ENSET Mohammedia
Pr ECH-CHHIBAT

Robotique industrielle



Partie 1

- Introduction :
  - Culture générale en robotique
  - Concepts fondamentaux:
    - Géométrie, degrés de liberté, types d'actionneur, etc…
    - Applications de la robotique
  - Définitions et terminologie
- Les transformations homogènes:
  - Coordonnées homogènes : Qu'est-ce que c'est et pourquoi les utiliser?
  - Transformations 2D
  - Transformations 3D
- Cinématique directe
- Denavit-Hartenberg
- Cinématique inverse

généralités

- **Qu'est-ce qu'un robot? :**
  - Plusieurs définitions existent [1]:
    - [Dictionnaire]: (1) Une machine capable d'exécuter une série de tâches complexes automatiquement, spécifiquement celles programmées par ordinateur. (2) Une machine qui ressemble et qui agit comme un humain. (3) Un système qui effectue des tâches répétitives automatiquement. (4) Quelque chose guidé par un contrôle automatique.

généralités

- **Qu'est-ce qu'un robot? (suite) :**
  - [Définition de l'industrie [1]]: (1) Un manipulateur multifonctionnel et reprogrammable conçu pour déplacer du matériel, des pièces, des outils ou tout autre équipement spécialisé, via des intructions programmées.



  - [Définition philosophique]: Tout système autonome ou semi-autonome.

généralités

- **Quelques types de robots:**
  - Robots statiques: Robots ayant une base fixe (e.g. : les robots du laboratoires, les robots typiques d'une chaîne de production).

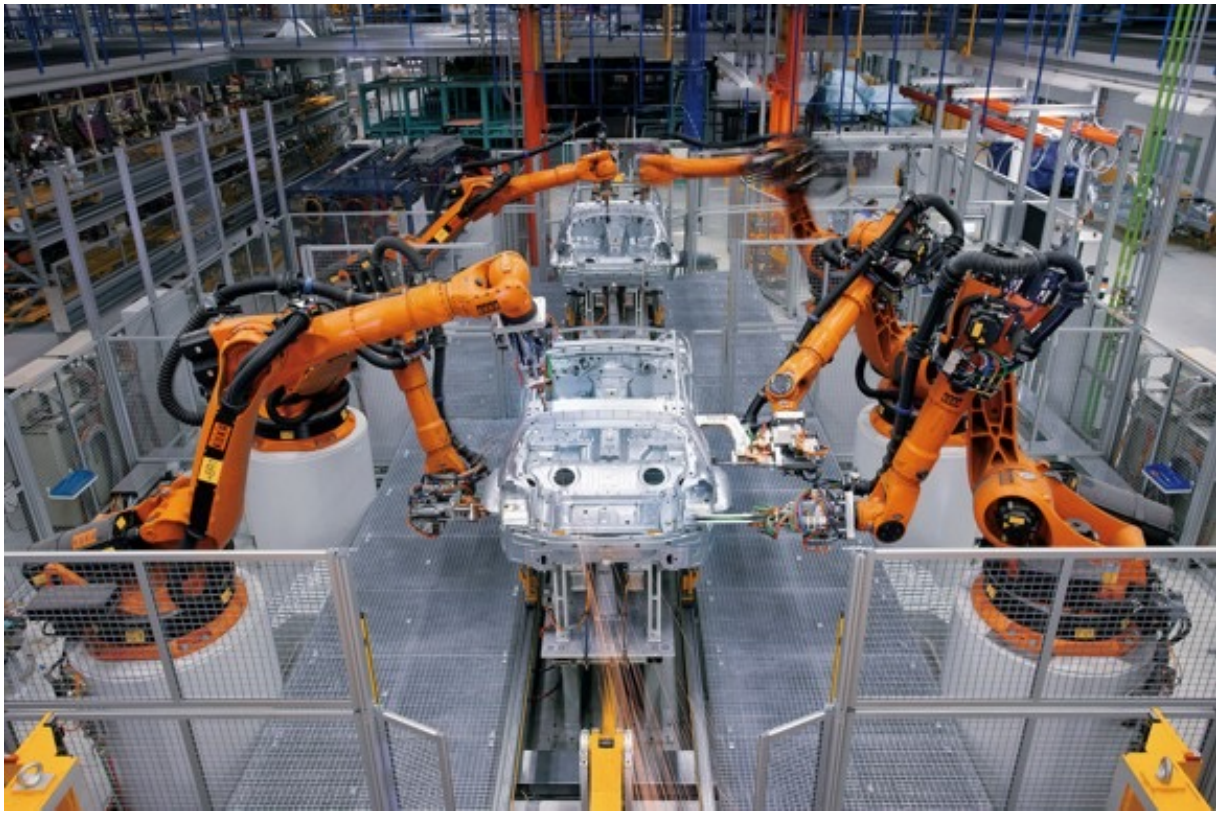


  - Robots mobiles: Robots qui se déplacent dans l'espace de travail (par exemple, les robots explorateurs de planètes tels que Curiosity, Spirit & Opportunity, Sojourner, etc…)



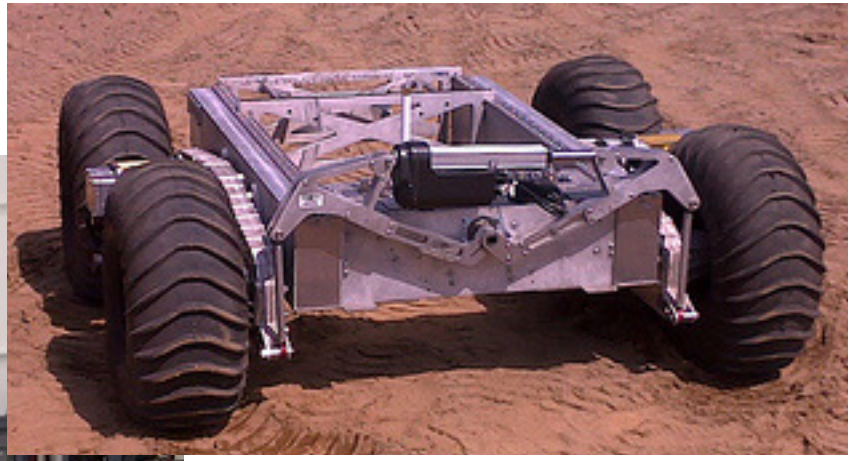
généralités

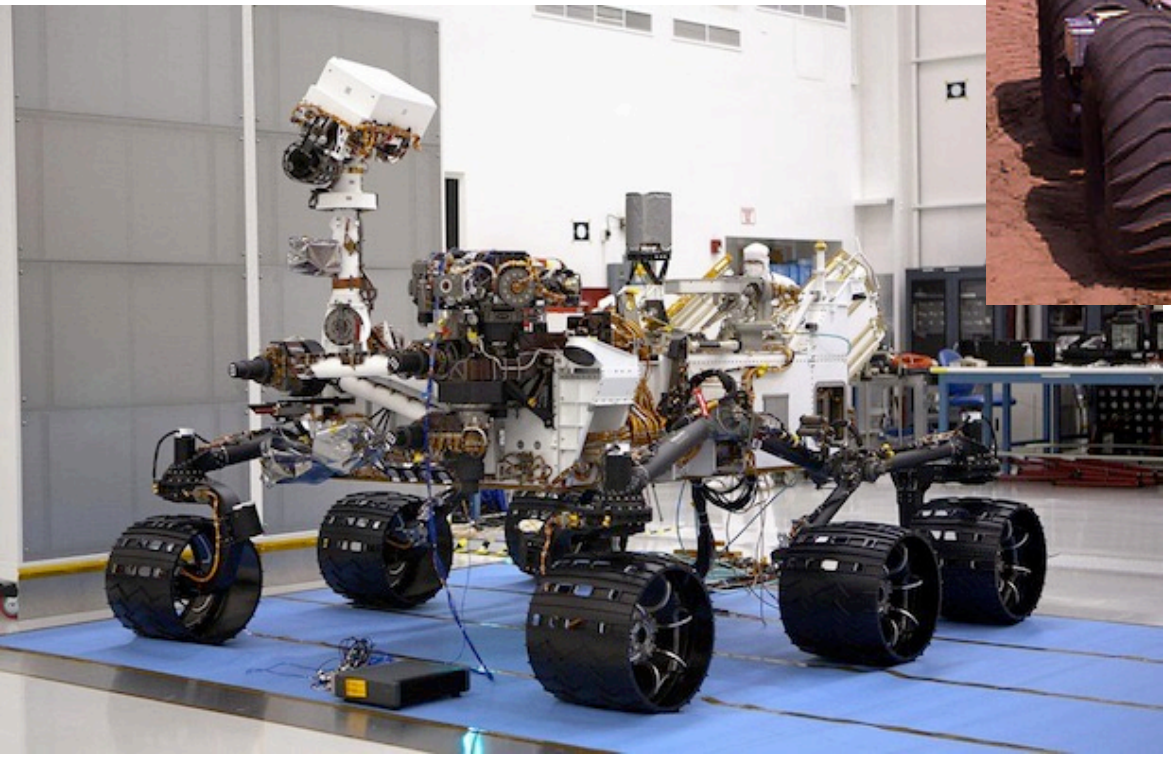
- **Quelques types de robots (suite):**
  - Robots statiques:



généralités

- **Quelques types de robots (suite):**
  - Robots mobiles:





généralités

- **Quelques types de robots (suite):**
  - Robots sériels: Robots composés d'un seul segment articulé formant une chaîne cinématique ouverte.



généralités

- **Quelques types de robots (suite):**
  - Robots parallèles: Robots composés de plusieurs segments articulés qui composent ensemble une chaîne cinématique fermée.

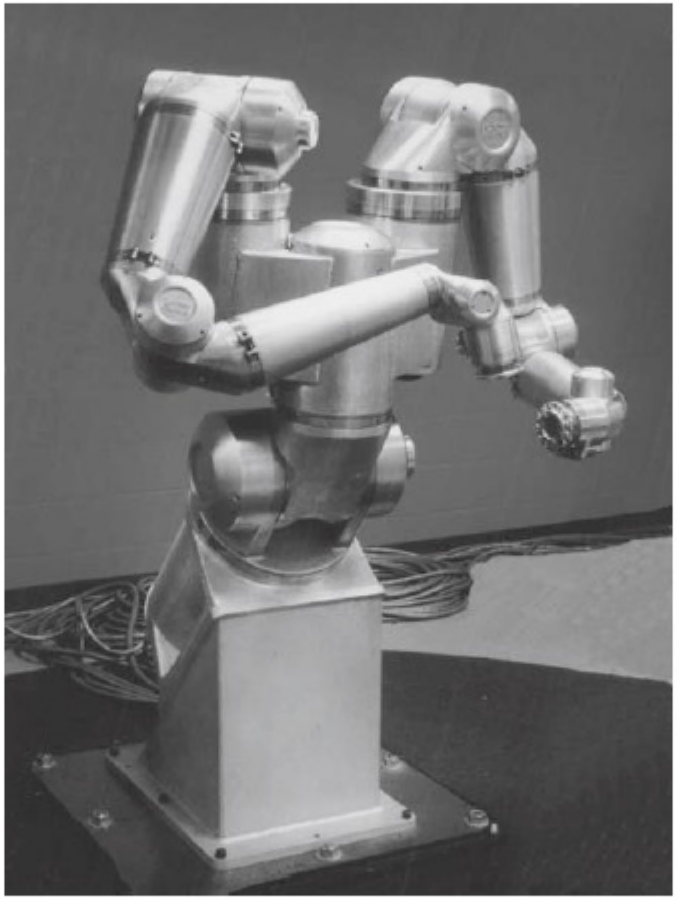






  - Un des grands avantages: Les moteurs ne sont pas dans les articulations comme la majorité des robots sériels. Excellent pour les tâches de types “Pick and Place”.
  - En contrepartie, espace de travail réduit et cinématique directe plus difficile.

généralités



généralités

- Types d'automatisation:
  - Automatisation programmable (Soft Automation):
    - Systèmes plus flexibles et capables de s'adapter à des changements de produits.
    - Production en courtes ou moyennes séries.



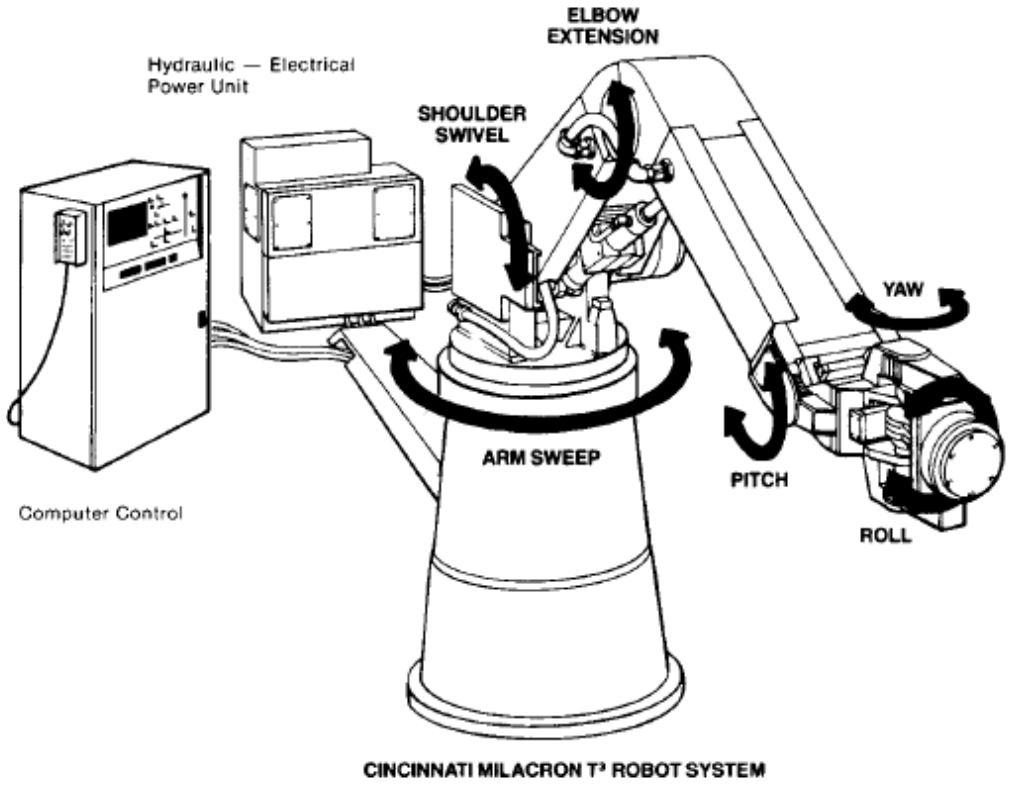
généralités

- **Définition(1):** Un manipulateur robotique est une machine composé de ***liens*** (segments, membres ou encore membrûres) connectés entres eux par des ***joints*** (liaisons) pour formé une ***chaîne cinématique***.

- **Définition(2):** Le nombre de degrés de liberté (D.D.L., en anglais Degrees of freedom) d'une liaison entre deux corps C1 et C2 est égal au nombre minimal de paramètres qui déterminent la position du corps C2 dans son mouvement permis par rapport au corps C1.

généralités

- Principaux composants d'un manipulateur robotisé:



Hydraulique



Électrique (labs)

Les actionneurs

- Afin de mouvoir chacun de ses segments, un robot sériel utilise des *actionneurs*. Différentes *technologies* d'actionneurs existent, en général:
  - Les actionneurs électriques
  - Les actionneurs hydrauliques (Souvent utilisés pour les charges lourdes)
  - Les actionneurs pneumatiques (Souvent utilisés par les préhenseurs ou autre outils)

Les liaisons (joints)

- Dans le cadre du cours, nous utiliserons principalement deux types de joints:
  - Les joints prismatiques (Prismatic joint), notés **P,** permettent un déplacement en translation.
  - Les joints rotoïdes (Revolute joint), notés **R**, permettent un déplacement en rotation.

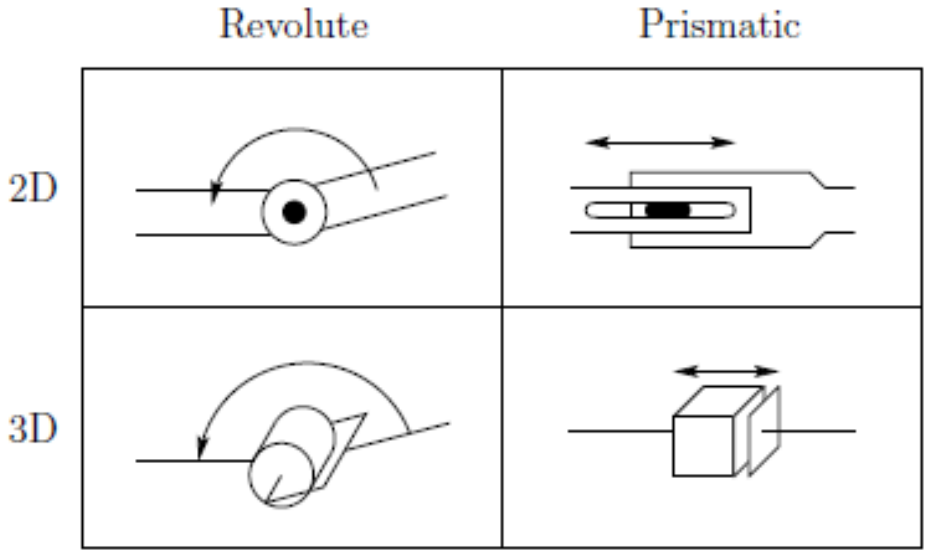


Fig. 1.2 Symbolic representation of robot joints.

