$$F(t_i) = \frac{\text{nb de défaillances avant } t_i}{\text{nb de défaillances total}}$$

Intervalles de classes	Effectifs	Fréquence cumulée
(t_i, t_{i+1})	n_i	$F_i = \frac{\sum n_i}{N} = F(t_i)$

- **Si $N < 50$** , cas des petits échantillons. On classe les TBF par ordre croissant et on donne un rang i à chaque défaillance ($i^{\text{ème}}$ défaillance).

Si $20 < N < 50$, on utilise la formule d'approximation des rangs moyens

$$F(i) = \frac{i}{N+1}$$

Si $N < 20$, on utilise la formule d'approximation des rangs médians

$$F(i) = \frac{i - 0,3}{N + 0,4}$$

TBF croissants	Ordre (rang)	Fréquence cumulée $20 < N < 50$	Fréquence cumulée $N < 20$
t_i	i	$\frac{i}{N+1}$	$\frac{i - 0,3}{N + 0,4}$

I.2.4 Taux de défaillance instantané et loi de Fiabilité

Le taux de défaillance $\lambda(t_i)$ pour un intervalle de temps Δt_i , est déterminée par :

$$\lambda(t_i) = \frac{n_i}{N_i \cdot \Delta t_i} \quad (\text{en pannes / unité de mesure})$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda(t_i) \cdot \Delta t_i &= n_i / N_i \\ &= (N_i - N_{i+1}) / N_i \\ &= -\Delta N_i / N_i \quad (\text{signe - car } \Delta N_i = N_{i+1} - N_i) \end{aligned}$$

Lorsque $\Delta t_i \rightarrow 0$, l'expression du taux de défaillance devient :

$$\lambda(t) \cdot dt = - \frac{dN}{N(t)}$$

On intègre l'expression $\lambda(t) \cdot dt$ entre 0 et t :

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda(t) dt &= - \int_0^t \frac{dN}{N(t)} \\ - \int_0^t \lambda(t) dt &= \ln N(t) + Cste \quad \Rightarrow \quad N(t) = Cste \cdot e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, $N(t) = N_0$ d'où $Cste = N_0$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 \cdot \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right)$$

Or : $R(t) = \frac{N_i}{N_0} = \frac{\text{nombre de survivants à l'instant } t}{\text{nombre initial}} = \frac{N(t)}{N_0}$ quand $\Delta t \rightarrow 0$

d'où $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$

C'est une relation générale liant la loi de fiabilité et le taux instantané de défaillance.

I.2.5 La MTBF

La MTBF (Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement) est aussi un indicateur de fiabilité. On peut estimer la MTBF par :

$$MTBF = \sum_{i=1}^n \frac{TBFi}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{N_i \cdot \Delta t_i}{N_0} \quad (t_0 = 0 \text{ en général})$$

k = nombre d'intervalles de temps Δt_i (classe de temps)

Or $R(t) = \frac{N_i}{N_o}$ et donc $MTBF = \sum_1^k R(t_i) \cdot \Delta t_i$

Lorsque $\Delta t_i \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ et l'expression du MTBF devient :

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t).dt$$

I.2.6 Lois de fiabilité

I.2.6.1 La loi exponentielle

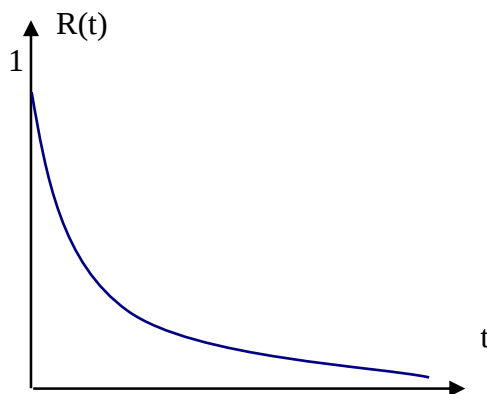
Taux de défaillance constant

Les « courbes en baignoire » présentent une période de maturité où $\lambda(t) = \text{cte} = \lambda$ (cas des composants électroniques par exemple).

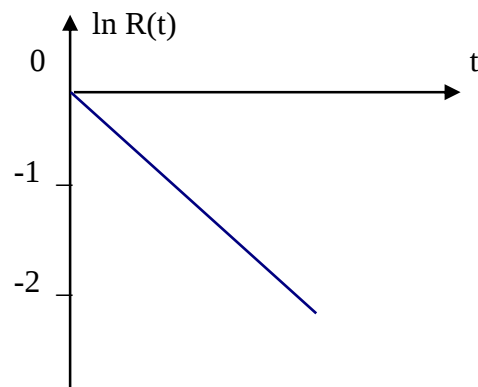
La loi de fiabilité qui découle d'un taux de défaillance constant est une loi exponentielle :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$$

$$= e^{-\lambda t} \quad \text{probabilité de survie entre 0 et } t$$



échelle linéaire



échelle semi-logarithmique

On peut calculer la fiabilité d'un dispositif à tout moment de sa vie.

Exemple

Si $\lambda = 2.10^{-6}$ déf/h et $t = 500$ h

$$R(t = 500) = e^{(-2.10^{-6} \times 500)} = 0,999 = 99.9\%$$

La **MTBF** va s'écrire :

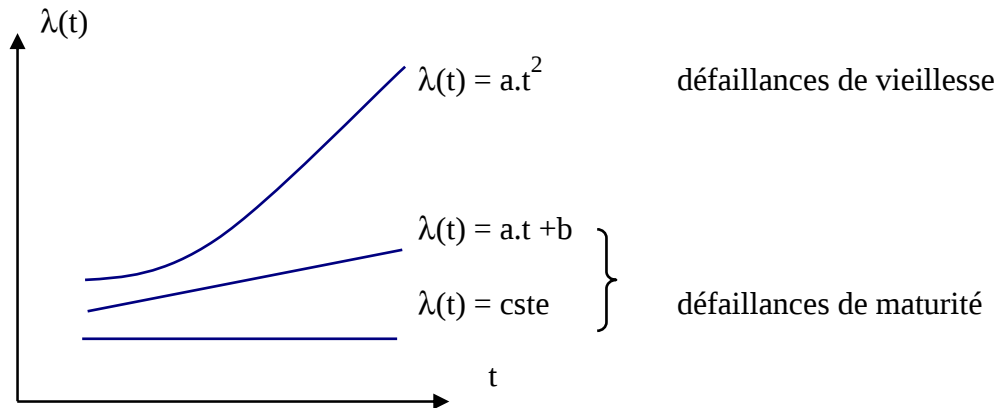
$$\left[MTBF = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}.dt = \frac{1}{\lambda} \right] = \frac{1}{2.10^{-6}} = 5.10^5 h$$

Taux de défaillance linéaire

$$\lambda(t) = at + b$$

Cette variation du taux de défaillance représente un phénomène d'usure en mécanique par exemple, dans la période de maturité. La loi de fiabilité s'écrit :

$$R(t) = e^{-\int_0^t (at+b).dt} = e^{-\left(\frac{at^2}{2} + bt\right)}$$



I.2.6.2 Le modèle de Weibull

La loi de Weibull remplace les lois précédentes et s'applique aux cas où le taux de défaillances λ est variable (périodes de jeunesse et de vieillesse). La loi de fiabilité de Weibull est une fonction qui s'écrit :

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad \text{loi de Weibull}$$

où :

β est appelé paramètre de forme	$\beta > 0$
η est appelé paramètre d'échelle	$\eta > 0$
γ est appelé paramètre de position	$-\infty < \gamma < \infty$

Remarque

Pour $\gamma = 0$ et $\beta = 1$, on retrouve la loi exponentielle $R(t) = e^{-\frac{t}{\eta}}$

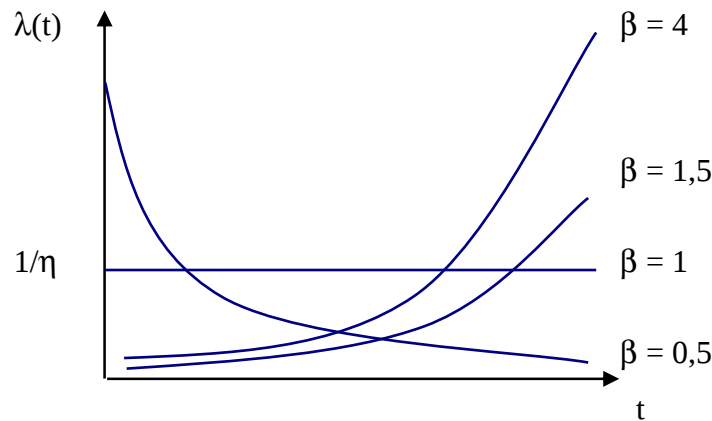
$$\text{où} \quad \frac{1}{\eta} = \lambda = \frac{1}{MTBF}$$

Le taux instantané de défaillance, écrit à partir de la relation $\ln R(t)$ a pour expression :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

On remarque :

- si $\beta < 1$; $\lambda(t)$ décroît en fonction de t : période de jeunesse
- si $\beta = 1$; $\lambda(t)$ est constant : indépendance du processus et du temps
- si $\beta > 1$; $\lambda(t)$ croît en fonction de t : période de vieillissement
- $1,5 < \beta < 2,5$; phénomène de fatigue
- $3 < \beta < 4$; phénomène d'usure, de dépassement d'un seuil (déformation plastique)



La MTBF a pour expression

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t)dt = \gamma + \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \gamma + A \cdot \eta$$

La fonction Γ (Gamma) est une fonction du paramètre β (voir la table de la loi Gamma).

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,0	1,000 0	2,0	1,000 0
1,1	0,951 4	2,1	1,046 5
1,2	0,918 2	2,2	1,101 8
1,3	0,897 5	2,3	1,166 7
1,4	0,887 3	2,4	1,242 2
1,5	0,886 3	2,5	1,329 3
1,6	0,893 5	2,6	1,429 6
1,7	0,908 6	2,7	1,544 7
1,8	0,931 4	2,8	1,676 5
1,9	0,961 8	2,9	1,827 4
		3,0	2,000 0

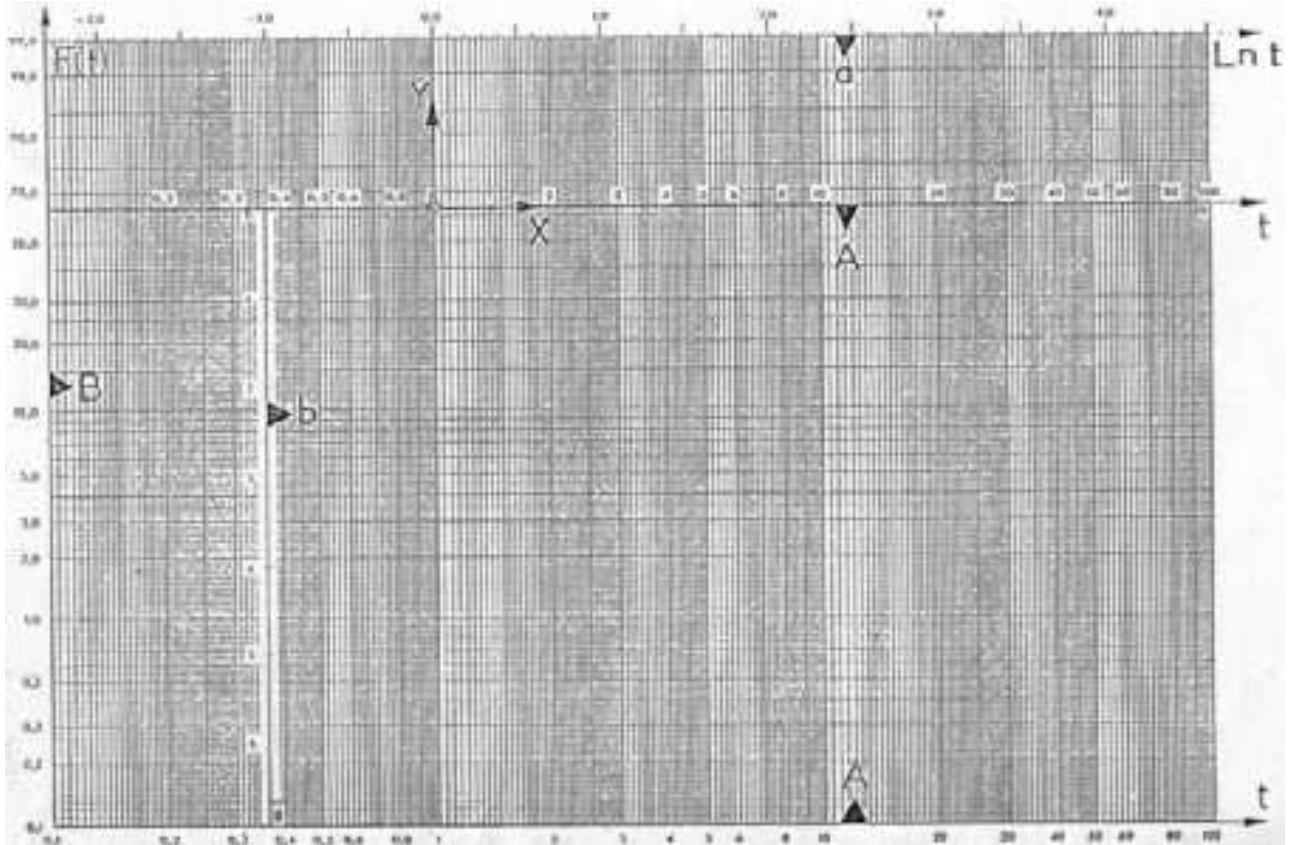
1.2.6.3 Détermination des paramètres β , γ et η

L'historique de fonctionnement d'un matériel permet de déterminer les fonctions de défaillances cumulées $F(t)$ à tout instant t . On détermine les paramètres (β , γ , η) de la loi de Weibull en portant les points $M(F(t_i), t_i)$ sur un papier à échelle fonctionnelle spéciale dit papier de Weibull (ou d'Allen Plait). Le nuage de points ainsi formé sera alors ajusté par une droite dite de Weibull.

Le papier d'Allen Plait (ou de Weibull)

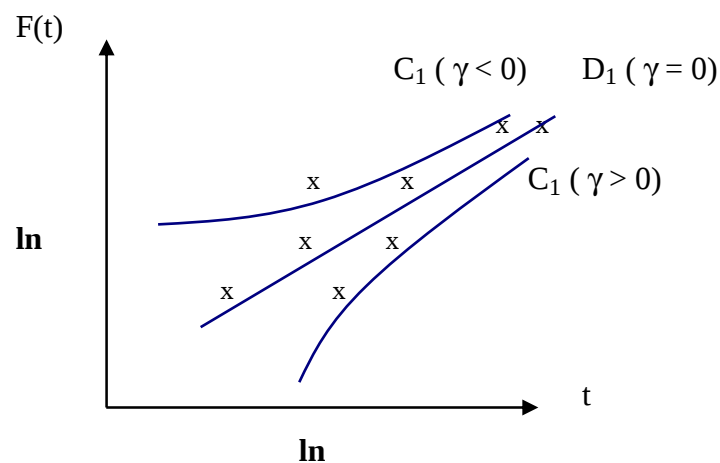
On porte sur un papier log-log les 2 axes principaux suivants :

- l'axe A portant le temps t
- l'axe B portant la fonction $F(t)$ (en %)



On place chaque point $M(F(t_i), t_i)$ sur les axes principaux (A,B). Le nuage des points obtenu sera ajusté par :

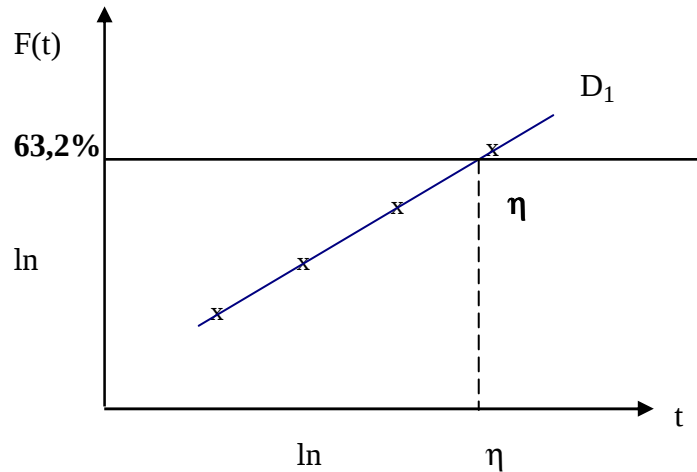
- une droite D_1 dans le cas où $\gamma = 0$
- une courbe C_1 dans le cas où $\gamma \neq 0$



Cas où $\gamma = 0$

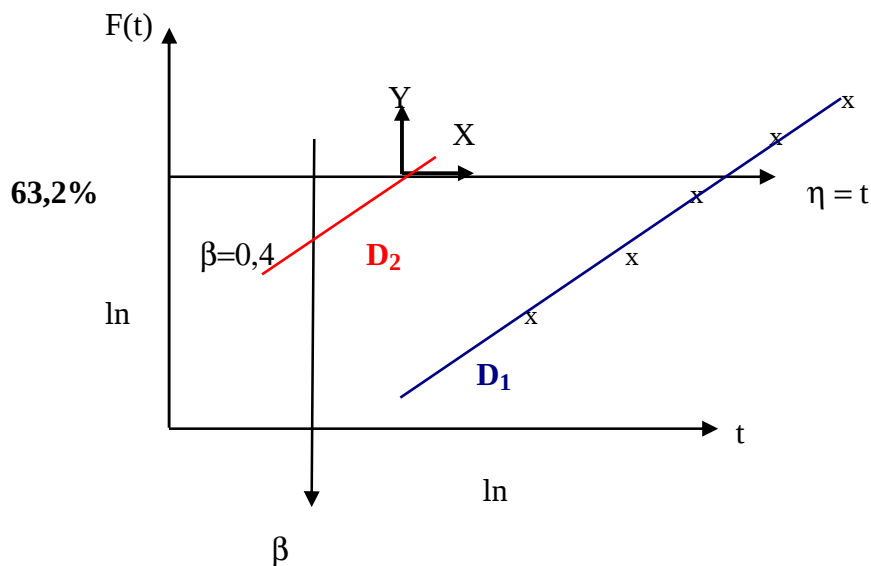
Valeur de η

η représente la valeur du temps t pour laquelle la fonction de défaillance $F(t) = 63,2\%$. η est exprimé en « unité de temps ». D'une manière générale, le paramètre d'échelle η , confondu avec l'axe des temps t , représente l'intersection de la droite tracée D_1 et de la figure (a) 63,2%



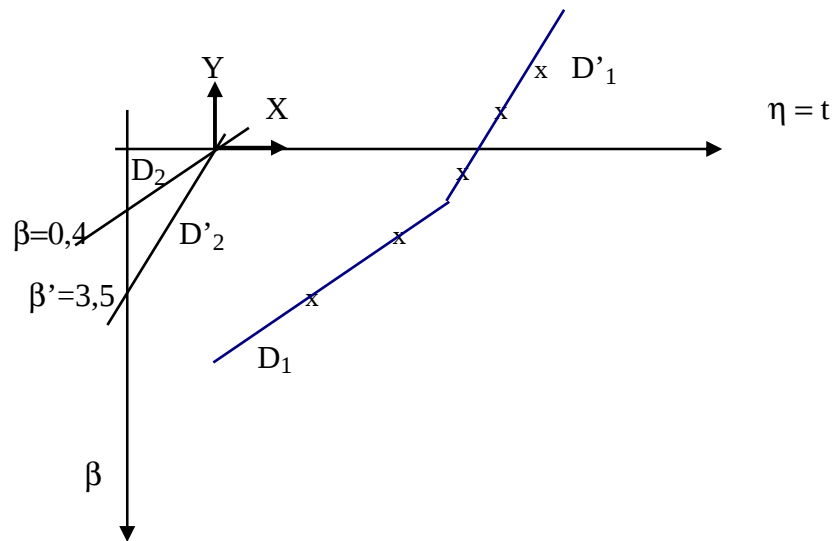
Valeur de β

Considérons la droite D_2 , parallèle à D_1 , passant par l'origine $(0,0)$ du repère (X,Y) : β représente l'intersection de la droite D_2/D_1 avec l'axe b .



Remarque

Si le nuage de points met en évidence deux droites D_1 et D'_1 , on aura deux valeurs de β correspondant chacune à un mode de défaillance différent.