Liaisons

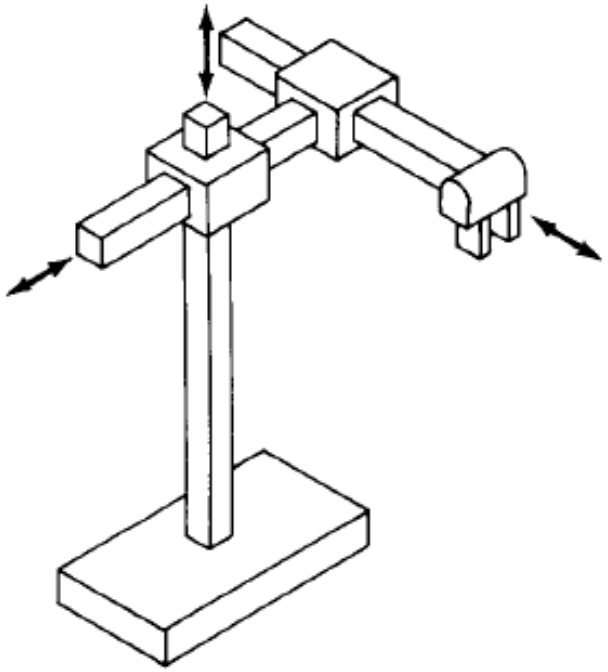
Géométrie d'un robot

- La géométrie d'un robot a une grande influence sur les possibilités d'éviter les obstacles et sur l'enveloppe de travail du robot. Le nombre de degrés de liberté ainsi que le type des articulations caractérisent la géométrie du robot.

- Des géométries fréquemment utilisées sont en particulier les géométries PPP, PRP & RPP, RRP et RRR.

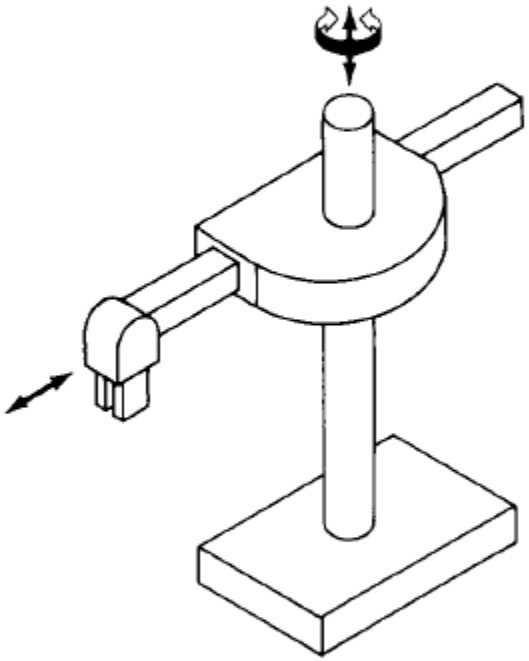
Géométries
PPP

- Le robot PPP (communément appelé le manipulateur cartsien):



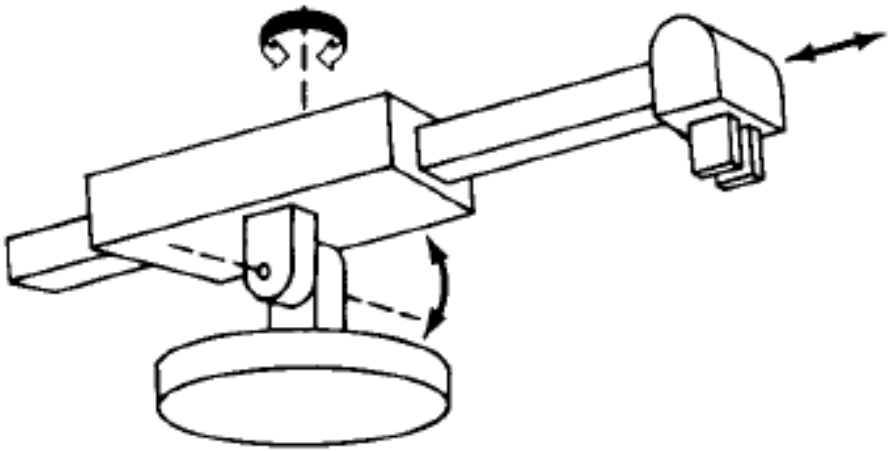
Géométries
PRP ou RPP

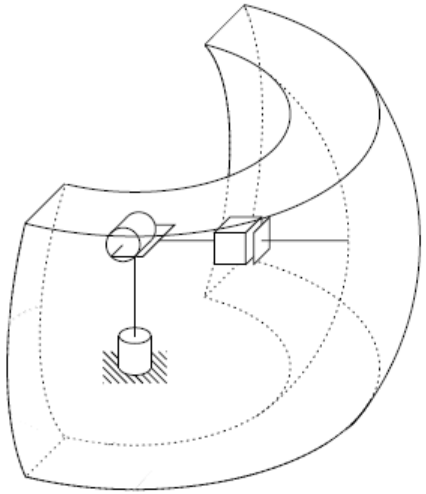
- Le robot PRP ou RPP, appelé le manipulateur cylindrique:



Géométries RRP

- Le robot RRP, appelé le manipulateur sphérique:





Workspace of the spherical manipulator.

Géométries SCARA

- Le robot SCARA (*Selective Compliant Articulated Robot Arm*), qui est aussi un RRP, mais toutefois différent du manipulateur sphérique ordinaire. Il est conçu spécifiquement pour des tâches d'assemblage.

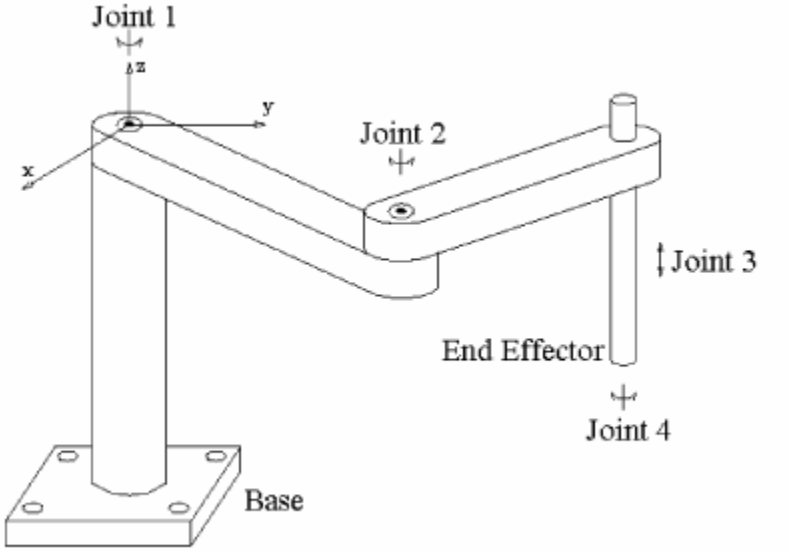
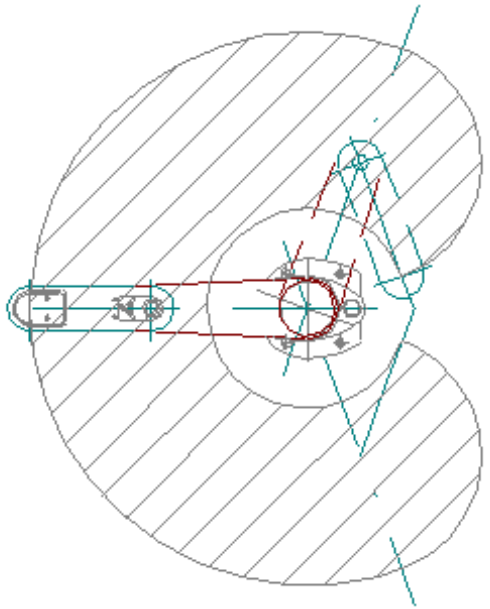
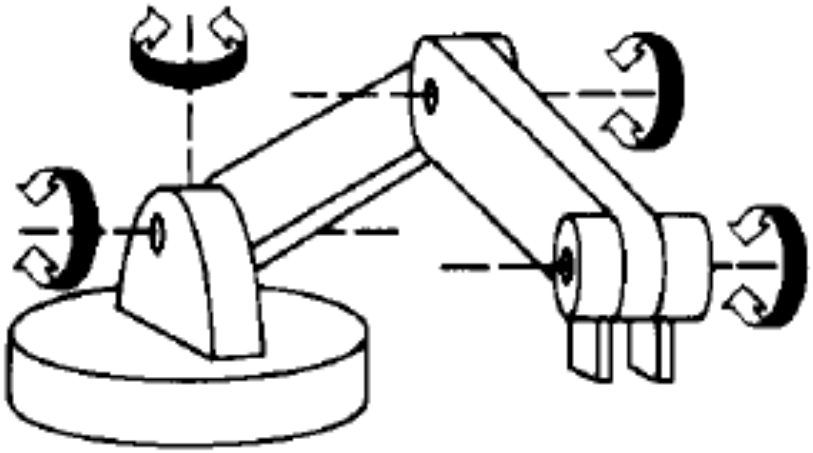


Figure 5. SCARA - Selective Compliance Assembly Robot Arm.



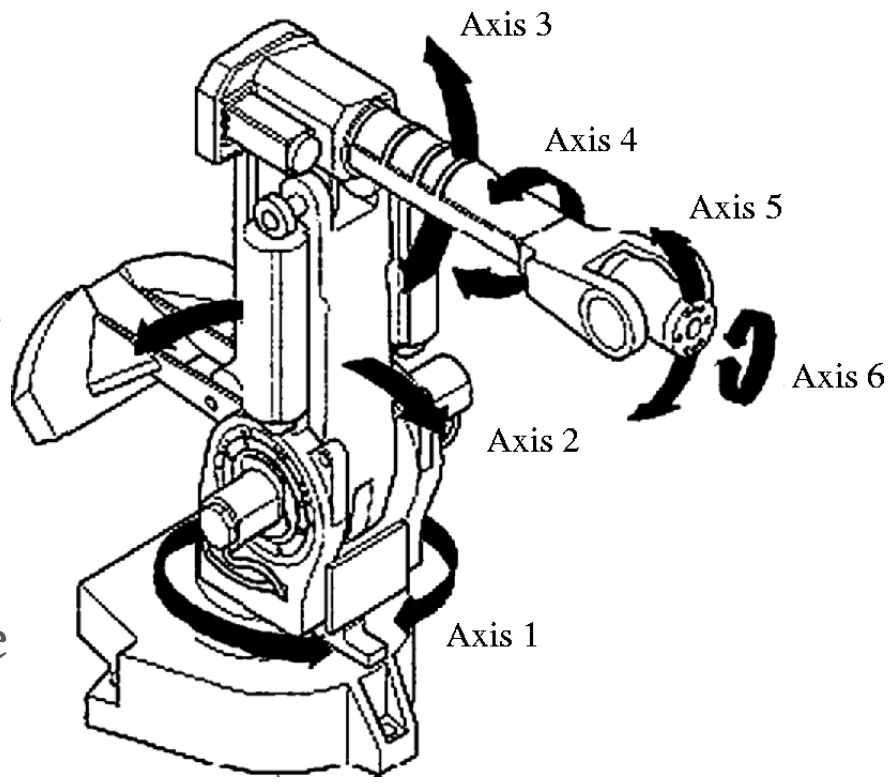
Géométries RRR

- Le robot RRR (ici c'est un RRRR), communément appelés manipulateurs articulés:



Géométries RRRRRR

- Les robots RRRRRR sont souvent surnommés manipulateurs anthropomorphiques puisqu'ils s'inspirent partiellement du bras humain: on dit souvent qu'ils ont un épaule, un coude et un poignet.
- Leur enveloppe de travail est beaucoup plus complexe que les autres types de robots vu précédemments. Leur cinématique directe ainsi que leur dynamique est aussi plus compliqué.



Modes d'opérations d'un robot (types de déplacement)

- ***Point par point***: Dans ce mode de fonctionnement, le robot se déplace d'un point à un autre sans que l'utilisateur puisse contrôler le chemin suivi entre les points.
- ***Suivi de trajectoires:*** C'est une trajectoire continue, et non un ensemble discret de points, que le robot cherche à suivre.

Applications de la robotique

- ***Il y a une énorme quantité d'applications pour la robotique…***
- ***Entres autres:***
  - L'industrie automobile (à ce jour, l'un des plus grands utilisateurs de manipulateurs robotiques).
  - Tâches répétitives tels que: la manutention, le soudage, la peinture, l'assemblage mécanique, manipulation d'échantillons.
  - Opérations en milieu hostiles: trouver des survivants après une catastrophe, opérations dans une centrale nucléaire, robotique spatiale (mars, satellites, etc…)
  - Aussi: Désamorçage d'objets explosifs, fabrications de prothèse, applications militaires (drônes, big dog, missiles), etc…

Caractéristiques (Terminologie et définitions)

- ***Nombre d'axes d'un robot:*** Le nombre d'axes que possède un robot désigne le positionnement que ce dernier peut faire en x,y et z, ainsi qu'en Θ_x , Θ_y, Θ_z . Ceci est souvent relié au nombre de degrés de liberté du robot.
  - Dans une majorité de cas, les robots œuvrant dans l'espace tridimensionnel ont six axes : trois pour le positionnement du poignet, et trois autres pour l'orientation de l'effecteur. Ces six axes font que, hors des configurations de singularité, le robot possède les six degrés de liberté nécessaires afin de positionner et d'orienter l'effecteur.
  - Certains robots ont plus de six degrés de liberté, ils sont redondants car ils possèdent plus d'axes que nécessaire pour positionner et orienter l'effecteur.

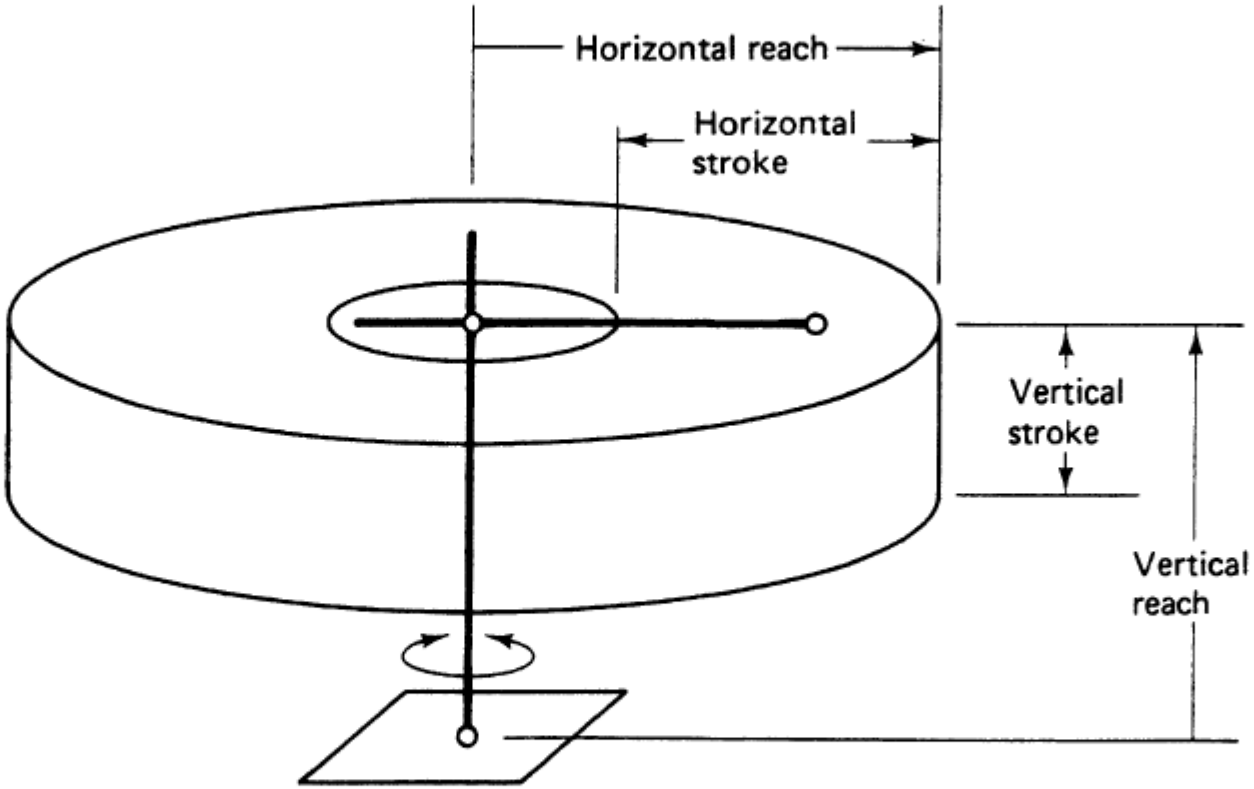
Caractéristiques (Terminologie et définitions)

- ***Capacité :*** La capacité est la charge utile (en kg) que peut déplacer un robot (normalement spécifiée lorsque le robot est complètement allongé donc dans le pire des cas).

- ***Vitesse de déplacement:*** Il s'agit de la vitesse maximale que peut atteindre le robot (par exemple, entre deux points).

- ***Portée et débattement:*** Ces deux paramètres donnent une indication de l'enveloppe de travail (workspace) d'un robot. La portée (*reach)* horizontale donne la distance radiale maximum entre l'effecteur et l'axe vertical passant par la base du robot. Le débattement (stroke) horizontal donne la distance radiale que l'effecteur peut parcourir. De façon similaire, on peut définir la portée verticale et le débattement vertical.

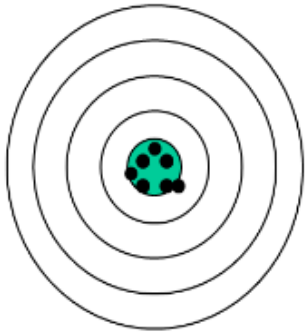
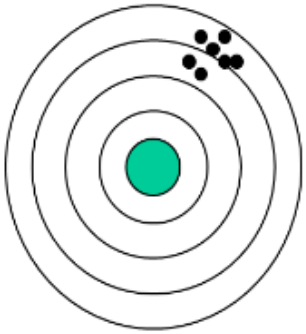
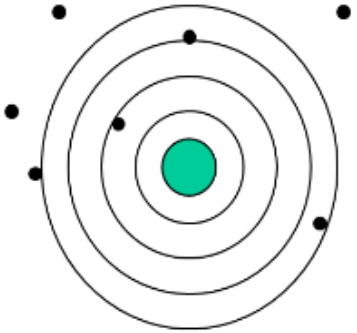
Caractéristiques (Terminologie et définitions)



Caractéristiques (Terminologie et définitions)

- ***Répétabilité:*** La répétabilité est une mesure de la capacité du robot de pouvoir retourner se positionner au même point de façon répétitive.
- ***Justesse:*** (Souvent appelée justesse statique, en anglais acuracy) est une mesure de la capacité du robot à se positionner à l'endroit demandé.
- ***Résolution spatiale:*** La résolution spatiale donne le plus petit incrément qu'il est possible de programmer entre deux positions voisines. La résolution est reliée à la résolution des encodeurs utilisés (ainsi qu'au ratio des engrenages) pour la mesure de position dans les articulations.

Caractéristiques (Terminologie et définitions)

	Accurate	Not Accurate
Repeatable		
Not Repeatable	N/A	

**Tiré de :
http://www.perceptron.com/index.php/en/company/university-of-perceptron/80.html

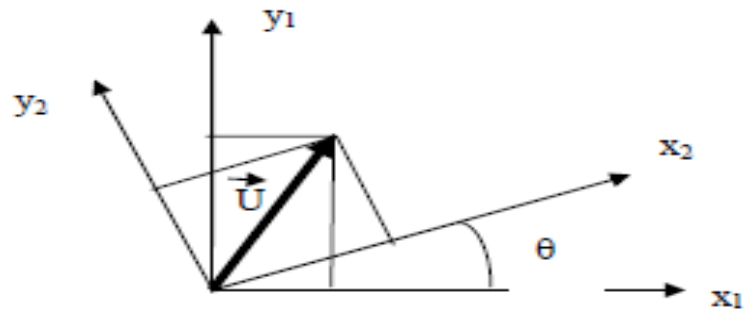
Caractéristiques (Terminologie et définitions)

- ***Conditions d'opérations***: Ce n'est certainement pas le même robot qui pourra évoluer dans le chargement / déchargement de fourneaux et pour la manutention de gaufrettes de silicone dans une salle blanche. Il faut soit protéger le robot de l'environnement, soit l'environnement du robot.
  - Se référer aux normes NEMA, ISO, IP-XX, etc…

Rappels mathématique
Matrices de passage

Transformation des coordonnées d'un vecteur $\vec{U}$ en 2D

$$\vec{U} = U_{x1}\vec{x}_1 + U_{y1}\vec{y}_1 = U_{x2}\vec{x}_2 + U_{y2}\vec{y}_2$$



La correspondance des vecteurs de base s'expriment par les deux équations :

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 \cos\theta + \vec{y}_1 \sin\theta$$
$$\vec{y}_2 = -\vec{x}_1 \sin\theta + \vec{y}_1 \cos\theta$$

Matrices de passage

ou symboliquement à travers la relation matricielle

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \end{bmatrix}$$

soit $\mathbf{X}_2 = \mathbf{R}_{21}\mathbf{X}_1$

R_{21} est dite matrice de passage de la base 1 vers la base 2

Matrices de passage

En exprimant les relations de correspondance des vecteurs de base

$$\vec{U} = U_{x2}\vec{x}_2 + U_{y2}\vec{y}_2 =$$
$$U_{x2}(\vec{x}_1 \cos\theta + \vec{y}_1 \sin\theta) + U_{y2}(-\vec{x}_1 \sin\theta + \vec{y}_1 \cos\theta) =$$
$$\vec{x}_1(U_{x2}\cos\theta - U_{y2}\sin\theta) + \vec{y}_1(U_{x2}\sin\theta + U_{y2}\cos\theta)$$

alors

$$U_{x1} = U_{x2}\cos\theta - U_{y2}\sin\theta$$
$$U_{y1} = U_{x2}\sin\theta + U_{y2}\cos\theta$$

ou symboliquement

$$\begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_{x2} \\ U_{y2} \end{bmatrix}$$

soit $\mathbf{U_1 = R_{12} U_2}$

Il est possible de vérifier à titre d'exercice que $\mathbf{R_{12}R_{21} = R_{21}R_{12} = 1}$

Matrices de passage

$\mathbf{R}_{12}$ est dite matrice de passage de la base 2 vers la base 1, c'est la matrice inverse de $\mathbf{R}_{21}$. Il faut remarquer que dans le cadre des matrices de rotation élémentaire il suffit de changer de signe l'angle de rotation pour avoir la matrice inverse.

$\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$ sont les représentations matricielles du vecteur $\vec{U}$ respectivement dans la base 1 et 2. $\vec{U}$ est la notation intrinsèque du vecteur c'est à dire indépendante de la base de décomposition.

Dans ce cas de rotation lorsque l'on se place dans un repère 3D où $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ sont les vecteurs des trièdres 1 et 2 perpendiculaires au plan considéré autour

Matrices de passage

desquels s'effectue la rotation alors les matrices de passage seront appelées matrices de rotation élémentaire en 3D et elle prendront la forme :

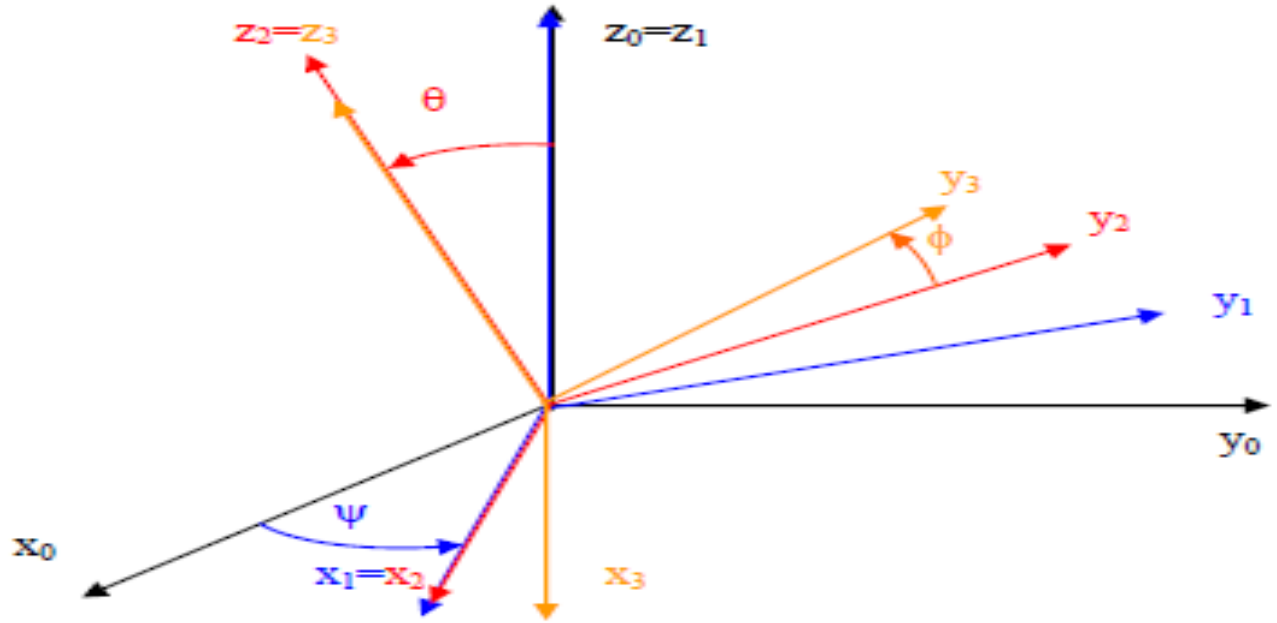
$$\mathbf{R}_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}_{21} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de transformation en rotations

Par exemple si on passe successivement du repère 1 au repère 2 puis au repère 3 en utilisant des rotations élémentaires autour d'un des trois axes du repère initial alors

$\mathbf{R}_{13}=\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}$

Angles d'Euler

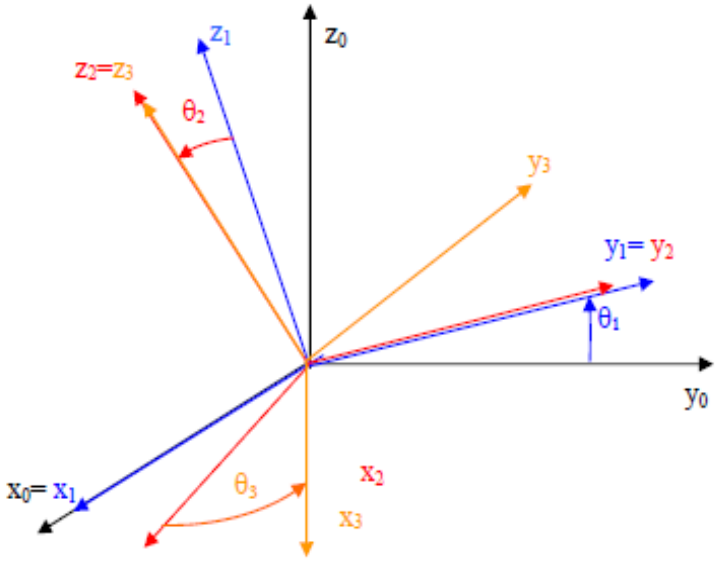


$$\mathbf{R}\psi = \begin{pmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}\theta = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{pmatrix} \mathbf{R}\varphi = \begin{pmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 \\ -s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{03}=\mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}=\mathbf{R}_{\psi}\mathbf{R}_{\theta}\mathbf{R}_{\phi}$$

Angles de Cardan

Définition de la décomposition en tangage, roulis et lacet



$x_0=x_1$ axe de roulis θ_{01}

$$R_r = R_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{01} & \sin\theta_{01} \\ 0 & -\sin\theta_{01} & \cos\theta_{01} \end{pmatrix}$$

$y_1=y_2$ axe de tangage θ_{12}

$$R_t = R_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & 0 & -\sin\theta_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_{12} & 0 & \cos\theta_{12} \end{pmatrix}$$

$z_2=z_3$ axe de lacet θ_{23}

$$R_l = R_{23} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} & 0 \\ -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R_{03}=R_{01}R_{12}R_{23}=R_rR_tR_l}$$

Angles de Cardan

Matrice de passage de R3 à R0:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta 2)\cos(\theta 3) & \cos(\theta 2)\sin(\theta 3) & \sin(\theta 2) \\ -\sin(\theta 1)\sin(\theta 2)\cos(\theta 3) - \cos(\theta 1)\sin(\theta 3) & -\sin(\theta 1)\sin(\theta 2)\sin(\theta 3) + \cos(\theta 1)\cos(\theta 3) & \sin(\theta 1)\cos(\theta 2) \\ -\cos(\theta 1)\sin(\theta 2)\cos(\theta 3) + \sin(\theta 1)\sin(\theta 3) & -\cos(\theta 1)\sin(\theta 2)\sin(\theta 3) - \sin(\theta 1)\cos(\theta 3) & \cos(\theta 1)\cos(\theta 2) \end{bmatrix}$$

Exercice

Calcul des angles à partir des coefficients de la matrice de rotation R03

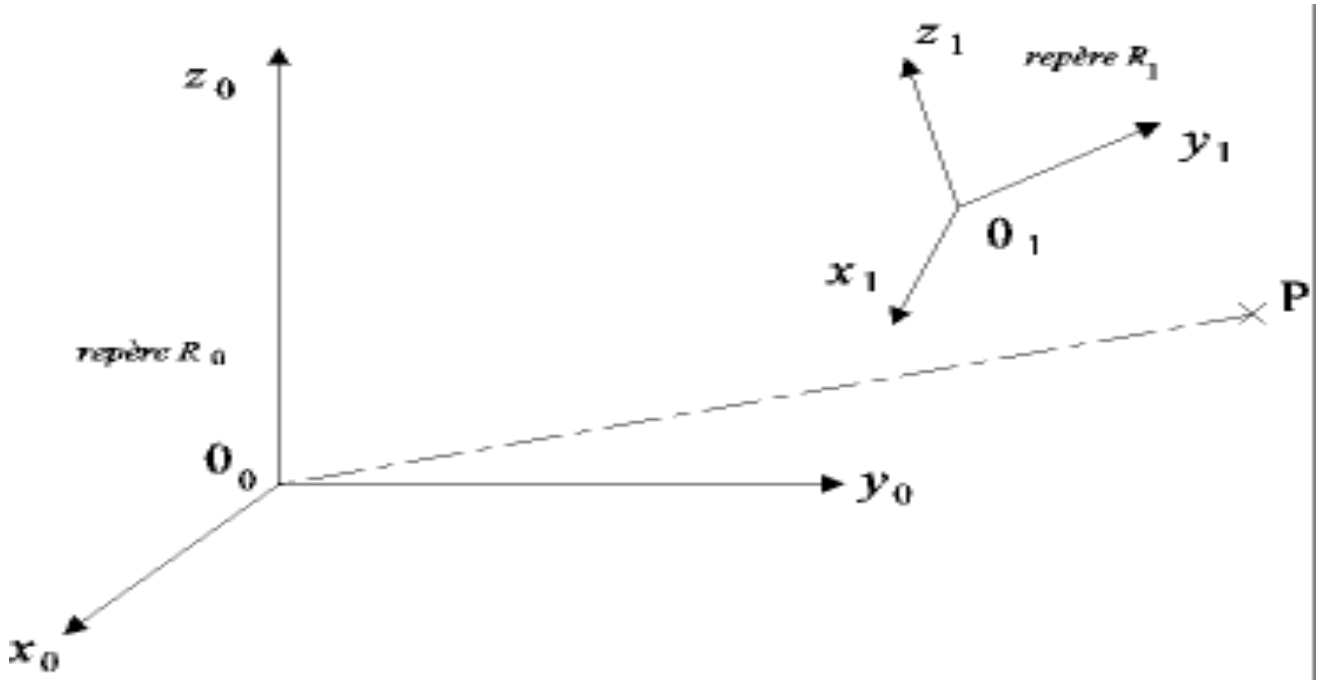
- On est souvent amené à convertir une matrice homogène en 6 coordonnées opérationnelles.
- Soit R la matrice de rotation quelconque dont on voudrait extraire les angles de roulis, tangage et lacet:

$$\mathbf{R}_{03} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix}$$

identifier les termes de la matrice avec le résultat du produit des trois matrices élémentaires de roulis, tangage, lacet et en déduire les angles correspondants :

Calcul des coordonnés d'un point

- On peut montrer que la position du repère de base *R1 se déduit de celle du repère de base R0 par une translation et une rotation.*



Calcul des coordonnés d'un point

Le but est d'exprimer dans le repère de base R_0 les coordonnées du point P ayant pour coordonnées (X_1, Y_1, Z_1) dans le repère de base R_1 (c-à-d : $\overrightarrow{O_1P}_{/1} = (X_1\ Y_1\ Z_1)^t$), sachant que l'origine du repère R_1, c'est-à-dire O_1, a pour coordonnées (a,b,c) dans le repère R_0.