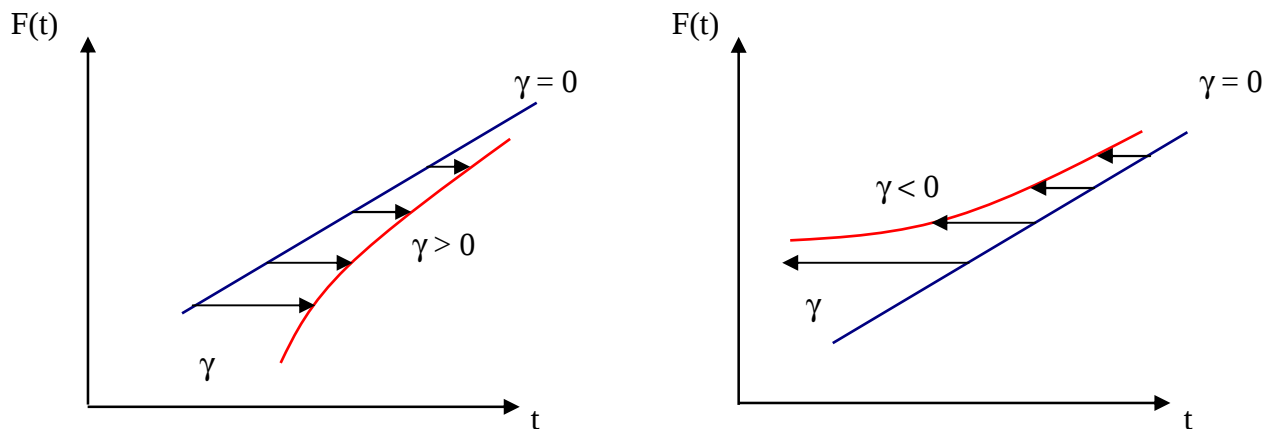


Dans cet exemple il y a deux modes de défaillance qui se succèdent :

- défaillance juvénile (mauvais montage....) $\beta = 0,4$
- défaillance par usure $\beta = 3,5$

Cas où $\gamma \neq 0$

Dans l'expression de la fiabilité $R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$, le terme $(t - \gamma)$ correspond à un changement d'origine une translation d'abscisse



Le paramètre de position γ est aussi appelé paramètre de décalage ou de localisation. Il indique la date de début des défaillances

- Si $\gamma > 0$, il y a survie totale entre $t = 0$ et $t = \gamma$
- Si $\gamma = 0$, les défaillances débutent à l'origine des temps
- Si $\gamma < 0$, les défaillances ont débuté avant l'origine des temps.

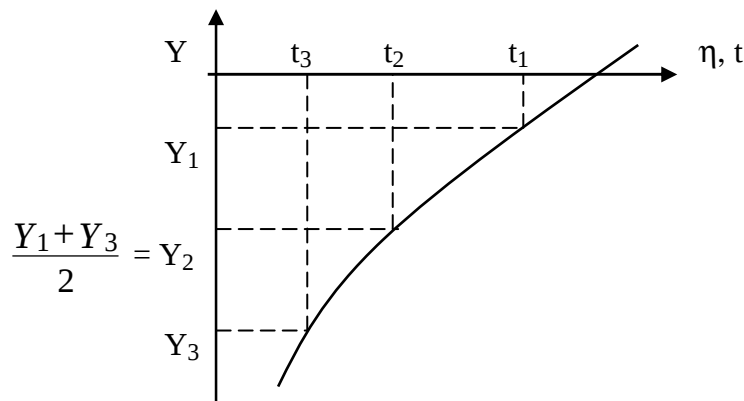
γ s'exprime donc en « unité de temps ».

Valeur de γ

Dans le cas où $\gamma \neq 0$, le nuage formé par les points $M(F(t_i), t_i)$ sera ajusté par une courbe C_1 . Nous redressons la courbe C_1 en ajoutant ou en retranchant à chacun de ses points une même valeur γ jusqu'à obtention d'une droite D.

Le redressement de la courbe peut se faire à partir de la formule :

$$\gamma = \frac{t_2^2 - t_1 \cdot t_3}{2t_2 - t_1 - t_3}$$



$$Y_2 = \frac{Y_1 + Y_3}{2} \text{ point milieu entre } Y_1 \text{ et } Y_3$$

Remarque : la connaissance des valeurs de Y_i n'est pas nécessaire pour calculer γ

Exemple

Soit un nuage de points approximé par la courbe C_1 . Soient les points A_1, A_2 et A_3 équidistants. Les valeurs des temps t correspondants sont :

$$t_1 = 2,5 \quad t_2 = 3 \quad \text{et} \quad t_3 = 4$$

on a

$$\gamma = \dots$$

La droite D_1 de la courbe C_1 coupe l'axe η en $\eta = 2$. La droite $D_2 // D_1$ coupe l'axe β en $\beta = 2,1$. D'où les 3 paramètres de Weibull :

$$\gamma = \dots$$

$$\eta = \dots$$

$$\beta = \dots$$

et l'équation de la fiabilité est :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t - \dots}{\dots}\right)^{\dots}}$$

I.2.7 Durée de vie nominale

On définit la durée de vie nominale notée L_{10} associée à la fiabilité prévisionnelle $R(L_{10}) = 0,9$, la durée atteinte ou dépassée par 90% des équipements.

La durée de vie associée à un seuil de fiabilité $R(t)$ a pour expression :

$$t = \gamma + \eta \left[\ln \frac{1}{R(t)} \right]^{1/\beta}$$

Démonstration

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

$$\ln R(t) = -\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad \rightarrow \quad [\ln 1/R(t)]^{1/\beta} = (t - \gamma)/\eta$$

$$\text{d'où} \quad t = \gamma + \eta \left[\ln \frac{1}{R(t)} \right]^{1/\beta}$$

Au seuil $R(t) = 0,9$, la durée de vie nominale L_{10} est :

$$L_{10} = \gamma + \eta [\ln 1/0,9]^{1/\beta}$$

$$\text{d'où} \quad L_{10} = \gamma + \eta (0,105)^{1/\beta}$$

On peut aussi définir une durée moyenne L_{50} (associée à $R = 0,5$) ou plus généralement, une durée de vie L_n associée à la fiabilité $R = (100 - n) \%$.

I.2.8 Synthèse : Algorithme de l'étude de la Loi de Weibull

I.2.8.1 Préparation des données

1. Saisie de données d'exploitation ou d'essais, recensement des TBF
2. Tableau de classement des TBF par ordre croissant
3. Ordre i attribué à chaque TBF : $1 \leq i \leq N$.
4. Suivant la taille N de l'échantillon,
 - si $N > 50$, nous découpons les TBF en classes (nombres de TBF par classes)
 - si $N < 50$, chaque TBF est exploité en valeur propre.
5. Evaluation de la fréquence cumulée $F(i)$, suivant les modèles d'approximation les plus adaptés.

I.2.8.2 Détermination des paramètres de Weibull

1. On porte sur le papier fonctionnel de Weibull

- sur l'axe A, les valeurs t de TBF
- sur l'axe B les valeurs $F(i)$ associés.

Nous obtenons un nuage de point M.

2. Deux cas sont possibles :

On peut ajuster le nuage par une droite D_1 (au jugé ou par une méthode de régression) $\gamma = 0$

On ajuste le nuage par une courbe C_1 : il faut alors translater tous les points M d'une même valeur γ jusqu'à obtention d'une droite D_1 . γ

3. La droite D_1 coupe l'axe (t, η) en η η

4. Nous traçons la // D_2 à D_1 , passant par le point I (X,Y)

Cette droite D_2 coupe l'axe (β, b) en β β

I.2.8.3 Exploitation directe des paramètres

1. Recherche de la MTBF

Utilisons les tables donnant A et B telles que :

$$MTBF = A\eta + \gamma$$

MTBF

$$L'écart \text{ type } \sigma = B\eta$$

σ

2. Tracés et applications numériques des lois $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ dont les équations sont définies par les 3 paramètres trouvés.

A chaque instant t , nous pouvons ainsi graphiquement ou analytiquement déterminer :

la fiabilité	$R(t)$
la fonction de répartition	$F(t)$
la fonction de distribution	$f(t)$
le taux de défaillance instantané	$\lambda(t)$

3. Les relations réciproques, en particulier l'instant t , associé à un seuil de fiabilité :

$$t = \gamma + \eta \left[\ln \frac{1}{R(t)} \right]^{1/\beta}$$

$$\text{La durée de vie nominale : } L_{10} = \gamma + \eta (0,105)^{1/\beta}$$

4. Niveau de confiance accordé aux estimations de $F(t)$ et de $R(t)$.

β	A	B	β	A	B	β	A	B
0,20	120	1901	1,50	0,9027	0,613	4	0,9064	0,254
0,25	24	199	1,55	0,8994	0,593	4,1	0,9077	0,249
0,30	9,2605	50,08	1,60	0,8966	0,574	4,2	0,9089	0,244
0,35	5,0291	19,98	1,65	0,8942	0,556	4,3	0,9102	0,239
0,40	3,3234	10,44	1,70	0,8922	0,540	4,4	0,9114	0,235
0,45	2,4786	6,46	1,75	0,8906	0,525	4,5	0,9125	0,230
0,50	2	4,47	1,80	0,8893	0,511	4,6	0,9137	0,226
0,55	1,7024	3,35	1,85	0,8882	0,498	4,7	0,9149	0,222
0,60	1,5046	2,65	1,90	0,8874	0,486	4,8	0,9160	0,218
0,65	1,3663	2,18	1,95	0,8867	0,474	4,9	0,9171	0,214
0,70	1,2638	1,85	2	0,8862	0,463	5	0,9182	0,210
0,75	1,1906	1,61	2,1	0,8857	0,443	5,1	0,9192	0,207
0,80	1,1330	1,43	2,2	0,8856	0,425	5,2	0,9202	0,203
0,85	1,0880	1,29	2,3	0,8859	0,409	5,3	0,9213	0,200
0,90	1,0522	1,17	2,4	0,8865	0,393	5,4	0,9222	0,197
0,95	1,0234	1,08	2,5	0,8873	0,380	5,5	0,9232	0,194
1	1	1	2,6	0,8882	0,367	5,6	0,9241	0,191
1,05	0,9803	0,934	2,7	0,8893	0,355	5,7	0,9251	0,186
1,10	0,9649	0,878	2,8	0,8905	0,344	5,8	0,9260	0,185
1,15	0,9517	0,830	2,9	0,8917	0,334	5,9	0,9269	0,183
1,20	0,9407	0,787	3	0,8930	0,325	6	0,9277	0,180
1,25	0,9314	0,750	3,1	0,8943	0,316	6,1	0,9286	0,177
1,30	0,9236	0,716	3,2	0,8957	0,307	6,2	0,9294	0,175
1,35	0,9170	0,687	3,3	0,8970	0,299	6,3	0,9302	0,172
1,40	0,9114	0,660	3,4	0,8984	0,292	6,4	0,9310	0,170
1,45	0,9067	0,635	3,5	0,8997	0,285	6,5	0,9318	0,168
			3,6	0,9011	0,278	6,6	0,9325	0,166
			3,7	0,9025	0,272	6,7	0,9333	0,163
			3,8	0,9038	0,266	6,8	0,9340	0,161
			3,9	0,9051	0,260	6,9	0,9347	0,159

I.2.8.4 Autres exploitations de la loi de Weibull

1. A partir du paramètre β de considérations économiques, il est possible d'optimiser la période de remplacement systématique d'un sous-ensemble fragile
2. A partir de la MTBF, il est possible de calculer une disponibilité
3. A partir de $\beta > 1$, il est possible de simuler le bien fondé économique d'une action corrective.
 - Si non correction, $\beta = 3$ (par exemple), nous aurons un coût C_{M1} à l'horizon 2 ou 3 ans.
 - Si correction, $\beta = 1$ (par suppression du mode de défaillance prédominant), nous aurons un coût C_{M2} , élément de justification.
4. Fiabilité prévisionnelle des roulements

Commentaire : il est possible d'établir un programme informatique simple à partir de la loi de Weibull à 2 paramètres ($\gamma = 0$), dispensant de l'étude graphique.

I.2.9 Exercices

Exercice 1

Etudier la fiabilité d'un équipement électromécanique utilisant le graphe de Weibull

N°	Durée de vie
1	4650
2	3800
3	2175
4	2800
5	5840
6	6700

N°	Durée de vie
7	8500
8	7150
9	10500
10	15800
11	12600
12	14000

N°	Durée de vie
13	11000
14	9200
15	7800
16	6300
17	4250
18	5250
19	3300

Solution

a) Puisque $N = 19 \approx 20$ on peut utiliser $F(i) = i/(N + 1)$ (méthode des rangs moyens)

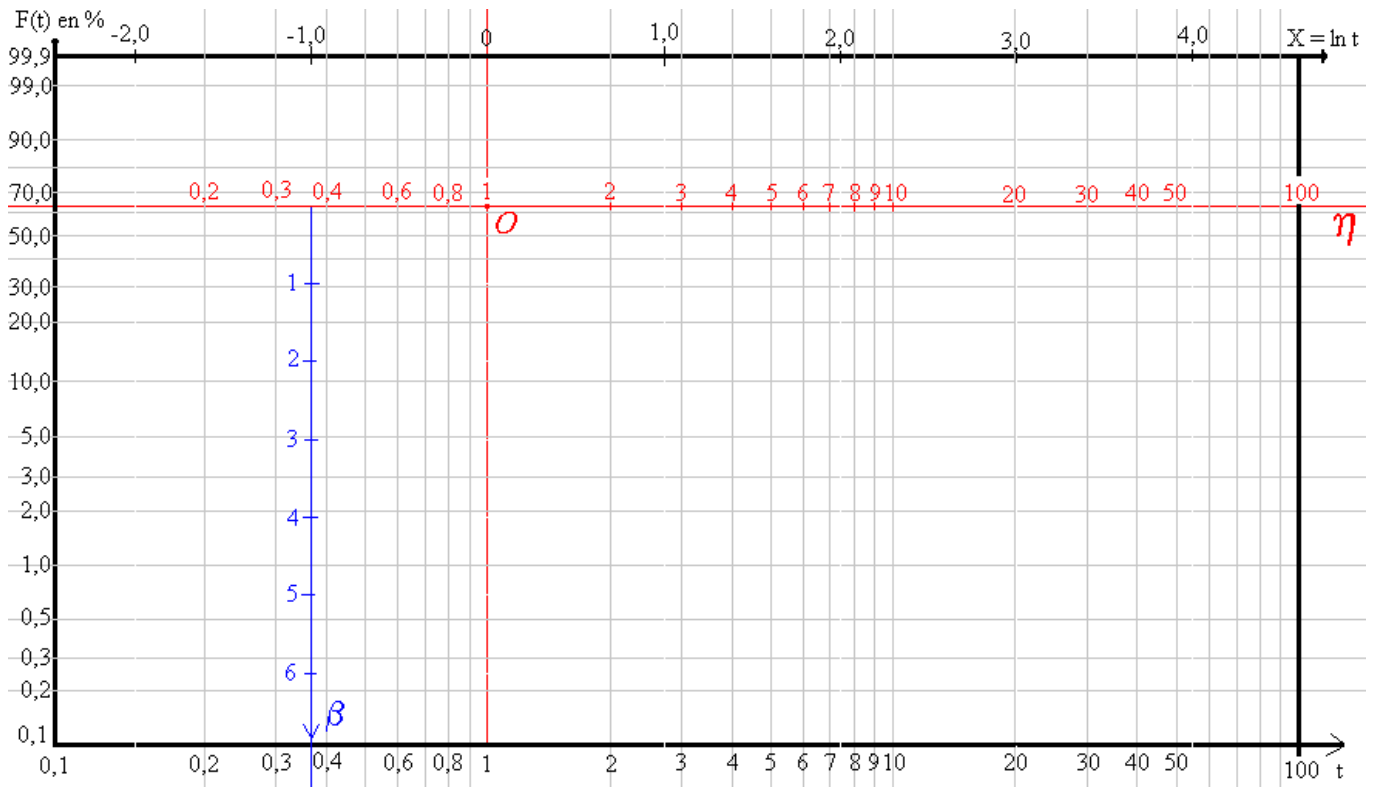
$$\rightarrow F(n) = \frac{i}{N+1} = \frac{i}{20} = 0,05.i$$

On ordonne les durées de vie ordre croissant et on calcule $F(t_i)$:

N° d'ordre i	Durée de vie	Fonction de défaillance F(i)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

N° d'ordre i	Durée de vie	Fonction de défaillance F(i)
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		

On trace la courbe C_1 sur le papier de Weibull.



On détermine : $\gamma = \frac{t_2^2 - t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3}$

pour $Y_1 = 3$ $t_1 =$
 $Y_3 = 0$ $t_3 =$
 $Y_2 = (Y_1 + Y_2)/2$ $t_2 =$

→ $\gamma \approx$ heures

On trace la droite D_1 à partir de C_1 :

D_1 → $\eta =$ heures

$D_2 // D_1$ → $\beta =$

$$\rightarrow R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} = e^{-\left(\frac{t-\dots}{\dots}\right)^\dots}$$

$$\text{Vérification : } R(2800) = e^{-\left(\frac{2800-\dots}{\dots}\right)^\dots} =$$

$$\text{Par l'expérience } R(t = 2800) = 1 - F(2800) = 1 - \dots = \dots$$

b) Calcul du MTBF

$$MTBF = \gamma + \eta \Gamma(1 + 1/\beta)$$

$$= \dots + \dots \times \Gamma(1 + 1/\dots)$$

$$MTBF = \dots \text{ h}$$

$$c) R(MTBF) = e^{-\left(\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}\right)\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

C'est une fiabilité

d) Durée de vie nominale L_{10}

$$L_{10} = \gamma + \eta (0,105)^{1/\beta}$$

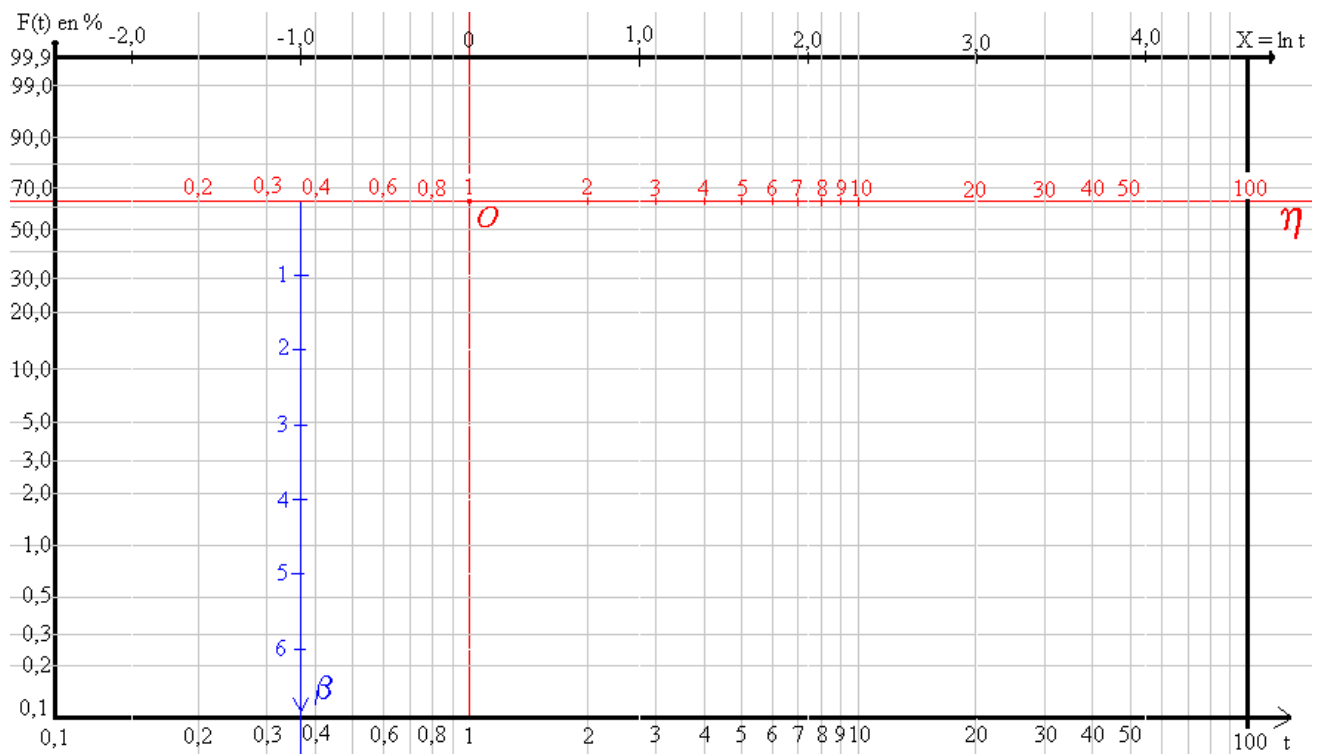
= heures

Exercice 2

Soit une série de 150 cellules solaires $N_0 > 50$ $F(i) = \frac{\sum ni}{N_0}$

Intervalles de temps Δt_i	Nb de défaillances			$\lambda(t_i)$	F(i)
	n_i	$\sum n_i$	N_i		
0 – 100	12		150		
100 – 200	10				
200 – 300	5				
300 – 400	4				
400 – 500	7				

- On a : $\lambda(t_i) = \frac{ni}{Ni.\Delta ti}$
- Calcul de λ par la loi de Weibull $\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$



On détermine

$\gamma =$ h

$\eta =$ h

$\beta =$

On a alors :

$\lambda_1 =$

$\lambda_2 =$

$\lambda_3 =$

$\lambda_4 =$

$\lambda_5 =$

Comparer aux valeurs du tableau.