On a : $\overrightarrow{O_1P}_{/1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{O_1P} = X_1\,\vec{x_1} + Y_1\,\vec{y_1} + Z_1\,\vec{z_1}$.

On a : $\overrightarrow{O_0P}_{/0} = \overrightarrow{O_0O_1}_{/0} + \overrightarrow{O_1P}_{/0}$

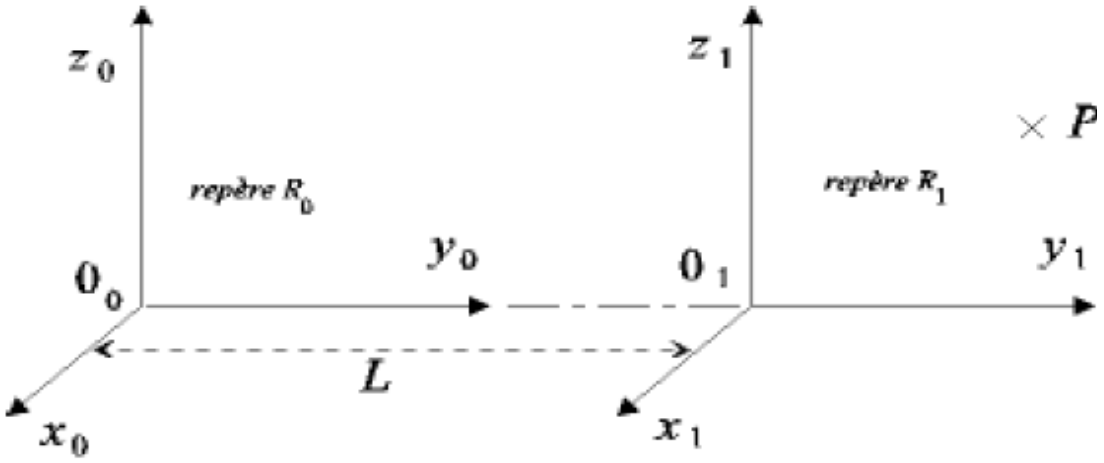
$= \overrightarrow{O_0O_1}_{/0} + R_{01} \times \overrightarrow{O_1P}_{/1}$

$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$.

La matrice de rotation, notée R_{01}, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ contient les vecteurs de base de R_1, c'est-à-dire $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$, exprimés dans la base R_0, c'est-à-dire en fonction des vecteurs $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$.

Calcul des coordonnés d'un point

Translation pure



On a : $\overrightarrow{O_0P}_{/0} = \overrightarrow{O_0O_1}_{/0} + R_{01} \times \overrightarrow{O_1P}_{/1}$

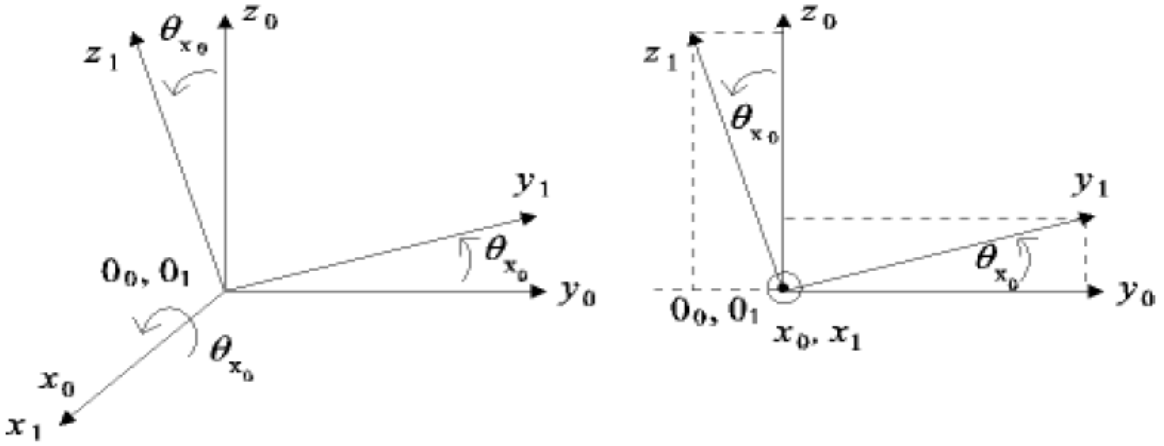
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ L + Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice (vecteur) de translation opère selon l'axe $\vec{y}_0$.

Calcul des coordonnés d'un point

Rotation pure

Par convention, on considère que l'articulation rotoïde d'un robot se fait autour d'un des 3 axes d'un repère orthonormé. Soit, par exemple, une rotation d'angle θ_{x_0} autour de l'axe $\vec{x}_0$.



On a : $R_{01}(x_0, \theta_{x_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{x_0}) & -\sin(\theta_{x_0}) \\ 0 & \sin(\theta_{x_0}) & \cos(\theta_{x_0}) \end{pmatrix}$,

Calcul des coordonnés d'un point

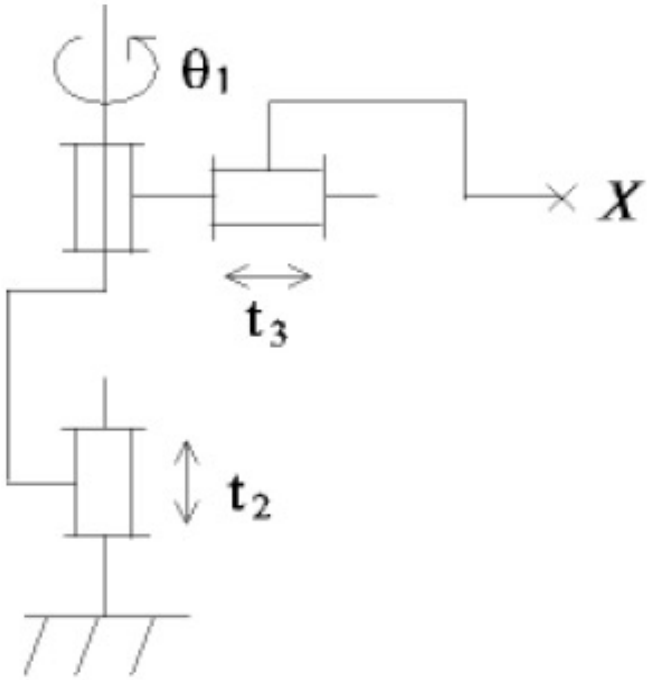
Exemple: rotation et translation

Exprimons dans le repère R_0 les coordonnées (X_1, Y_1, Z_1) du point P dans le repère R_1, sachant que l'origine O_1 du repère R_1 a pour coordonnées (a, b, c) dans le repère R_0.

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_0P}_{/0} &= \overrightarrow{O_0O_1}_{/0} + \overrightarrow{O_1P}_{/0} \\
&= \overrightarrow{O_0O_1}_{/0} + R_{01} \times \overrightarrow{O_1P}_{/1} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{x_0}) & -\sin(\theta_{x_0}) \\ 0 & \sin(\theta_{x_0}) & \cos(\theta_{x_0}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a + X_1 \\ b + \cos(\theta_{x_0})\, Y_1 - \sin(\theta_{x_0})\, Z_1 \\ c + \sin(\theta_{x_0})\, Y_1 + \cos(\theta_{x_0})\, Z_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice



3 *d.d.l.*

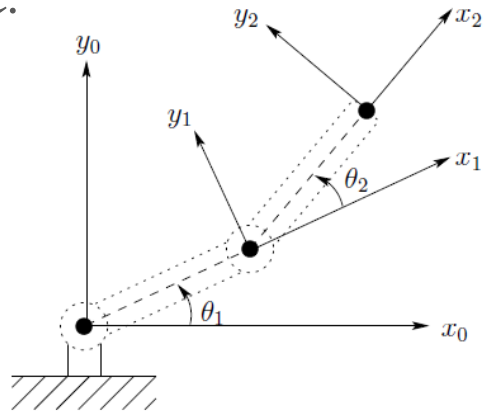
le positionnement du point *X* en *x*, *y*, *z* se fait par θ_1, t_2, t_3.

consignes d'actionneur à générer

Déterminer les coordonnées du point X en fonction des paramètres ci-dessus

Transformations homogènes

- Une grande partie de l'étude cinématique des robots se base sur l'établissement d'un certain nombre de repères pour représenter les positions et les orientations des membres **rigides** composant un robot.
  - Il est donc pratique de développer des outils qui permettront d'effectuer des transformations géométriques (par exemple la translation et la rotation) entres chacuns des repères de façon assez aisée.
- Pour ce faire, nous utiliserons les coodonnées homogènes et les matrices de transformation homogène !



Transformations homogènes Coordonnées homogènes

- Les différentes transformations géométriques nécessitent l'utilisation de différents opérateurs matriciels :
- L'addition et la soustraction pour les translations ;
- La multiplication matricielle pour les autres opérations (changement d'échelle, rotation, etc).
- L'utilisation des coordonnées homogènes permet de réaliser toutes ces opérations à l'aide d'un seul opérateur: la multiplication.

Transformations homogènes
Coordonnées homogènes

En coordonnées homogènes, le point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est représenté par (x', y', z', w) où $w \neq 0$.
La relation entre les coordonnées cartésiennes et homogènes est donnée par

$$\begin{aligned} x &= x'/w \\ y &= y'/w \\ z &= z'/w \end{aligned}$$

Note: De manière générale, w=1

En coordonnées homogènes, une orientation (u, v, w) est représentée par $(u, v, w, 0)$.

Transformations homogènes
Transformations 2D

- De façon similaire, en coordonnées homogènes 2D, le point de coordonnée cartésienne (x,y) est donné par (x,y,1) en considérant w=1.
- Une orientation (u,v) sera donné par (u,v,0).

Transformations homogènes

- Quelle est la valeur ajoutée des coordonnées homogènes?
  - À l'aide des coordonnées homogènes et d'opérations matricielles simples, nous pouvons désormais effectuer des transformations géométriques (mise à l'échelle, rotation, translation…) très facilement.
  - Pour ce faire nous utiliserons la **matrice de transformation homogène**, la représentation matricielle des coordonnées homogènes et la multiplication.

Transformations homogènes
Transformations 2D

En 2D, une position cartésienne (x, y) est donnée par les coordonnées homogènes sous forme matricielle $\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T$. Un ensemble de n points sera donné par la concaténation des n points dans une matrice $3 \times n$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènesTransformations 2D

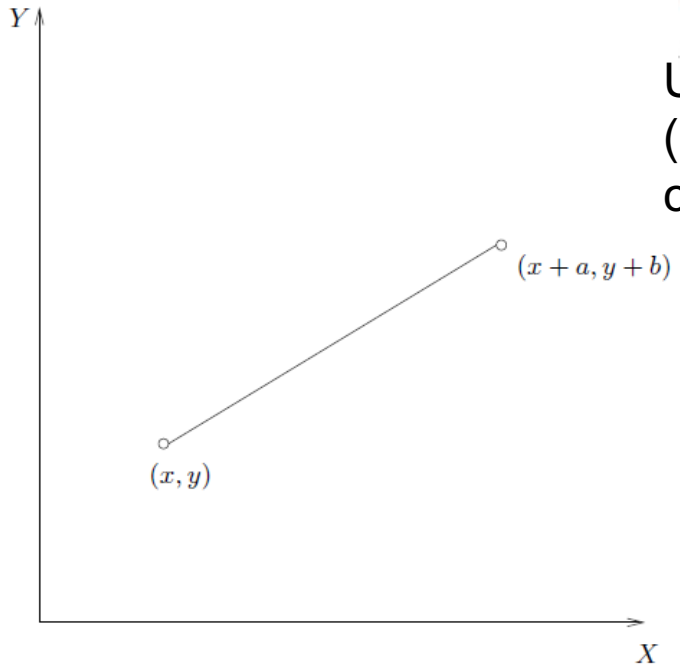
Une matrice $\boldsymbol{T}$ de transformation géométrique 2D de dimension 3×3

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

peut être appliquée à ces points pour obtenir les coordonnées des points transformés.

$$\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Transformations 2D - translation



Un point de coordonnées (x,y), après une translation de (a,b) possède les coordonnées (x+a,y+b). En coordonnées homogènes:

$$P' = TP$$

$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}}_{\text{On cherche la matrice de transformation permettant de faire la translation}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}x + T_{12}y + T_{13} \\ T_{21}x + T_{22}y + T_{23} \\ T_{31}x + T_{32}y + T_{33} \end{bmatrix}$$

Ceci implique:

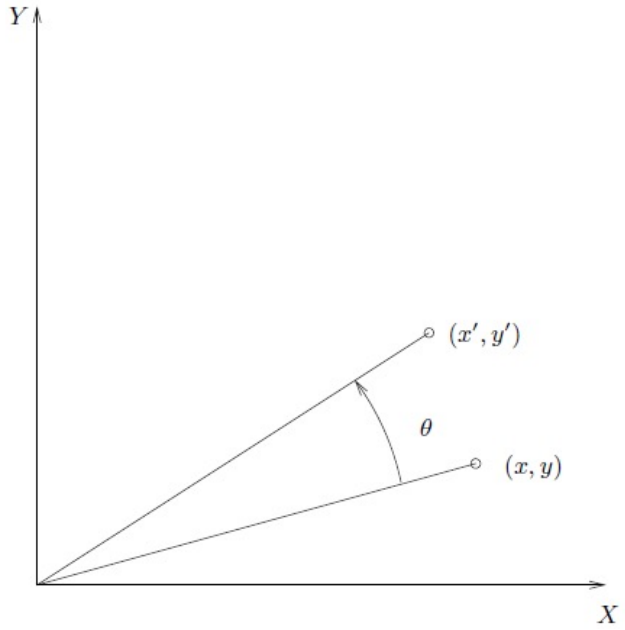
$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de transformation d'une translation 2D.}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Transformations 2D - translation

- Donc, la matrice de transformation homogène d'une translation 2D (ou tout simplement *matrice de translation 2D*) est donnée par:

$$TRANS(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Transformations 2D - Rotation



Un point de coordonnées (x,y), après une rotation de Θ degrés, possède les coordonnées (x',y'). En coordonnées homogènes:

$$P' = TP$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Transformations 2D - rotation

- Donc, la matrice de transformation homogène d'une rotation 2D (ou tout simplement *matrice de rotation 2D*) est donnée par:

$$ROT(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Concaténation de transformations

- Lorsque plusieurs transformations géométriques sont appliquées en succession, l'ordre dans lequel les matrices sont multipliées est important car la multiplication matricielle n'est pas commutative.
- Ceci n'est pas un artifice mathématique, mais une conséquence de la non-commutativité des transformations dans l'espace.
- En général $\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1 \neq \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$.

Transformations homogènes
Transformations inverses

Les transformations inverses sont faciles à calculer. Il suffit de calculer l'opération inverse. Par exemple, $[\boldsymbol{ROT}(\theta)]^{-1} = \boldsymbol{ROT}(-\theta)$.

$$[\boldsymbol{ROT}(\theta)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\boldsymbol{ROT}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Rotation autour d'un point (a,b)

$$\boldsymbol{TRANS}(a,b)\boldsymbol{ROT}(\theta)\boldsymbol{TRANS}(-a,-b)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & b(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Transformations 3D

- Comme dans le cas à deux dimensions, on peut développer les matrices (de transformation) de translation et de rotation:

Translation:

$$TRANS(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformations homogènes
Transformations 3D

Rotations:

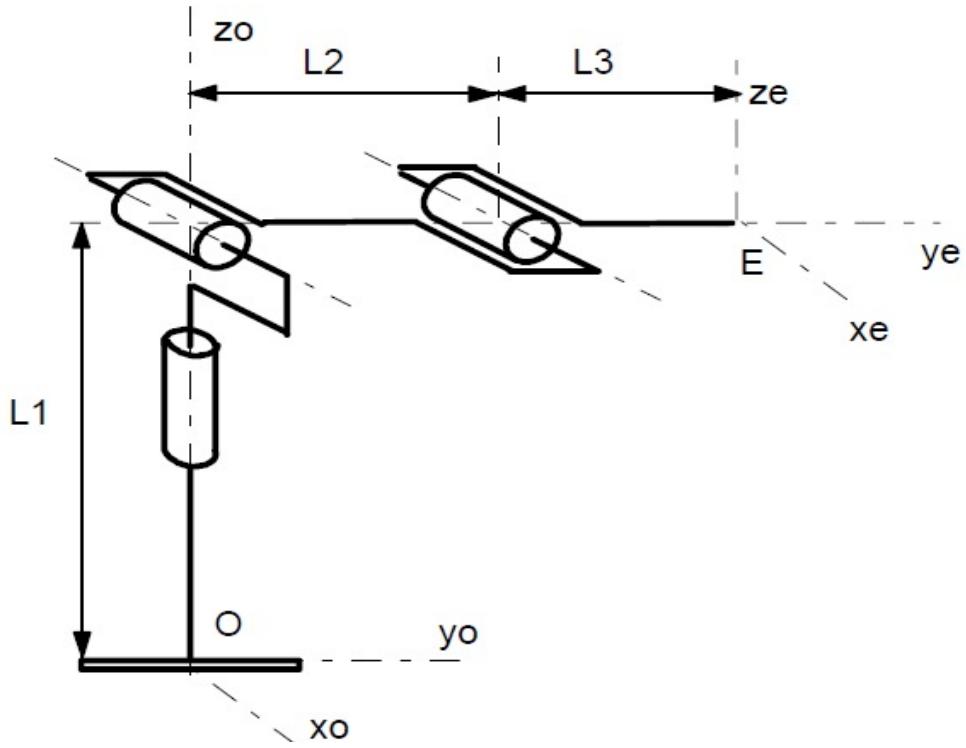
$$ROT(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ROT(y,\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ROT(z,\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice

Calculer les coordonnées du point E dans R0 :



Cinématique directe

- Qu'est-ce que la cinématique directe?
  - La cinématique directe concerne la détermination de la position et de l'orientation de l'effecteur du robot en fonction des positions des articulations du robot.
  - Il s'agit en fait de bâtir un modèle mathématique qui permet d'obtenir la position de l'effecteur en fonction de ce que l'on appelle les "variables articulaires".
    - Pour bâtir le dit modèle mathématique, nous aurons recours aux variables / transformations homogènes.