Exercice 3

Exploitation des résultats d'essai de durée de vie

Soit un lot de 6 roulements en essai de durée de vie :

N° Roulement	NB de cycles avant rupture TBFi
1	$4,0 \cdot 10^5$
2	$1,3 \cdot 10^5$
3	$9,8 \cdot 10^5$
4	$2,7 \cdot 10^5$
5	$6,6 \cdot 10^5$
6	$5,2 \cdot 10^5$

Faire une analyse de fiabilité sur le modèle de Weibull. Faire une analyse des résultats.

Préparation des données

On classe les TBF par ordre croissant puis on calcule la fonction de défaillance $F(t_i)$.

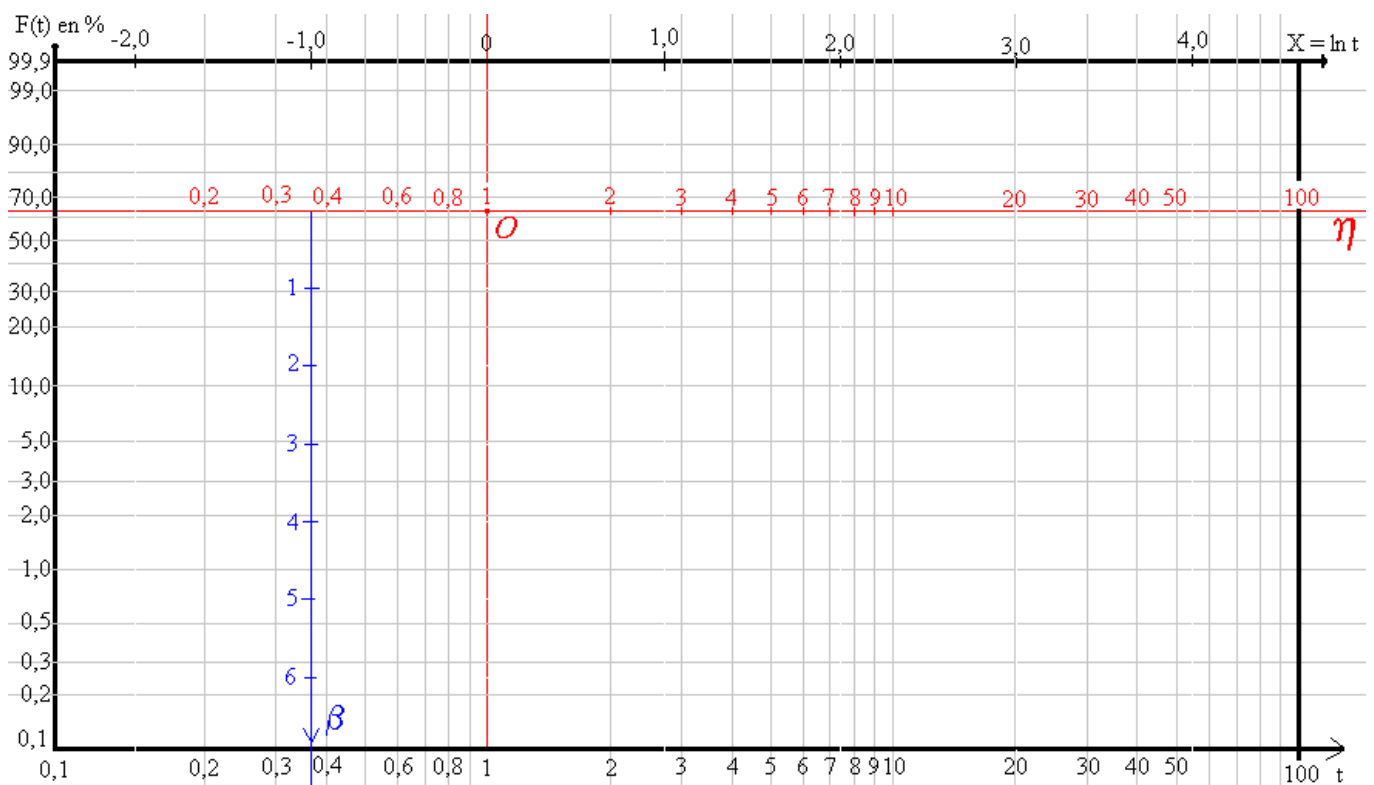
- Puisque $N = 6 < 20$, on approxime $F(t)$ par les rangs médians

$$F(i) = \frac{i - 0,3}{N + 0,4}$$

Ordre i	TBF (t_i) (cycles avant rupture)	$F(t_i)$ Rangs médians
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Détermination des paramètres de Weibull

On porte sur le papier de Weibull les couples de points ($F(t_i)$, TBF)



On obtient une droite D_1 , donc

D_1 coupe l'axe η en

$D_2//D_1$ coupe l'axe β en

$\gamma =$

$\eta =$

$\beta =$

cycles

cycles

Exploitation des paramètres

$\beta = 1,5$ caractérise un mode de dégradation par fatigue (cas des roulements)

- Durée de vie moyenne MTBF

$$MTBF = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \eta + \gamma = A\eta + \gamma \quad (\text{voir tableau des valeurs de } A)$$

pour $\beta = 1,5$; $A =$

d'où $MTBF =$ cycles

- Fiabilité associée à MTBF

Graphiquement :

pour $MTBF =$ cycles, on a : $F(t) =$ %

donc $R(t) = 1 - F(t) =$ %

Seuls % de roulements atteindront MTBF

- Durée de vie nominale

La durée de vie nominale notée L_{10} est associée à la fiabilité prévisionnelle $R(L_{10}) = 0,9$, c-à-d la durée atteinte ou dépassée par 90% des roulements.

Graphiquement on obtient L_{10} pour $F(t) = 10$ % car $F(t) = (100 - 90) = 10$ % et donc :

$$L_{10} = \text{cycles.}$$

Analytiquement

$$L_{10} = \gamma + \eta(0,105)^{1/\beta} = \text{cycles}$$

Sur 100 roulements en fonctionnement, 10 seraient déjà défectueux à $t = 1,25 \cdot 10^5$ cycles

Autrement dit : dans le cas de la maintenance préventive systématique, si on change 100 roulements à $T = 1,25 \cdot 10^5$ cycles, 90 seraient toujours en bon état de fonctionnement. Ceci montre le gaspillage que cette politique de maintenance entraînerait.

Une maintenance conditionnelle (analyse de vibration) est ici recommandée.

Remarque

A partir de six essais sur les durées de vie des roulements, l'étude a montré la richesse d'exploitation permise par le modèle de Weibull.

I.2.10 Méthode d'estimation des paramètres de la loi de Weibull

Estimation analytique (par moindres carrés) à utiliser lorsque l'on désire estimer les paramètres μ et β de la loi de Weibull.

Il est nécessaire :

- de collecter les instants de défaillances
- utiliser un calculateur

- utiliser une table des rangs médians $F(i) = \frac{i}{N+1}$

Calculer $X_i = \ln t_i$ $i = 1, N$

$$Y_i = \ln \left(\frac{1}{1 - F(t_i)} \right)$$

$$\beta = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N Y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2}$$

puis $\eta^\beta = \exp \left[- \frac{\sum_{i=1}^N X_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N X_i Y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2} \right]$

CHAPITRE II : MAINTENABILITE ET DISPONIBILITE DES EQUIPEMENTS

II.1 NOTION DE MAINTENABILITE

II.1.1 Définition (AFNOR X 60-010)

Dans des conditions données d'utilisation, aptitude d'un bien à être maintenu ou rétabli dans un état où il peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, en utilisant des procédures et des moyens prescrits.

Probabilité de rétablir un système dans des conditions de fonctionnement spécifiées, en des limites de temps désirées, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions et avec des moyens prescrits.

* probabilité

$$\begin{aligned} M(t) &= \text{Prob} (TTR < t) & TTR : \text{Temps Technique de Réparation} \\ &= \text{Prob} (\text{pour qu'un système arrête au temps } t = 0, \text{ soit en service au temps } t). \end{aligned}$$

* conditions de fonctionnement

Niveau de performance et seuil d'admissibilité

* limites de temps

Temps alloué à chaque intervention avec un délai t

* maintenance prescrite

Procédures, logistique, personnel

II.1.2 La fonction maintenabilité

De manière analogue à la fiabilité, on définit une densité de probabilité de réparation notée ici $g(t)$ telle que la maintenabilité soit égale à :

$$M(t) = \int_0^t g(t) dt \quad t \text{ est la variable } \underline{\text{temps de réparation}}$$

On définit le taux de réparation noté $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - M(t)} \quad \begin{array}{l} \text{nombre d'arrêts par heure de production perdue en raison des} \\ \text{interventions de maintenance} \end{array}$$

II.1.3 Temps moyen de réparation (MTTR)

Par définition :

$$MTTR = \frac{\text{Temps cumulé de réparation pour maintenance corrective}}{\text{Nombre total d'interventions}}$$

Ni : nombre de composants identiques utilisés dans des conditions semblables.
 λ_i : taux de défaillance du composant
Ti : estimation de la durée des tâches de réparation (diagnostic + réparation + contrôle) du composant.

Remarque

Le MTTR ne doit pas tenir compte des temps perdus, ou temps « morts », dus à des problèmes logistiques ou administratifs : temps d'attente pour indisponibilités des techniciens, des outils ou des rechanges.

Le MTTR, Moyenne des Temps Techniques de Réparation (Mean Time To Repair) s'écrit :

$$MTTR = \int_0^{+\infty} t - g(t).dt$$

Lorsque $\mu(t) = \text{cste}$ $M(t) = 1 - e^{-\mu t}$ et $MTTR = 1/\mu$ et $\mu = \frac{1}{MTTR}$

Les TBF (Temps de Bon Fonctionnement) caractérisent la fiabilité

Les TTR (Temps Technique de Réparation) caractérisent la maintenabilité.

II.2 NOTION DE DISPONIBILITE

II.2.1 Définition

Aptitude d'un bien à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données, à un instant donné ou durant un intervalle de temps donné, en supposant que la fourniture des moyens extérieurs nécessaires est assurée.

La disponibilité est la probabilité de bon fonctionnement d'un dispositif à l'instant t.

Un matériel **disponible** est un matériel dont on peut se servir. La disponibilité dépend donc de :

- | | | |
|---|---|----------------|
| - du nombre de défaillance | ➔ | Fiabilité |
| - de la rapidité de réparation | ➔ | Maintenabilité |
| - des procédures de mise en œuvre | ➔ | Maintenance |
| - de la qualité des moyens mis en œuvre | ➔ | Logistique |

Augmenter la disponibilité D d'un matériel consiste à réduire le nombre de ses arrêts (fiabilité) et à réduire le temps mis à les résoudre (maintenabilité). D est définie par :

$$D = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \quad \equiv \quad D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

ou bien :

$$D = \frac{1}{1 + \frac{MTTR}{MTBF}}$$

$\frac{MTTR}{MTBF}$ est appelé « rapport de maintenance ».

Le TTR ne prend pas en compte les temps d'attente pour indisponibilité des techniciens, des outils et des pièces de rechange, ni les temps morts (arrêts de travail, commandes...)

Lorsque les TA sont trop grands par rapport au TTR, d'autres expressions de la disponibilité D peuvent être utilisées.

$$D_g = \frac{MTBF}{MTBF + MTA} \quad \text{Disponibilité global}$$

MTA : Moyenne des Temps d'Arrêt

$$D = \frac{MTBM}{MTBM + MMT} \quad \text{Prise en compte des actions préventives}$$

MTBM : Moyenne des temps entre action de Maintenance

MMT : Moyenne des temps d'interventions préventive et corrective

$$D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR + MTL}$$

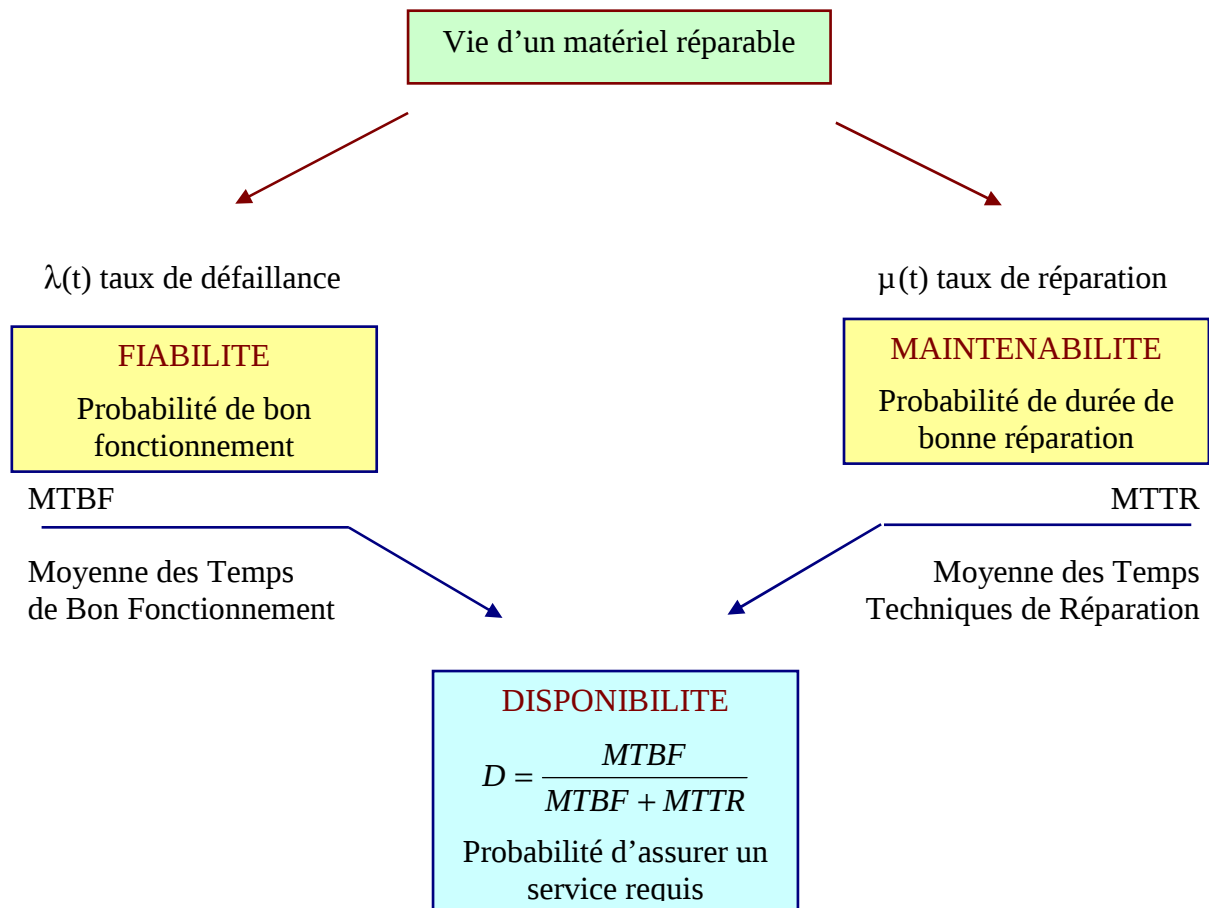
MTL : Moyenne des Temps Logistiques (transport...)

$$D = \frac{MTBF + RT}{MTBF + RT + MDT}$$

RT : Ready Time = temps moyen pour lequel le système peut fonctionner mais reste en attente

MDT = MMT + MTL + MTA (Temps Administratif)

II.2.2 Relation Fiabilité-Maintenabilité-Disponibilité



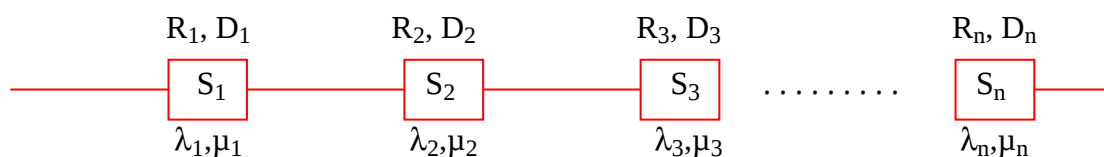
II.2.3 Disponibilité d'une chaîne de production

Soit une chaîne de production constituée de n éléments :

- si la défaillance d'un élément entraîne celle de la chaîne et si les défaillances sont indépendantes, l'ensemble est dit « en série »
- s'il suffit que l'un des éléments fonctionne pour que la chaîne fonctionne, alors l'ensemble est dit « en parallèle »

II.2.3.1 Matériel en série

Soit un système de production constitué de n équipements travaillant en série. Chaque équipement est caractérisé par un taux de défaillance λ_i et un taux de réparation μ_i , une fiabilité R_i et une disponibilité D_i .



On peut écrire que le « λ_g » taux global de défaillance est égal à :

$$\lambda_g = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{voir loi exponentielle})$$

On détermine la **fiabilité résultante** du système par :

$$\begin{aligned} R &= P(S) && \text{probabilité pour que S fonctionne à l'instant t} \\ &= P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \dots \dots \cap S_n) \\ &= P(S_1).P(S_2).P(S_3) \dots \dots P(S_n) \end{aligned}$$

soit :

$$R(t) = R_1(t) \times R_2(t) \dots \dots \times R_n(t)$$

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } R_i(t) = e^{-\lambda_i.t} \quad \text{alors } R(t) &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i.t} = e^{-\lambda_1.t} e^{-\lambda_2.t} \dots \dots e^{-\lambda_n.t} \\ &= e^{-\sum \lambda_i.t} = e^{-\lambda_g.t} \end{aligned}$$

Exemple

- Chaîne de : 10 unités de $R_i = 0,99$ $\rightarrow$ R chaîne = 0,91
- Chaîne de : 9 unités de $R_i = 0,99$ $\left. \begin{array}{l} \\ 1 \text{ unité de } R = 0,80 \end{array} \right\} \rightarrow$ R chaîne = 0,73

Dans un système série, la fiabilité du système est plus petite que la plus petite des fiabilités des éléments qui le composent.