Cinématique directe

- Démarche:
  - Pour réaliser la cinématique directe des robots, nous nous intéresserons à mettre en place des repères au niveau des joints (liaisons) du robot, par exemple:

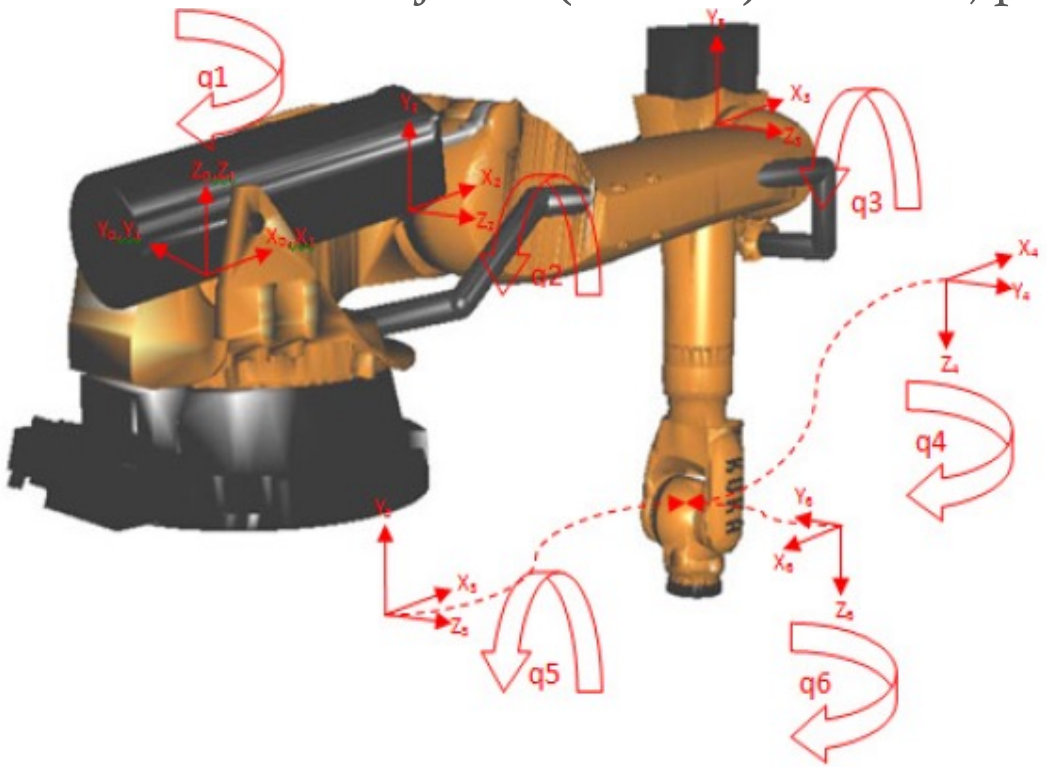


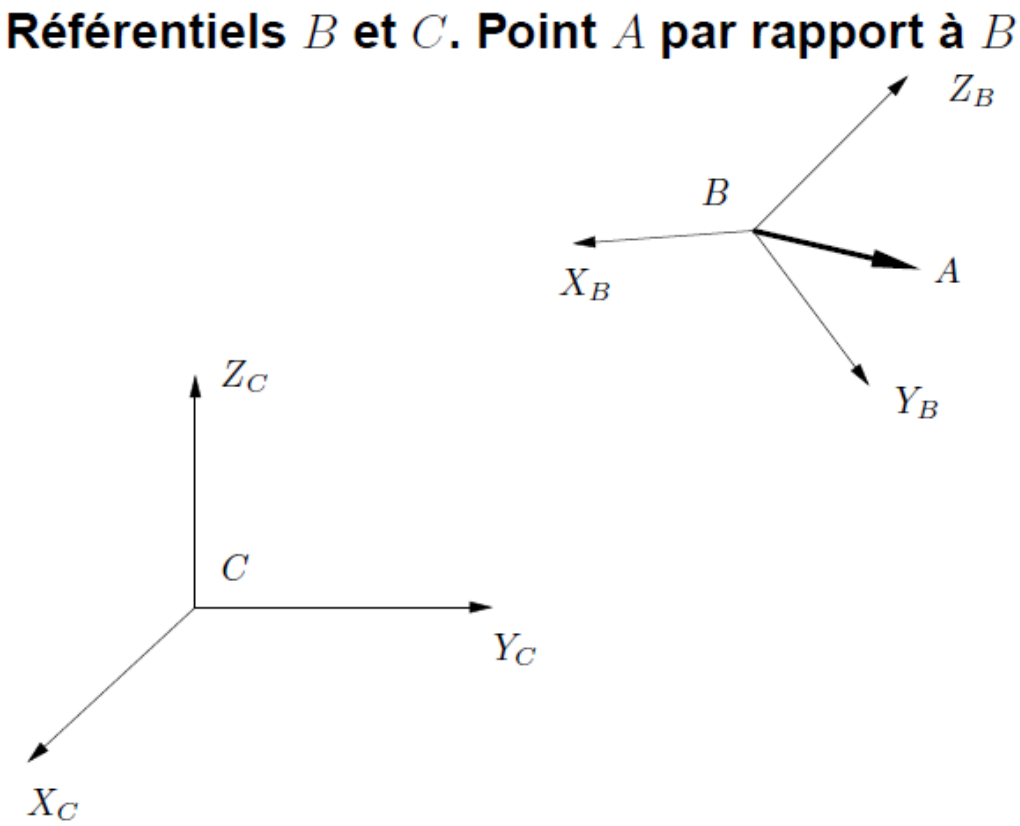
Fig. 3 – Apposition de référentiels sur le robot considéré. L'image du robot sans les référentiels provient de KUKA : www.kuka.com

Cinématique directe

- Utilité de la cinématique?
  - Il est nécessaire de connaître la position et l'orientation de l'effecteur pour effectuer une panoplie de tâches.
- Concrètement:
  - Des encodeurs donnent les valeurs des différentes variables articulaires. Par exemple, pour des joints rotoïdes, les encodeurs permettront d'obtenir directement les angles de chacune des articulations.
  - Connaissant ces valeurs et ayant réaliser la cinématique directe du robot, il est alors possible de connaître la position et l'orientation de l'effecteur.

Cinématique directe
Référentiels

- Concepts liés aux référentiels.
  - Considérons les référentiels et le point suivant:



Étant donné un **point A** exprimé en coordonnés du **repère B**, comment faire pour exprimer ce point dans le **repère C**?

Cinématique directe
Référentiels

- Etapes de la solution.
  - Déterminer la matrice de rotation qui permet de “passer” du repère C au repère B: ${}^{C}T_{B}$
  - Les transformations qui permettent de passer du repère C au repère B sont des rotations et une translation, donc:

$$ {}^{C}\boldsymbol{T}_{B} = \begin{bmatrix} {}^{C}\boldsymbol{R}_{B} & {}^{C}\boldsymbol{p}_{B} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} $$

où ${}^{C}\boldsymbol{p}_{B}$ est la position de l'origine de B par rapport à C et ${}^{C}\boldsymbol{R}_{B}$ est une matrice de rotation 3×3 dont les colonnes sont les projections de X_B, Y_B et Z_B dans le repère C.

Si l'on connaît la position du point A par rapport à B :

$$ {}^{B}\boldsymbol{p}_{A} = \begin{bmatrix} {}^{B}x_{A} & {}^{B}y_{A} & {}^{B}z_{A} & 1 \end{bmatrix}^{T} $$

la position de A par rapport à C est donnée par

$$ {}^{C}\boldsymbol{p}_{A} = {}^{C}\boldsymbol{T}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{p}_{A} $$

Cinématique directe
Référentiels

- Rappel sur les coordonnées homogènes:
  - Un vecteur en coordonnée homogène: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T$ peut subir une translation et/ou une rotation lorsque pré-multiplié par une matrice de transformation.
  - Un vecteur en coordonnée homogène: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x & y & z & 0 \end{bmatrix}^T$ ne peut subir qu'une rotation lorsque pré-multiplié par une matrice de transformation.
  - Une matrice de transformation homogène identité :

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice de transformation qui représente un système de coordonnées qui coïncide avec le référentiel de base (aucune transformation).

Cinématique directe
Référentiels

Donc, la matrice

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

représente un système de coordonnées qui a subit une rotation puis une translation par rapport au référentiel de base où $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{o}$ et $\boldsymbol{a}$ représentent les axes X, Y et Z transformés et $\boldsymbol{p}$ la position de l'origine du repère transformé.

Cinématique directe
Référentiels

Donc, la matrice

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

représente un système de coordonnées qui a subit une rotation puis une translation par rapport au référentiel de base où n, o et a représentent les axes X, Y et Z transformés et p la position de l'origine du repère transformé.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{3\times3} & \boldsymbol{p}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

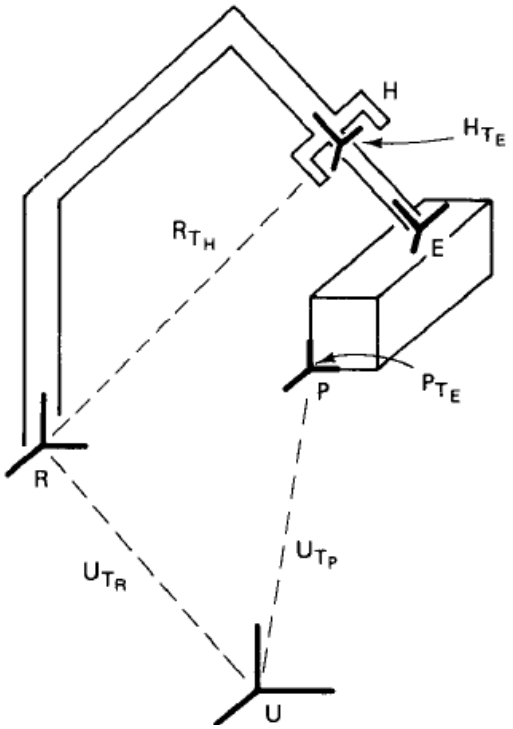
Cinématique directe
Référentiels

- Voici quelques propriétés de la matrice de rotation et de la matrice de transformation:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}^{-1} &= \boldsymbol{R}^{T} \\
\boldsymbol{R} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 1 \\
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{o} &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \\
\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{o} &= \boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{o} \\
\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{T} & -\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cinématique directe
Référentiels

- Les référentiels en robotique:



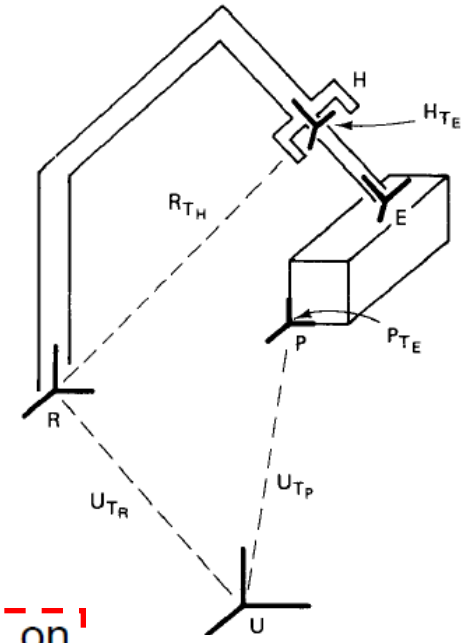
- **Référentiel U**: il est surnommé le référentiel universel. Dans certains ouvrages, on peut aussi parler du référentiel de travail.
- **Référentiel R**: C'est le référentiel associé à la base du robot.
- **Référentiel H**: il est surnommé le référentiel "Hand", c'est le référentiel associé à la main (porte-outil).
- **Référentiel E** : il est surnommé le référentiel effecteur. Il est associé à l'outil.
- **Référentiel P**: Référentiel associé à la pièce.

Cinématique directe
Référentiels

- Référentiels en robotique:

Les différentes transformations correspondantes sont :

- ${}^{U}\boldsymbol{T}_{R}$: position de la base du robot par rapport au repère universel U ;
- ${}^{R}\boldsymbol{T}_{H}$: position de la main du robot par rapport à sa base R ;
- ${}^{H}\boldsymbol{T}_{E}$: position de l'outil par rapport à la main du robot H ;
- ${}^{U}\boldsymbol{T}_{P}$: position de la pièce par rapport au repère universel U ;
- ${}^{P}\boldsymbol{T}_{E}$: position de l'endroit où l'outil doit saisir la pièce par rapport au repère de la pièce P.



Pour que le robot puisse saisir la pièce correctement, on désire avoir :

$$ {}^{U}\boldsymbol{T}_{R}\,{}^{R}\boldsymbol{T}_{H}\,{}^{H}\boldsymbol{T}_{E} = {}^{U}\boldsymbol{T}_{P}\,{}^{P}\boldsymbol{T}_{E} $$

On peut donc calculer dans quelle position doit être le robot pour réaliser la tâche :

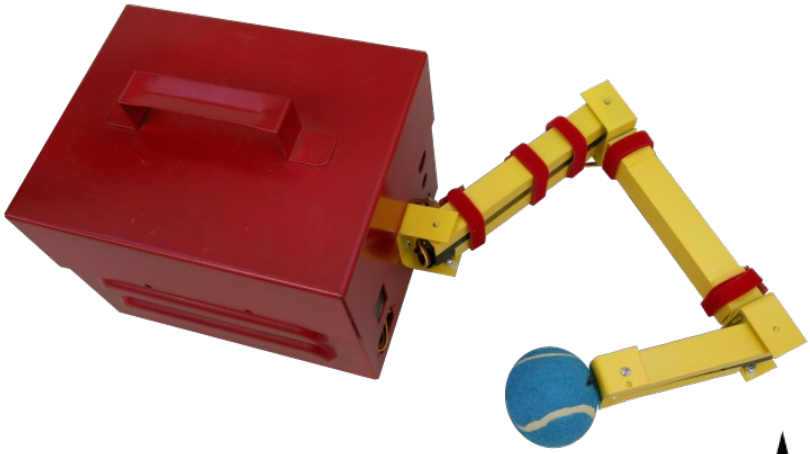
$$ {}^{R}\boldsymbol{T}_{H} = {}^{U}\boldsymbol{T}_{R}^{-1}\,{}^{U}\boldsymbol{T}_{P}\,{}^{P}\boldsymbol{T}_{E}\,{}^{H}\boldsymbol{T}_{E}^{-1} $$

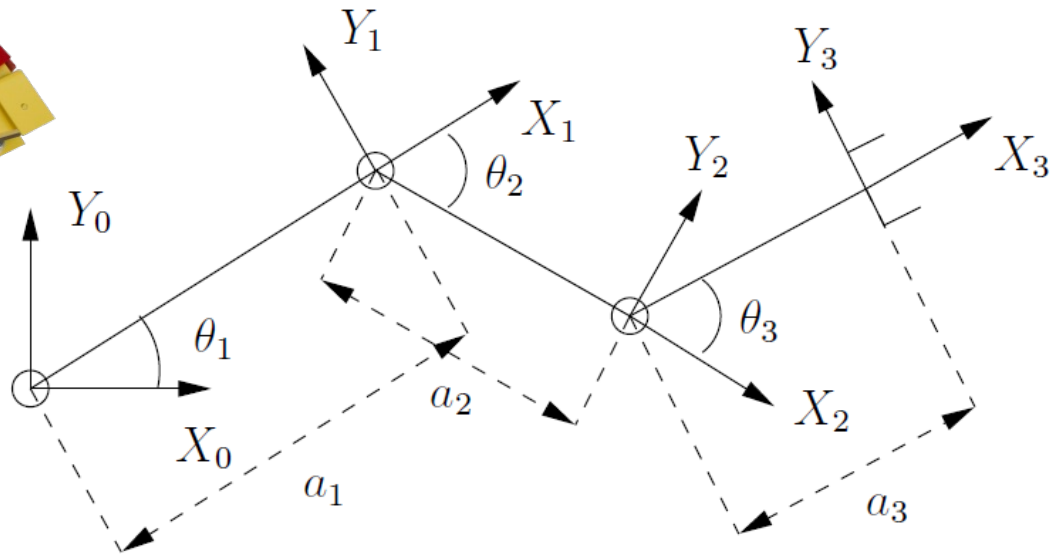
Cinématique directe
Référentiels

- Tel que mentionné, l'ordre de multiplication est important lorsqu'il s'agit de multiplier des matrices de transformation homogènes.
- De plus, lorsque les matrices de transformation sont utilisées pour décrire la position de différents repères les uns par rapport aux autres il faut se rappeller que:
  - Lorsqu'on **pré-multiplie**, la transformation se fait par rapport au repère **fixe**.
  - Lorsqu'on **post-multiplie**, la transformation se fait par rapport au repère **mobile**.

Cinématique directe
Rappel: Exemple du robot planaire

- Cinématique directe d'un robot-planaire à trois degrés de liberté:





Cinématique directe
Rappel: Exemple du robot planaire

Pour chacun des segments i, nous avons une matrice permettant de passer du repère $i-1$ et repère i :

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & C_i a_i \\ S_i & C_i & 0 & S_i a_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Le modèle de la cinématique directe est donné par

$$ {}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 \, {}^{1}T_2 \, {}^{2}T_3 $$

Cinématique directe
Rappel: Exemple du robot planaire

On peut calculer

$$ {}^1T_2\ {}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & a_3 C_{23} + C_2 a_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3 S_{23} + S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

puis

$$ {}^0T_1\ {}^1T_2\ {}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_3 S_{123} + a_2 S_{12} + S_1 a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

où $C_i = \cos(\theta_i)$, $S_i = \sin(\theta_i)$, $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ et $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$.

Denavit-Hartenberg

- Une autre façons différentes et valides d'affecter les repères sur un robot.
- Assigner les repères sur un robot plus complexe que le robot planaire peut devenir compliqué (par exemple un robot à six degrés de liberté oeuvrant dans l'espace 3D).
  - L'assignation des repères n'est pas toujours facile et surtout, la détermination des transformations homogènes entre chacun de ces repère.

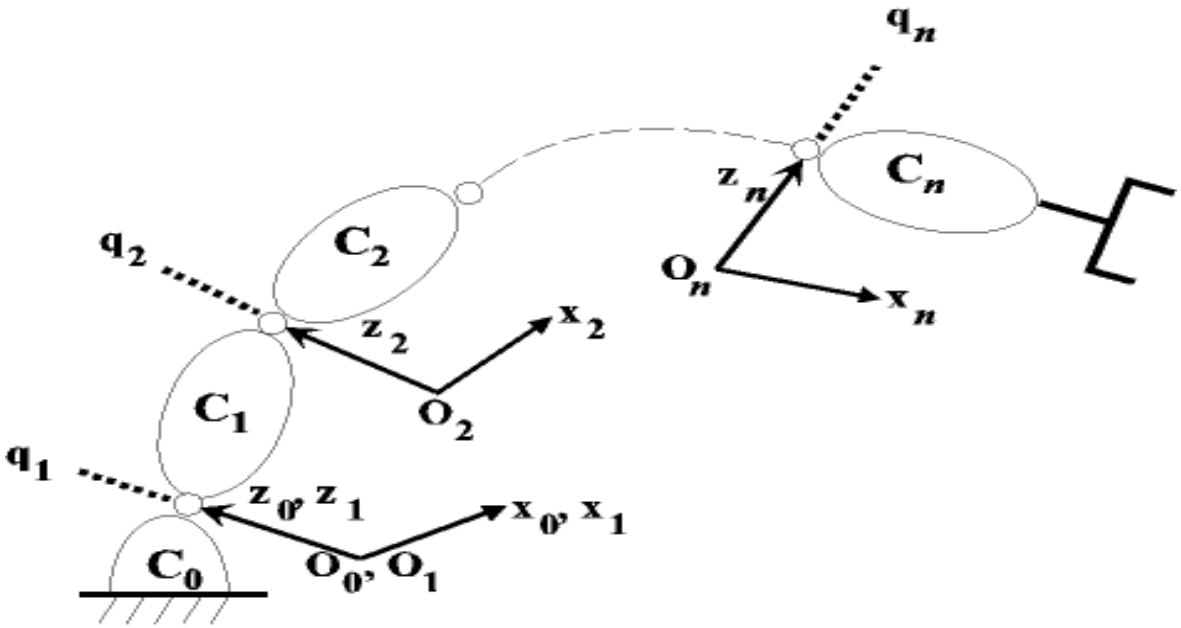
- Nous développerons ici une approche systématique basée sur les paramètres de Denavit-Hartenberg modéfié.
  - Permet de simplifier la démarche
  - De plus, cette convention permet aux ingénieurs en robotique de s'appuyer sur un langage commun.
  - Elle permet en plus d'automatiser la réalisation de la cinématique directe.

Denavit-Hartenberg

On numérote les solides par ordre croissant en partant du socle. Ainsi le robot est composé de n +1 corps, notés C0 ,…,Cn et de n articulations (n >=1). Le corps C0 désigne le socle (la base) du robot, le corps Cn le corps portant l'organe terminal.

Le repère Rj est lié au corps Cj du robot.

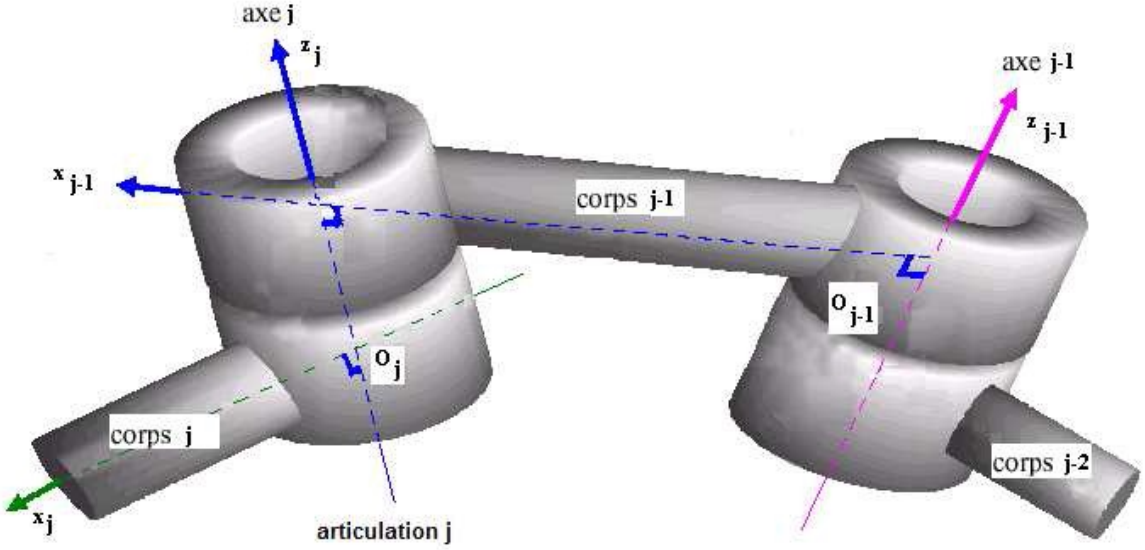
La variable de l'articulation j, qui lie le corps Cj au corps Cj-1 , est notée qj .



Denavit-Hartenberg

Détermination du repère R_j (lié au corps C_j) :

- L'axe $\overrightarrow{o_j z_j}$ est porté par l'axe de rotation, ou de translation, de l'articulation j.
- L'axe $\overrightarrow{o_j x_j}$ est porté par la perpendiculaire commune aux axes $\overrightarrow{o_j z_j}$ et $\overrightarrow{o_{j+1} z_{j+1}}$. Si les axes $\overrightarrow{o_j z_j}$ et $\overrightarrow{o_{j+1} z_{j+1}}$ sont parallèles, le choix de $\overrightarrow{o_j x_j}$ n'est pas unique, il est alors dicté par des considérations de symétrie ou de simplicité.



Denavit-Hartenberg

Passage du repère *Rj-1 au repère Rj , détermination des paramètres de Denavit-Hartenberg* modifié :

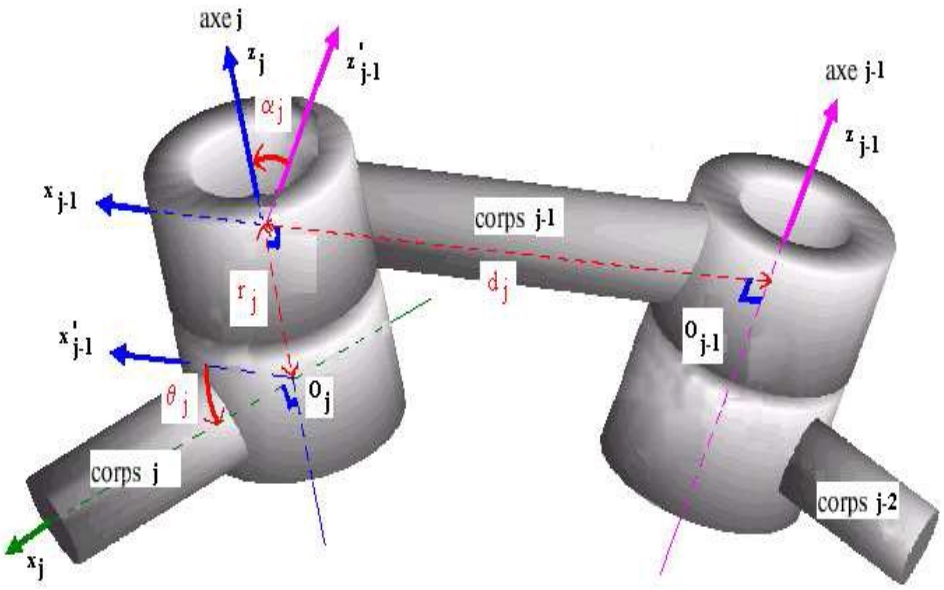
Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j s'exprime en fonction des 4 paramètres suivants :

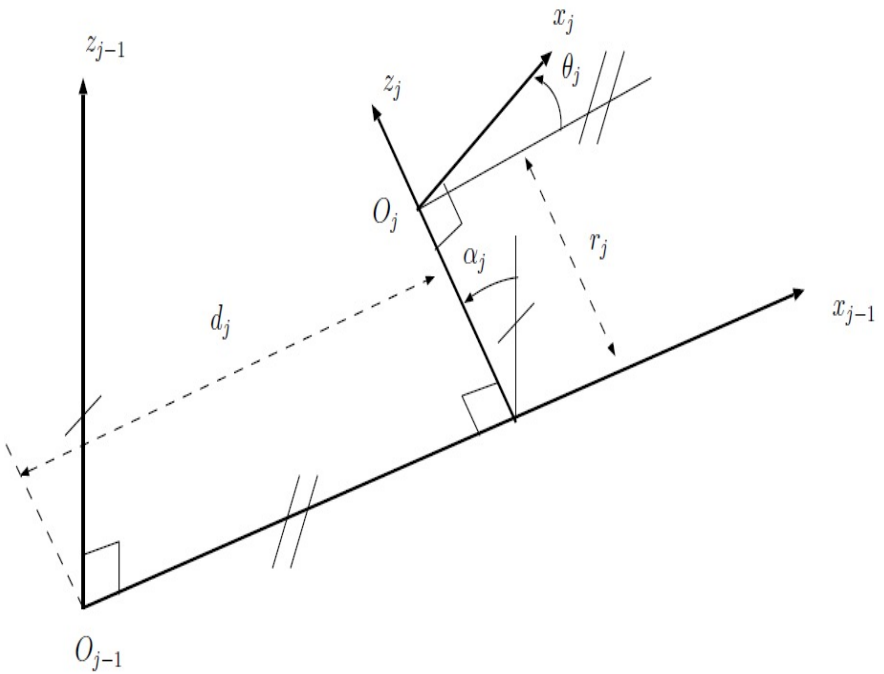
1/ $\propto_j$: angle entre les axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_{j-1}

2/ d_j : distance entre z_{j-1} et z_j le long de x_{j-1}

3/ θ_j : angle entre l'axe x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_j.

4/ r_j : distance entre x_{j-1} et x_j le long de z_j





Remarque : La variable articulaire q_j, associée à l'articulation *j*, est soit θ_j, soit r_j, selon que cette articulation est respectivement de type rotoïde ou prismatique, ce qui se traduit par la relation :

$$q_j = (1-\sigma_j)\,\theta_j + \sigma_j\, r_j$$

avec $\sigma_j = 0$ si l'articulation *j* est rotoïde et $\sigma_j = 1$ si elle est prismatique.

Autrement dit, si l'articulation est une *rotation* alors $\begin{cases} q_j = \theta_j \text{ est variable} \\ \alpha_j, d_j, r_j \text{ sont constants} \end{cases}$.

Si l'articulation est une *translation* alors $\begin{cases} q_j = r_j \text{ est variable} \\ \alpha_j, d_j, \theta_j \text{ sont constants} \end{cases}$.

Bien souvent, la rotation d'angle α_j est multiple de $\frac{\pi}{2}$.

Denavit-Hartenberg

Il en résulte la matrice de transformation homogène ${}^{J-1}\mathbf{T}_j$ suivante :

$$
\begin{aligned}
{}^{J-1}\mathbf{T}_j &= Rot(x_{j-1},\alpha_j)\times Trans(x_{j-1},d_j)\times Rot(z_j,\theta_j)\times Trans(z_j,r_j) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_j) & -\sin(\alpha_j) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_j) & \cos(\alpha_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 & d_j \\ \cos(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \cos(\alpha_j)\cos(\theta_j) & -\sin(\alpha_j) & -r_j\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \sin(\alpha_j)\cos(\theta_j) & \cos(\alpha_j) & r_j\cos(\alpha_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Remarques :

- Pour la définition du repère de référence R_0, le choix le plus simple consiste à prendre R_0 confondu avec le repère R_1 quand $q_1 = 0$
- Pour une articulation j prismatique, l'axe z_j est parallèle à l'axe de l'articulation mais la position de cet axe dans l'espace peut être quelconque.

Denavit-Hartenberg

Remarques :

- Pour la définition du repère de référence R_0, le choix le plus simple consiste à prendre R_0 confondu avec le repère R_1 quand $q_1 = 0$ (voir §3.6, 1er figure).
- Pour une articulation j prismatique, l'axe z_j est parallèle à l'axe de l'articulation mais la position de cet axe dans l'espace peut être quelconque.
- Bien souvent, les deux axes de liaisons consécutifs d'un robot sont orthogonaux ou parallèles, il en résulte un angle α égale à $0°, \pm 90°, 180°$. Lorsque les axes $\overrightarrow{z_{j-1}}$ et $\overrightarrow{z_j}$ sont parallèles ($\alpha_j = 0°$ ou 180°), il y a une infinité de perpendiculaires communes entre $\overrightarrow{z_{j-1}}$ et $\overrightarrow{z_j}$. On place le point O_j tel que $r_j = 0$.

  Lorsque les axes $\overrightarrow{z_{j-1}}$ et $\overrightarrow{z_j}$ sont perpendiculaires ($\alpha_j = \pm 90^0$), le point O_j est placé à l'intersection des axes $\overrightarrow{z_{j-1}}$ et $\overrightarrow{z_j}$, ainsi on a : $d_j = 0$.

Denavit-Hartenberg

On en déduit la matrice de transformation homogène inverse permettant le passage du repère R_j au repère R_{j-1}.