Pour le calcul de la **disponibilité résultante**, soit :

$$MTTR_s = \frac{\sum_{i=1}^n MTTR_i \times \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Chaque MTTR est pondéré par son taux de défaillance, $MTTR_i = 1/\mu_i$ d'où :

$$MTTR_s = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

D'autre part, (résultat connu) :
$$D_s = \frac{\mu_s}{\mu_s + \lambda_s}$$

on en déduit :
$$D_s = \frac{\frac{\sum \lambda_i}{\sum (\frac{\lambda_i}{\mu_i})}}{\frac{\sum \lambda_i}{\sum (\frac{\lambda_i}{\mu_i}) + \sum \lambda_i}}$$

puis :
$$D_s = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}} = \frac{1}{1 - n + n + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}}$$

$$= \frac{1}{-(n-1) + \left[\frac{\lambda_1}{\mu_1} + 1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + 1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu_n} + 1 \right]}$$

$$= \frac{1}{-(n-1) + \left[\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_2} + \dots + \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_n} \right]}$$

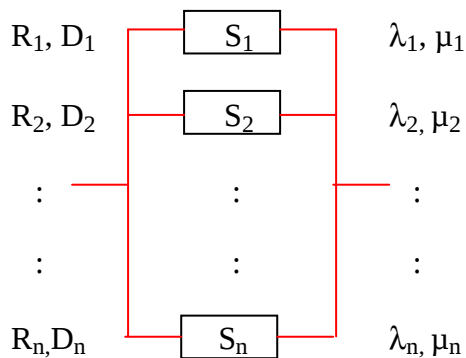
Enfin,
$$D = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{D_i} - (n-1)}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ et $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$

$$D = \frac{\mu}{n\mu + \lambda}$$

II.2.3.2 Matériel en parallèle

Soit un système S composé de n équipements montés en parallèle :



La fiabilité résultante est :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - Ri(t))$$

En effet, soit la fonction de défaillance du système F(t) :

$$F(t) = \bar{R}(t) = 1 - R(t)$$

$$\begin{aligned} F &= P(\bar{S}) \quad \text{probabilité pour que S soit défaillant à un instant t} \\ &= P(\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3 \dots \dots \cap \bar{S}_n) \\ &= P(\bar{S}_1).P(\bar{S}_2).P(\bar{S}_3) \dots \dots P(\bar{S}_n) \\ &= F_1 \times F_2 \dots \dots \times F_n = (1-R_1) \times (1-R_2) \dots \dots \times (1-R_n) \end{aligned}$$

et $R = 1 - F = 1 - (1-R_1) \times (1-R_2) \dots \dots \times (1-R_n)$

d'où $R(t) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - Ri(t))$

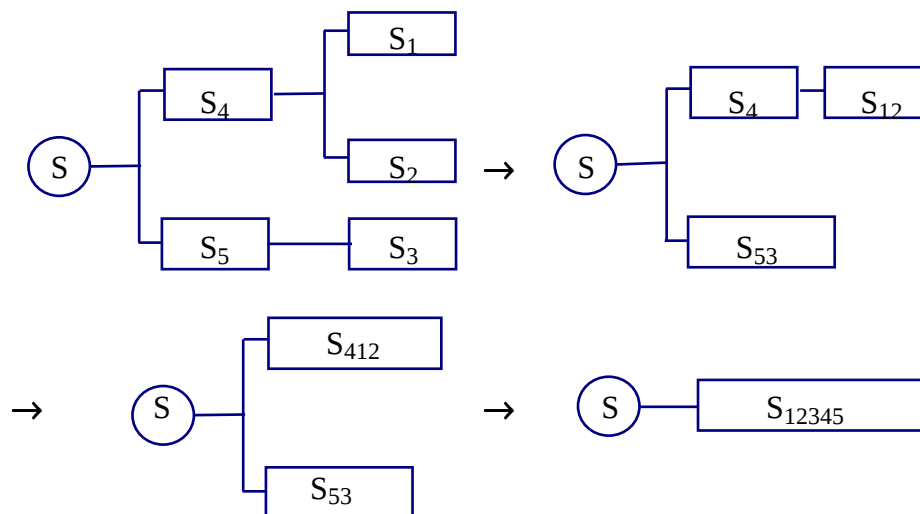
Plus il y a de composants en parallèle, meilleure est la fiabilité.

Dans un système parallèle, la fiabilité du système est plus grande que la plus grande des fiabilités des éléments qui le composent.

II.2.3.3 Cas général

En cas où le système est complexe, on le décompose en un certain nombre de « blocs » simples.

On procède par réductions successives à partir des formules précédentes. Si le système ne peut se décomposer, on utilise des techniques numériques de résolutions.



II.2.4 Amélioration de la fiabilité d'une chaîne de production

Trois types de redondance possible :

- redondance active
- redondance passive ou « stand by »
- redondance majoritaire

Redondance

Existence dans un bien de plus d'un seul moyen à un instant donné pour accomplir une fonction requise.

Redondance active → système en parallèle

Redondance dans laquelle il est prévu que tous les moyens pour accomplir une fonction requise soient simultanément en fonctionnement.

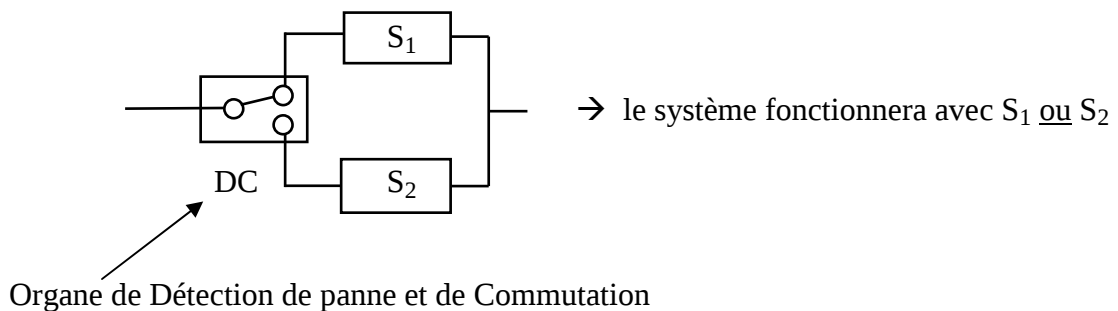
Pour $\lambda = \text{cte}$
$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t})$$

Redondance passive

Redondance dans laquelle il est prévu qu'une partie des moyens nécessaires pour accomplir une fonction requise est en fonctionnement, le reste de ces moyens n'étant utilisé qu'en cas de besoin.

Dans ce cas seule une partie des éléments fonctionne, l'autre partie est en attente → diminue le vieillissement des éléments de la chaîne.

Système à deux éléments



Hypothèses

- le taux de défaillance de S₁ et S₂ est constant : λ_1, λ_2
d'où $R_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$ et $R_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$
- la fiabilité de l'organe DC est égale à 1
DC est en série avec le système (S₁, S₂)

La fiabilité $R(s) = P(\text{S marche avec } S_1) \times P(S_1)$

$$+ P(\text{S marche} / S_1 \text{ ne marche pas}) \times P(\bar{S}_1)$$

↑ S₁ défaillant

On montre que :

$$R(t) = \frac{\lambda_1 \cdot e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

En tenant compte de l'élément DC (en série avec S_1 , S_2)

$$\Rightarrow R(t) = e^{-\lambda_{DC} t} \cdot \frac{\lambda_1 \cdot e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\Rightarrow R(t) = e^{-\lambda_{DC} t} \cdot e^{-\lambda t} \cdot (1 + \lambda t)$$

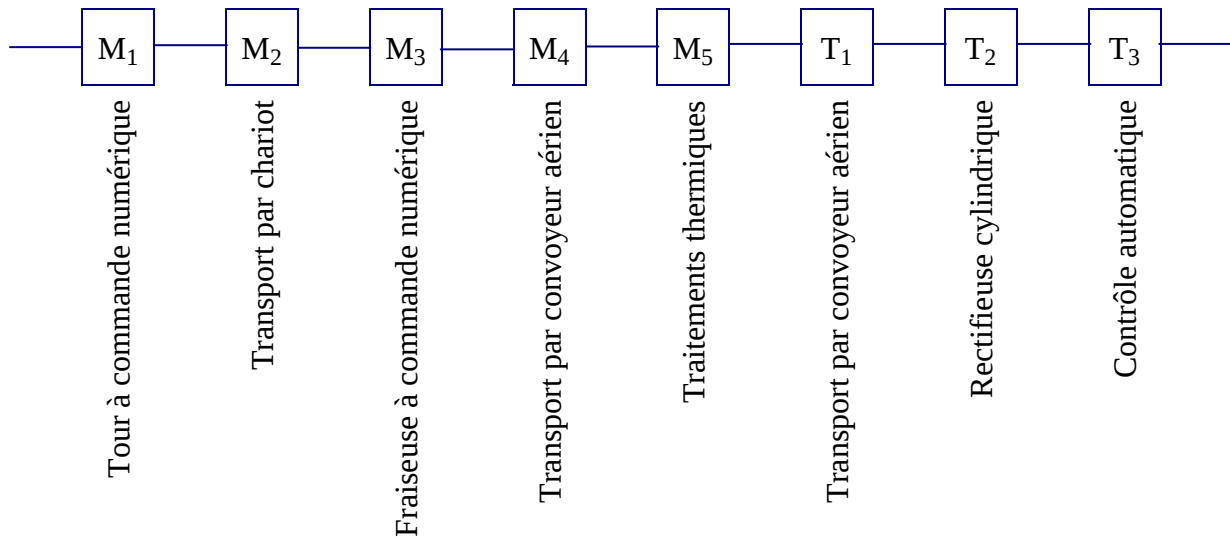
$$R(t) = e^{-(\lambda_{DC} + \lambda)t} \cdot (1 + \lambda t)$$

Pour n éléments en parallèle :

$$R(t) = e^{-(\lambda + \lambda_{DC})t} \cdot \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right]$$

Exemple 1

Dans un processus de production on a le schéma suivant formant un système en série.



On prévoit une fiabilité de 0,9. On a pour chaque sous système :

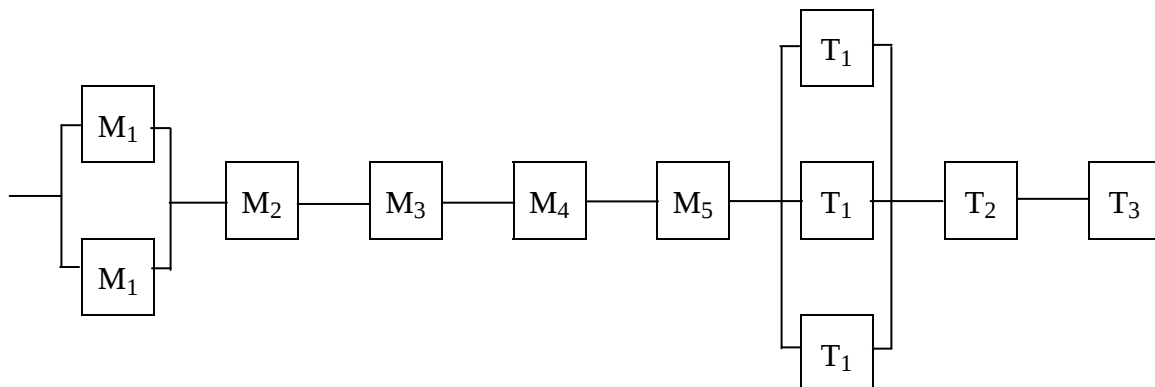
$$R_{M1} = 0,85 \quad R_{M2} = R_{M3} = R_{M4} = R_{M5} = 0,99$$

$$R_{T1} = 0,8 \quad R_{T2} = R_{T3} = 0,99$$

La fiabilité du système est : $R_S = R_{M1} \cdot R_{M2} \cdot R_{M3} \cdot R_{M4} \cdot R_{M5} \cdot R_{T1} \cdot R_{T2} \cdot R_{T3}$