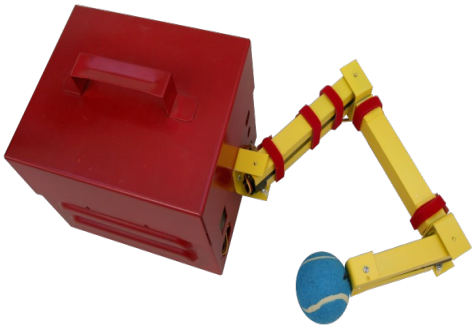
$$^{j}T_{j-1} = \text{Trans}(z, -r_j).\text{Rot}(z, -\theta_j).\text{Trans}(x, -d_j).\text{Rot}(x, -\alpha_j)$$

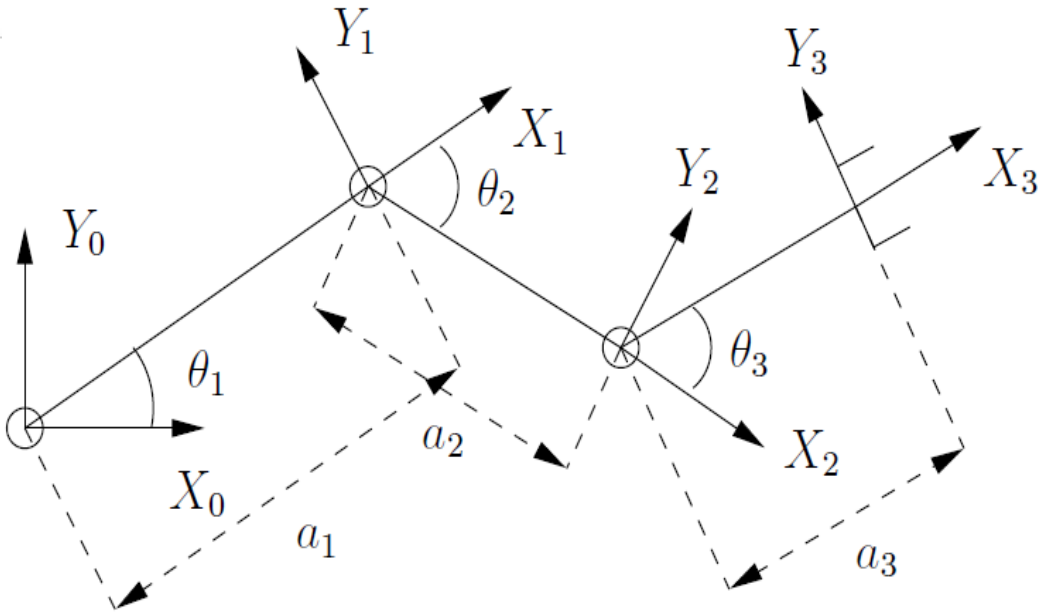
dont l'expression littérale est la suivante ($^{j}A_{j-1} = (^{j-1}A_j)^T$) :

$$^{j}T_{j-1} = \begin{pmatrix} C\theta_j & C\alpha_j.S\theta_j & S\alpha_j.S\theta_j & -d_j.C\theta_j \\ -S\theta_j & C\alpha_j.C\theta_j & S\alpha_j.C\theta_j & d_j.S\theta_j \\ 0 & -S\alpha_j & C\alpha_j & -r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denavit-Hartenberg Exemple 1:

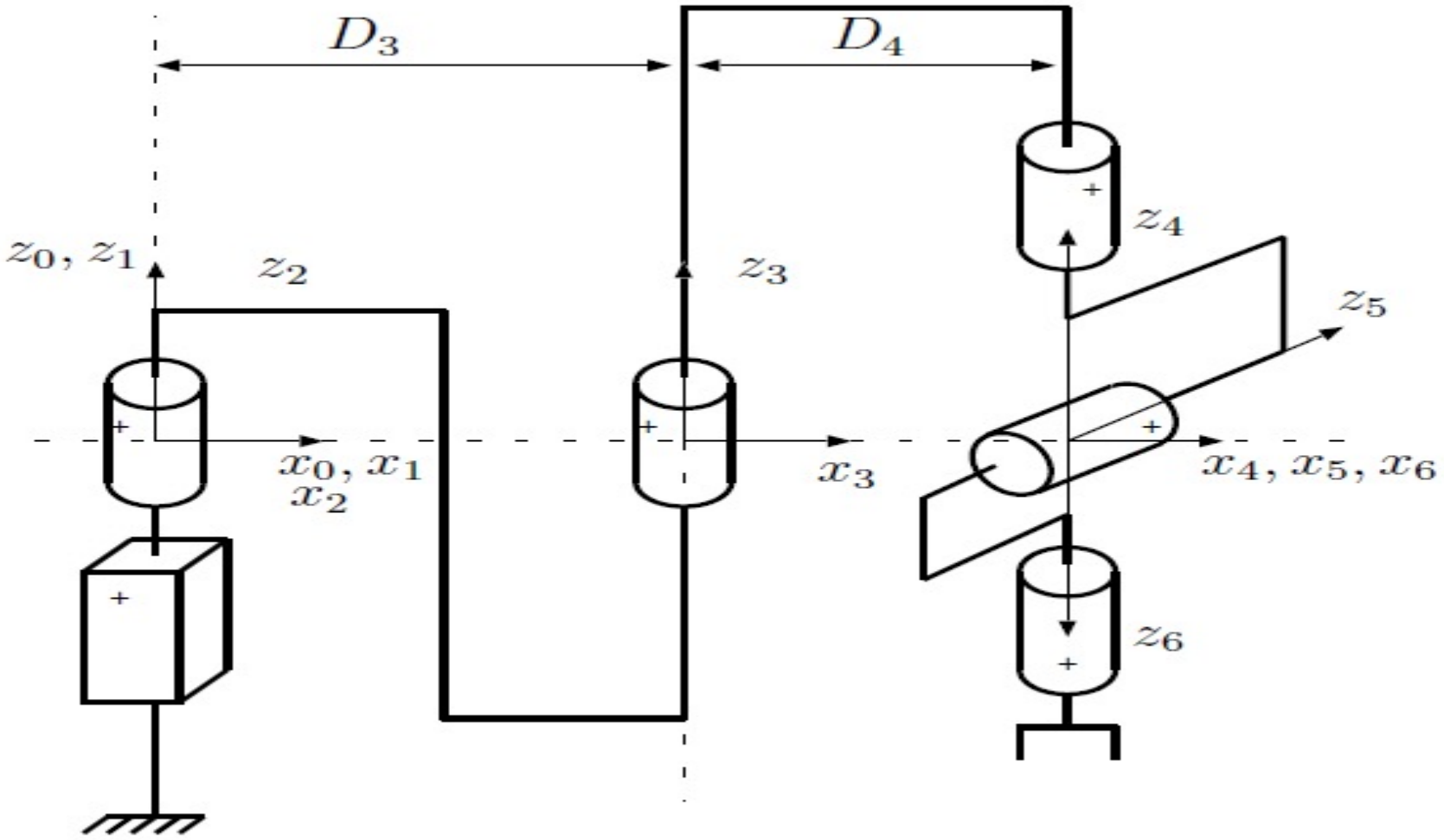
- Exemple 1:





# Lien	s	α_j	d_j	θ_j	r_j
R0→R1					
R1→R2					
R2→R3					

Denavit-Hartenberg – Exemple2 Robot ACMA H-80



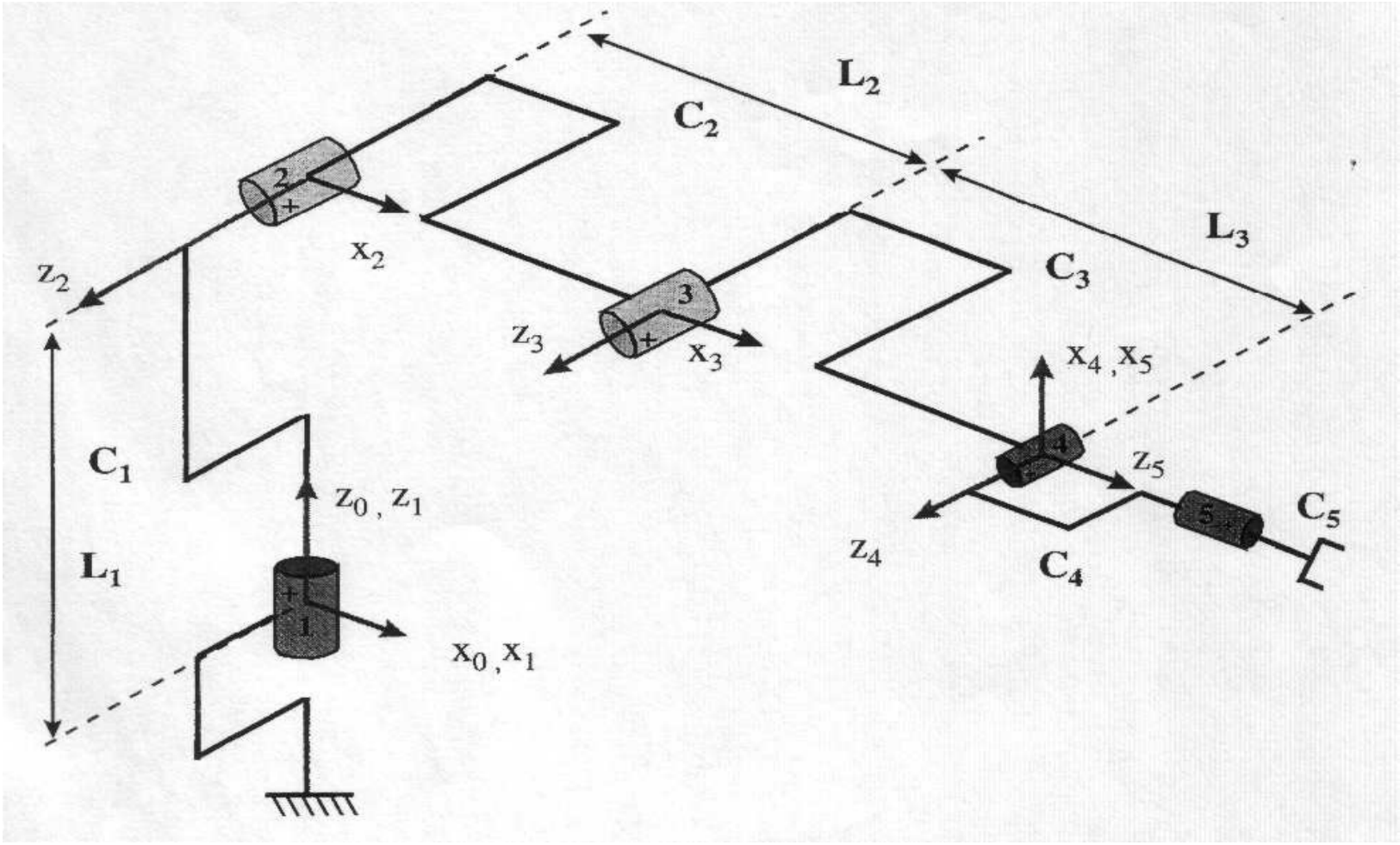
Denavit-Hartenberg – Exemple2 robot ACMA H-80

# Lien	s	α_j	dj	θ_j	r_j
R0→R1					
R1→R2					
R2→R3					
R3→R4					
R4→R5					
R5→R6					

Denavit-Hartenberg – Exemple2 robot AID-5

J	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
$R_0 \Longrightarrow R_1$	1	0	0	0	q_1
$R_1 \Longrightarrow R_2$	0	0	0	q_2	0
$R_2 \Longrightarrow R_3$	0	0	D_3	q_3	0
$R_3 \Longrightarrow R_4$	0	0	D_4	q_4	0
$R_4 \Longrightarrow R_5$	0	-90	0	q_5	0
$R_5 \Longrightarrow R_6$	0	-90	0	q_6	0

Denavit-Hartenberg – Exemple3 robot ASEA-IRB5



Denavit-Hartenberg – Exemple3 robot ASEA-IRB5

# Lien	s	α_j	dj	θ_j	r_j
R0→R1					
R1→R2					
R2→R3					
R3→R4					
R4→R5					

Denavit-Hartenberg – Exemple3 robot ASEA-IRB5

J	α_j	d_j	θ_j	rj
$R_0 \Longrightarrow R_1$	0	0	q_1	L_1
$R_1 \Longrightarrow R_2$	90	0	q_2	0
$R_2 \Longrightarrow R_3$	0	L_2	q_3	0
$R_3 \Longrightarrow R_4$	0	L_3	q_4	0
$R_4 \Longrightarrow R_5$	90	0	q_5	0

Cinématique directe inverse

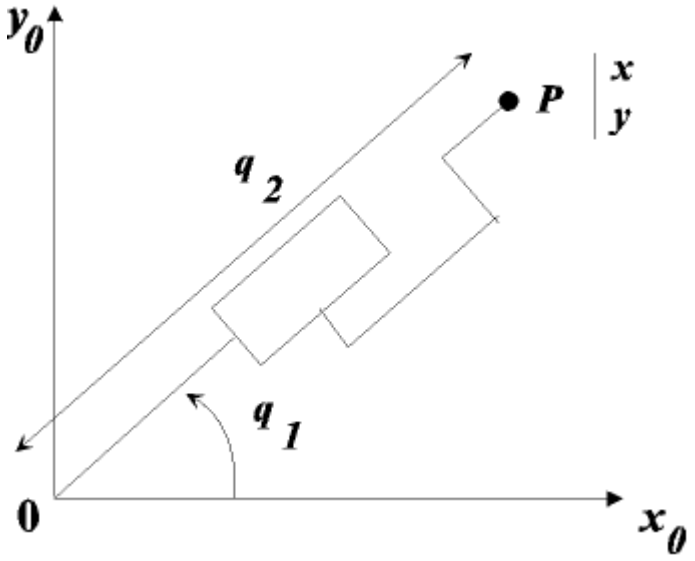
Il s'agit de déterminer les coordonnées articulaires *q permettant d'obtenir une situation désirée pour* l'organe terminal et spécifiée par les coordonnées opérationnelles *X*

Il n'existe pas de méthode systématique d'inversion du modèle géométrique. Lorsqu'elle existe, la forme explicite, issue d'une inversion mathématique, qui donne toutes les solutions possibles au problème inverse (il y a rarement unicité de la solution) constitue le ***modèle géométrique inverse.***

Il existe un certain nombre de méthodes pour calculer le modèle géométrique inverse, notamment la méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et qui convient pour la plupart des robots industriels.

Cinématique directe inverse exemple1

Soit le manipulateur évoluant dans un plan et décrit dans la figure suivante.



On a le modèle géométrique direct suivant : $\begin{cases} x = q_2 \cos(q_1) \\ y = q_2 \sin(q_1) \end{cases}$.

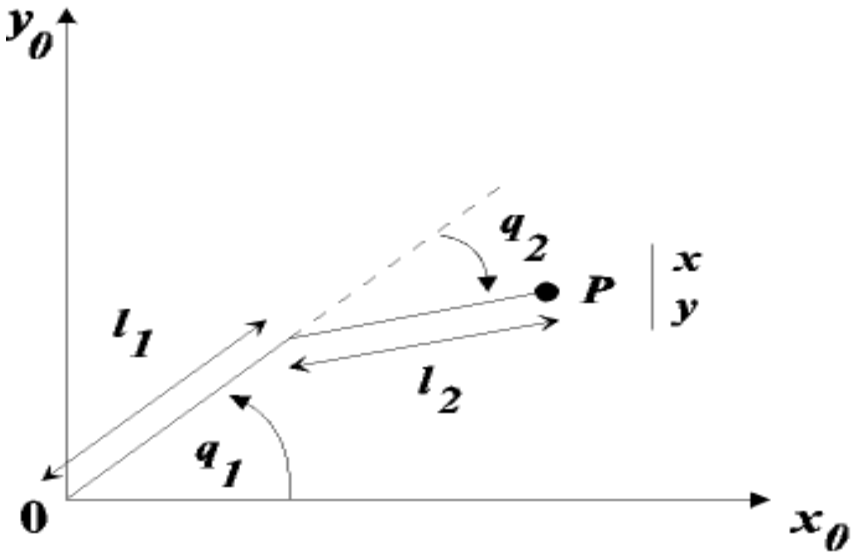
Une démarche analytique simple permet de déterminer le modèle géométrique inverse. On a :

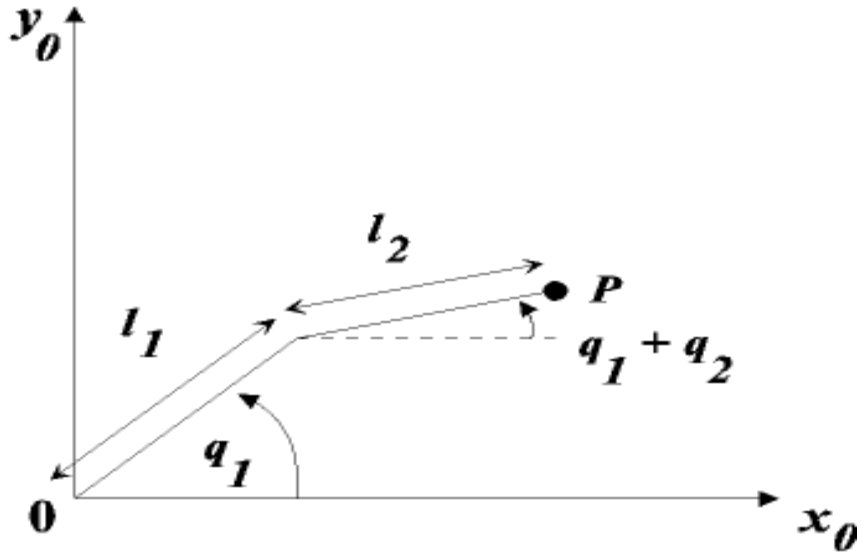
$$tg(q_1) = \frac{y}{x} \Rightarrow q_1 = Arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

et $x^2 + y^2 = q_2^2 \Rightarrow q_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cinématique directe inverse exemple 2

Soit le manipulateur RR plan décrit dans la figure suivante.