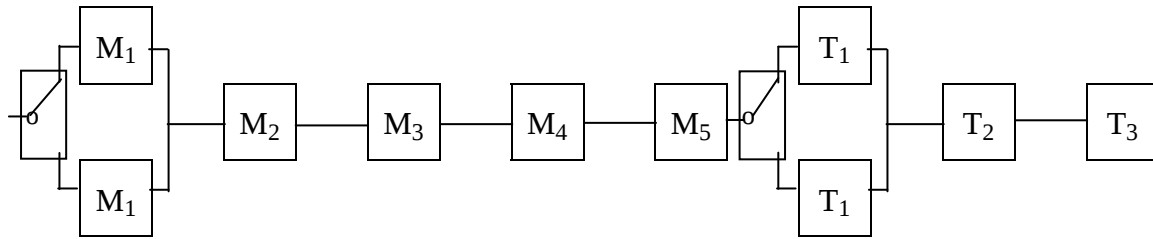
$$R_S = 0,85 \times 0,99^6 \times 0,80 = 0,64$$

On améliore le système en pratiquant des redondances sur les sous-systèmes les moins fiables. Par exemple, pour une **redondance active** : utiliser 3 sous systèmes T_1 et 2 sous-systèmes M_1 en redondances



C'est une solution qui coûte chère mais qui augmente la fiabilité. On obtient $R_S = 0,91$

En utilisant une **redondance passive**, on peut utiliser uniquement 2 sous systèmes T_1 au lieu de 3, et 2 sous-systèmes M_1 en redondances.



$R_{M1}^{\text{passive}} = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$ $\text{or } R_{M1} = e^{-\lambda t} = 0,85$ $\Rightarrow \lambda \cdot t = 0,162$ $R_{M1}^{\text{passive}} = 0,85 \times (1 + 0,162) = 0,9877$	$R_{T1}^{\text{passive}} = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$ $\text{et } R_{T1} = e^{-\lambda t} = 0,8$ $\Rightarrow \lambda \cdot t = 0,223$ $R_{T1}^{\text{passive}} = 0,8 \times (1 + 0,223) = 0,978$
---	--

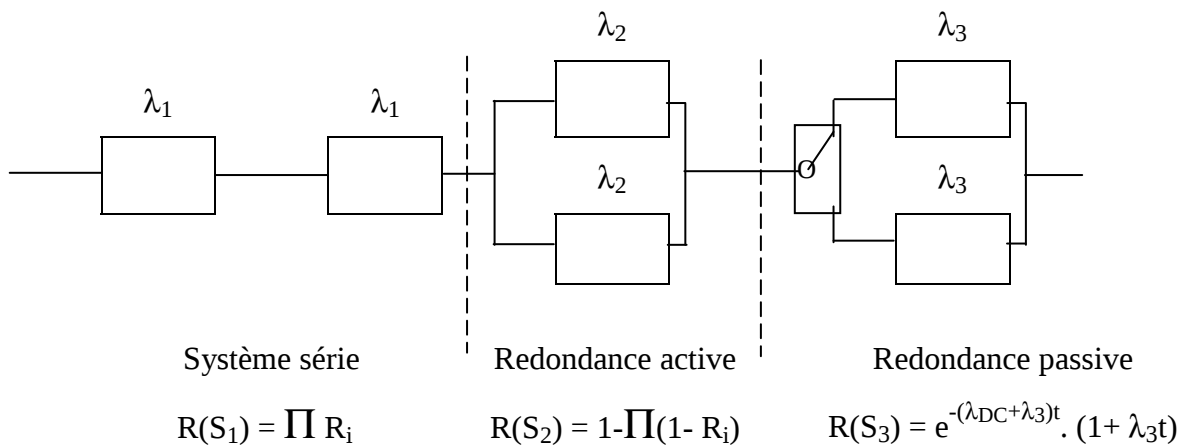
La fiabilité globale du système est alors égale à :

$$R_S = R_{M1}^{\text{passive}} \cdot R_{M2} \cdot R_{M3} \cdot R_{M4} \cdot R_{M5} \cdot R_{T1}^{\text{passive}} \cdot R_{T2} \cdot R_{T3}$$

$$= 0,909$$

Exemple 2

On a un système complexe composé de trois types d'assemblage. On demande de trouver la fiabilité du système au bout de 100 h de fonctionnement



$\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-3}$	$\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-3}$	$\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_{DC} = 0$	$\Leftrightarrow R_{DC} = 1$	

La fiabilité globale du système est : $R(S) = R(S_1) \cdot R(S_2) \cdot R(S_3)$

$R_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$	$R_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$
$R_1(100) = 0,67$	$R_2(100) = 0,60$

$$R(S_1) = \prod R_i = 0,45 = 45\%$$

$$R(S_2) = 1 - \prod (1 - R_i) = 0,84 = 84\%$$

$$R(S_3) = e^{-(\lambda_{DC} + \lambda_3)t} \cdot (1 + \lambda_3 t) = 0,96 = 96\%$$

et $R(S) = R(S_1) \cdot R(S_2) \cdot R(S_3) = \mathbf{0,36 = 36\%}$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4 \cdot 10^{-3}$

$$R(S_1) = 0,45$$

$$R(S_2) = 0,89$$

$$R(S_3) = 0,938$$

La redondance passive présente la meilleure fiabilité et $R(S) = 0,375$.

Exercice 1

Deux chariots de manutention travaillant en redondance active. Leur loi de durée de vie est du type exponentiel $R(t) = e^{-\lambda t}$.

La MTBF de un chariot est de 54 heures. Quelle est la fiabilité du système au bout de 16 h ?

On peut calculer $\lambda = \frac{1}{MTBF} =$

$$R_1(t) = R_2(t) = e^{-\frac{t}{54}} \quad \text{d'où} \quad R_1(16) = R_2(16) = e^{-\frac{16}{54}} = 0,74$$

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - R_i)$$

$$R(16) = 1 - (1 - e^{-\frac{16}{54}})^2 =$$

En redondance passive, avec $R_{DC} = 1$

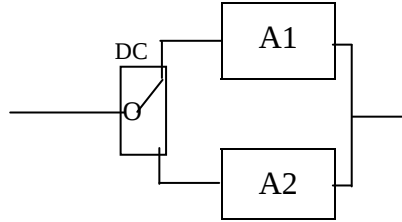
$$R(t) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

puisque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \rightarrow \quad R(t) = e^{-\lambda t} \cdot (1 + \lambda t) = e^{-\frac{t}{54}} \cdot (1 + \frac{t}{54})$

$$R(16) = e^{-\frac{16}{54}} \cdot (1 + \frac{16}{54}) =$$

Exercice 2

On a le système suivant :



L'élément 1 fonctionne, s'il tombe en panne, le système de commutation DC bascule sur 2.

- le système de commutation a une fiabilité 1
- la loi de fiabilité est exponentielle de paramètre λ

Donner la fiabilité du système redondant pour 500 h de fonctionnement avec :

$$\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = 2.10^{-5} \text{ déf/h}$$

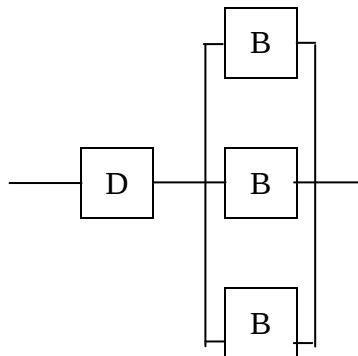
$$\lambda_{DC} = 5.10^{-6} \text{ déf/h}$$

$$R = e^{-(\lambda_{DC} + \lambda_A)t} \cdot (1 + \lambda_A t)$$

$$R(500) = e^{-(5.10^{-6} + 2.10^{-5})t} \cdot (1 + 2.10^{-5} \cdot 500)$$

$$=$$

Exercice 3



Redondance majoritaire

$$\lambda_B = 2.10^{-6} \text{ déf/h}$$

$$\lambda_D = 3.10^{-7} \text{ déf/h}$$

$$R = R_D = \sum_{k=2}^3 C_3^k R^k (1-R)^{3-k}$$

$$= (3 - R_B^2 - 2R_B^3) R_D$$

or :

$$R_B = e^{-\lambda_B \cdot t}$$

$$= e^{-2.10^{-6} \cdot t}$$

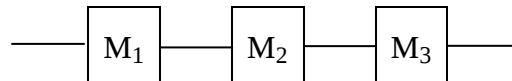
$$R_D = e^{-\lambda_D \cdot t}$$

$$= e^{-3.10^{-7} \cdot t}$$

$$\begin{aligned}
 R(500) &= e^{-3.10^{-7}.t} \cdot (3.e^{-2\lambda_B.t} - 2R^{-3\lambda_B.t}) \\
 &= e^{-3.10^{-7}.500} (3e^{-2.2.10^{-6} \cdot 500} - 2e^{-3.2.10^{-6} \cdot 500}) \\
 &= e^{-15.10^{-5}} \times (3.e^{2.10^{-3}} - 2e^{3.10^{-3}}) \\
 R(500) &=
 \end{aligned}$$

Exercice 4

Un système de production peut être modélisé en série par :



Il comprend 3 machines de données suivantes :

en fiabilité	M ₁ : MTBF = 150 h	→	λ ₁ = 1/150
	M ₂ : MTBF = 200 h	→	λ ₂ = 1/200
	M ₃ : MTBF = 100 h	→	λ ₃ = 1/100

En maintenabilité	M ₁ : MTTR = 4 h
	M ₂ : MTTR = 6 h
	M ₃ : MTTR = 1 h

Donner la fiabilité puis la disponibilité du système.

$$R(t) = \prod_{i=1}^3 R_i = \prod_{i=1}^3 e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^3 \lambda_i t} = e^{-\lambda_e t}$$

Comparer la fiabilité de chaque équipement à la fiabilité globale pour t = 10h et t = 100h.

$$D(S) = \frac{1}{\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_1} - 3 + 1} = \frac{1}{\frac{154}{150} + \frac{206}{200} + \frac{101}{100} - 2}$$

$$D(S) =$$