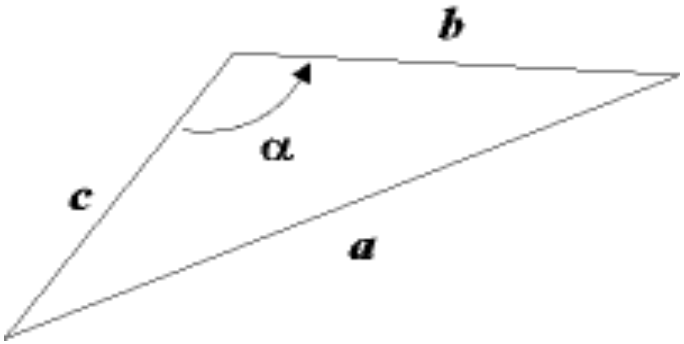


$$\begin{cases} x = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{cases}$$

Cinématique directe inverse exemple 2

Une démarche analytique, procédant par substitution, permet de déterminer le modèle géométrique inverse.

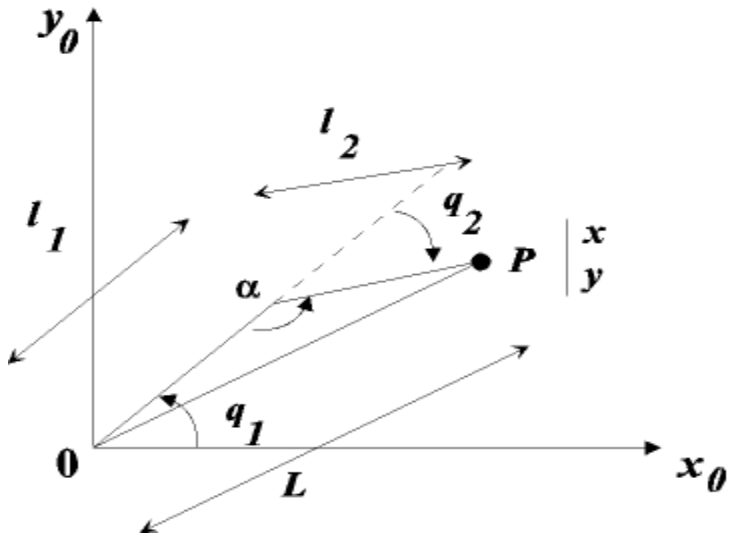
Rappel : (Théorème de Pythagore généralisé)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(\alpha)$$

Cinématique directe inverse exemple 2

Schéma du modèle géométrique direct :



Détermination de q1

On a les relations suivantes :

$$L^2 = x^2 + y^2,$$

et $L^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2\, l_1\, l_2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha = \pi + q_2$ (d'après le théorème de Pythagore généralisé),

d'où

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2\, l_1\, l_2 \cos(q_2) \quad (\text{on a : } \cos(\pi + a) = -\cos(a)),$$

soit

$$\cos(q_2) = \frac{x^2 + y^2 - \left(l_1^2 + l_2^2\right)}{2\, l_1\, l_2},$$

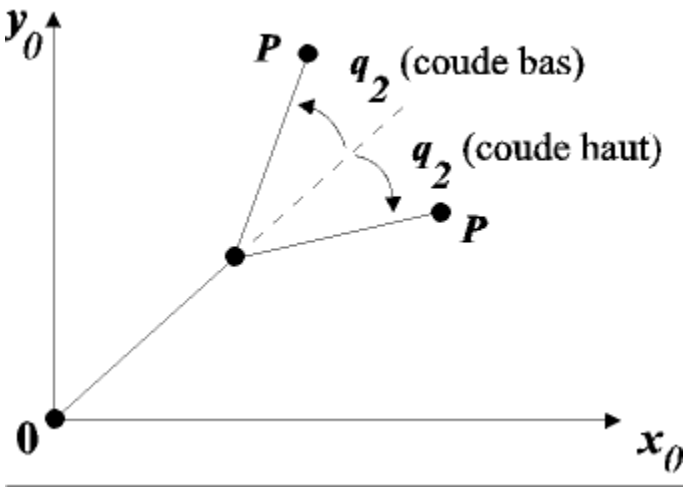
sachant que $\cos q = a$ avec $a \in [-1, 1] \Rightarrow q = \pm\, Arcos\,(a)$, il en résulte que

$$q_2 = \pm\, Arcos\left(\frac{x^2 + y^2 - \left(l_1^2 + l_2^2\right)}{2\, l_1\, l_2}\right), \text{ sous réserve que } -1 \le \frac{x^2 + y^2 - \left(l_1^2 + l_2^2\right)}{2\, l_1\, l_2} \le 1 \ .$$

Cinématique directe inverse exemple 2

Remarques :

- La condition $-1 \leq \dfrac{x^2 + y^2 - \left(l_1^2 + l_2^2\right)}{2\, l_1\, l_2} \leq 1$ indique que la position du point P doit être atteignable.
- Lorsque q_2 est positif (resp., négatif), le robot a une posture *coude bas* (resp., *coude haut*), voir figure ci-dessous.



Cinématique directe inverse exemple 2

Détermination de q1:

D'autre part, en développant les expressions $\cos(q_1+q_2)$ et $\sin(q_1+q_2)$ dans le système correspondant au modèle géométrique direct, on obtient :

$$\begin{cases}(l_1+l_2\cos(q_2))\cos(q_1)-l_2\sin(q_2)\sin(q_1)=x\\ l_2\sin(q_2)\cos(q_1)+(l_1+l_2\cos(q_2))\sin(q_1)=y\end{cases}.$$

Calculons le déterminant de ce système d'équations linéaires par rapport aux 2 inconnues $\cos(q_1)$ et $\sin(q_1)$, on a :

$$\begin{vmatrix} l_1+l_2\cos(q_2) & -l_2\sin(q_2)\\ l_2\sin(q_2) & l_1+l_2\cos(q_2)\end{vmatrix}=l_1^2+l_2^2+2\,l_1\,l_2\cos(q_2)=x^2+y^2 \ (cf.\ \text{Eq. (1)}),$$

soient, *via* la méthode de Cramer,

$$\cos(q_1)=\frac{\begin{vmatrix} x & -l_2\sin(q_2)\\ y & l_1+l_2\cos(q_2)\end{vmatrix}}{x^2+y^2} \text{ et } \sin(q_1)=\frac{\begin{vmatrix} l_1+l_2\cos(q_2) & x\\ l_2\sin(q_2) & y\end{vmatrix}}{x^2+y^2},$$

Cinématique directe inverse exemple 2

$$\cos(q_1) = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(x\,(l_1 + l_2\,\cos(q_2)) + y\,l_2\,\sin(q_2)\right).$$

$$\sin(q_1) = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(y\,(l_1 + l_2\,\cos(q_2)) - x\,l_2\,\sin(q_2)\right).$$

Il en résulte :

$$q_1 = Arctg\left(\frac{y\,(l_1 + l_2\,\cos(q_2)) - x\,l_2\,\sin(q_2)}{x\,(l_1 + l_2\,\cos(q_2)) + y\,l_2\,\sin(q_2)}\right).$$

Ainsi, on aboutit au modèle géométrique inverse suivant :

$$q_1 = Arctg\left(\frac{y\,(l_1 + l_2\,\cos(q_2)) - x\,l_2\,\sin(q_2)}{x\,(l_1 + l_2\,\cos(q_2)) + y\,l_2\,\sin(q_2)}\right),$$

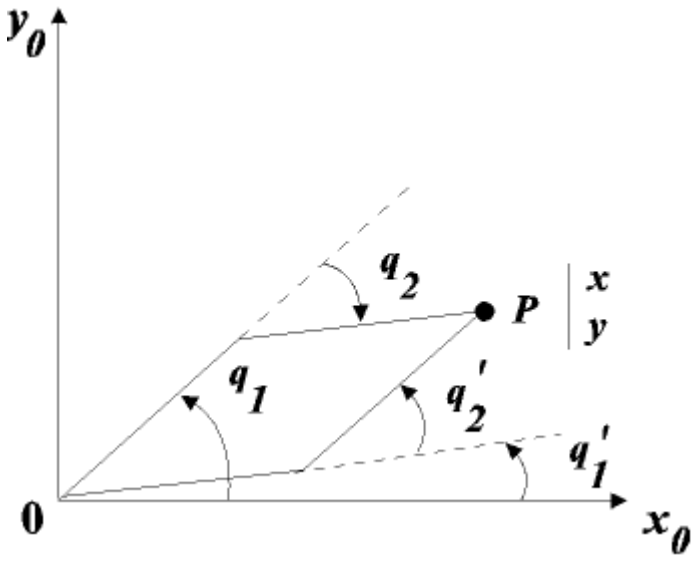
$$q_2 = \pm Arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - \left(l_1^2 + l_2^2\right)}{2\,l_1\,l_2}\right).$$

Rappel:

cos(a + b) = cos(a) cos(b) - sin(a) sin(b),

sin(a + b) = sin(a) cos(b) + cos(a) sin(b)

On remarque qu'il y a 2 solutions, correspondant à 2 postures différentes du bras (sous réserve qu'il n'y ait pas de butées sur les articulations) : L'une est dite "coude haut", l'autre "coude bas"



Cinématique directe inverse
Méthode de Paul

Dans le cas de robots à géométrie simple (pour lesquels la plupart des distances *dj et rj sont nulles et les* angles q_j *et* a_j *sont égaux à 0,* $\pm\Pi/2$ *), le modèle géométrique inverse (M.G.I.) peut être obtenu* analytiquement *via la méthode de Paul.*

Considérons le robot décrit par la matrice de transformation suivante :

$$^{0}T_{n} = {}^{0}T_{1}(q1) * \ldots\ldots *^{n-1}T_{n}(qn)$$

Soit U_0 la situation du repère R_n (lié à l'organe terminal) décrit par :

$$U_0 = \begin{bmatrix} S_x & N_x & A_x & P_x \\ S_y & N_y & A_y & P_y \\ S_z & N_z & A_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cinématique directe inverse

Rappel On a :

- $\overrightarrow{x_n} = S_x\overrightarrow{x_0} + S_y\overrightarrow{y_0} + S_z\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{y_n} = N_x\overrightarrow{x_0} + N_y\overrightarrow{y_0} + N_z\overrightarrow{z_0}$, $\overrightarrow{z_n} = A_x\overrightarrow{x_0} + A_y\overrightarrow{y_0} + A_z\overrightarrow{z_0}$, (3 paramètres (indépendants) pour définir l'orientation du repère R_n par rapport au repère de base).
- $\overrightarrow{O_0O_n} = P_x\overrightarrow{x_0} + P_y\overrightarrow{y_0} + P_z\overrightarrow{z_0}$ (3 paramètres (indépendants) pour définir la position du point P).

Le M.G.I. est obtenu en résolvant l'équation matricielle suivante :

$$U_0 = {}^0T_1(q1)* \ldots\ldots {}^{*n-1}T_n(qn)$$

La méthode de Paul permet la détermination de *q1 , puis q2 et ainsi de suite jusqu'à qn . Il s'agit de* déplacer l'une après l'autre chacune des variables articulaires (*q1 ,..., qn) dans le membre de gauche de* l'équation. Pour cela, on multiplie par ${}^jT_{j-1}$ *(en prenant successivement j = 1,..,n) de part et d'autre* dans l'équation.

Cinématique directe inverse

Exemple:

Considérons un robot à 6 *d.d.l. (n = 6). Appliquons la méthode :*

-Pré-multiplier l'équation précédente par ${}^{1}T_{0}$ *, soit :*

$$ {}^{1}\mathbf{T}_{0}\mathbf{(q1)*U}_{0} = {}^{1}\mathbf{T}_{2}\mathbf{(q2)*} \ldots\ldots {}^{*5}\mathbf{T}_{6}\mathbf{(q6)} $$

Les éléments situés dans le membre de gauche sont soient indépendants, soient fonctions de *q1* .

Les éléments situés dans le membre de droite sont soient constants, soient fonctions de *q2 ,..., q6* .

- Déduire *q1 de l'équation précédente.*
- Pré-multiplier l'équation précédente par ${}^{2}\mathbf{T}_{1}$, *soit :*

$$ {}^{2}\mathbf{T}_{1}\mathbf{(q2)*}{}^{1}\mathbf{T}_{0}\mathbf{(q1)*U}_{0} = {}^{2}\mathbf{T}_{3}\mathbf{(q3)*} \ldots\ldots {}^{*5}\mathbf{T}_{6}\mathbf{(q6)} $$

- En déduire *q2* .
- Continuer cette procédure pour en déduire *q3,...,q6.*

Cinématique directe inverse

le calcul de tous les q_i est la suivante :

$$U_0 = {}^0T_1.{}^1T_2.{}^2T_3.{}^3T_4.{}^4T_5.{}^5T_6$$
$${}^1T_0U_0 = {}^1T_2.{}^2T_3.{}^3T_4.{}^4T_5.{}^5T_6 \rightarrow q_1$$
$${}^2T_1U_1 = {}^2T_3.{}^3T_4.{}^4T_5.{}^5T_6 \rightarrow q_2$$
$${}^3T_2U_2 = {}^3T_4.{}^4T_5.{}^5T_6 \rightarrow q_3$$
$${}^4T_3U_3 = {}^4T_5.{}^5T_6 \rightarrow q_4$$
$${}^5T_4U_4 = {}^5T_6 \rightarrow q_5 \text{ et } q_6$$

avec $\boxed{U_j = {}^jT_{j-1}U_{j-1}}$

Cinématique directe inverse

Lorsque nous utilisons la méthode précédente, nous sommes confrontés de manière itérative à la résolution de système d'équations de différents types. L'utilisation d'un grand nombre de robots industriels a permis de constater que les principaux types rencontrés sont peu nombreux. Les 10 types d'équations sont détaillés ci-dessous.

ROBOTIQUE

Jacobienne, dynamique des robots



Matrice Jacobienne

Introduction

Nous avons déterminé dans le chapitre précédent les MGD, et MGI d'une structure mécanique articulée. L'inconvénient de ces modèles est qu'ils ne permettent pas d'obtenir directement l'influence de petits déplacements articulaires sur le déplacement de l'effecteur.

Supposons que la trajectoire à réaliser ait une géométrie déterminée dans l'espace opérationnel.

Il sera alors nécessaire de déterminer la relation entre les déplacements élémentaires de l'effecteur le long de sa trajectoire, et les variations élémentaires des coordonnées articulaires.

Cela permettra de calculer de façon itérative les variables articulaires à atteindre en connaissant les coordonnées opérationnelles. La solution dépend de la configuration courante de la structure articulée.

Le modèle mathématique qui permet ce calcul est le Modèle différentiel inverse, il établit la relation suivante :

Matrice Jacobienne

Le modèle mathématique qui permet ce calcul est le Modèle différentiel inverse, il établit la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} d\theta\ 1 \\ d\theta\ 2 \\ d\theta\ 3 \\ d\theta\ .. \\ d\theta\ .. \\ d\theta\ n \end{Bmatrix} = DI(\theta\ i) \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{Bmatrix}$$

Cet outil ne s'obtient pas directement, et nécessite le calcul préalable qui permet d'obtenir la relation :

$$\begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{Bmatrix} = DD(\Theta i) \begin{Bmatrix} d\theta\ 1 \\ d\theta\ 2 \\ d\theta\ 3 \\ d\theta\ .. \\ .... \\ d\theta\ n \end{Bmatrix}$$

Ce modèle est le modèle différentiel direct

Matrice Jacobienne

Modèle différentiel direct:

Il s'agit ici de résoudre le problème suivant :

J'impose des petites variations aux articulations d'une structure, qu'elles sont les variations correspondantes subies par l'effecteur dans l'espace opérationnel ?

$$\begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} dq\ 1 \\ dq\ 2 \\ dq\ 3 \\ dq\ .. \\ .... \\ dq\ n \end{Bmatrix} = J(q\ i) \begin{Bmatrix} dq\ 1 \\ dq\ 2 \\ dq\ 3 \\ dq\ .. \\ .... \\ dq\ n \end{Bmatrix}$$ cette relation est le MODELE DIFFERENTIEL DIRECT

Matrice Jacobienne

Le modèle différentiel direct permet donc de caractériser les variations de coordonnées opérationnelles en fonction de variations de coordonnées articulaires dans le domaine de petits déplacements

$dX = J(qi)\ dqi$ avec $J(qi) = \frac{\partial X}{\partial qi}$ J(qi) est appelée Jacobienne du robot

Cette écriture est intéressante pour plusieurs raisons :

⇒Elle permet de traduire le modèle cinématique direct :
Si au lieu de calculer les différentielles (caractéristiques de petits déplacements) on calcule la dérivée par rapport au temps des coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées articulaires. On obtient l'expression des vitesses opérationnelles, en fonction des vitesses articulaires :

$$\dot{X} = J(qi)\,\dot{qi}$$

⇒Elle permet le calcul du modèle différentiel inverse

⇒Elle permet pour un problème statique, d'établir une relation entre les efforts s'exerçant sur l'effecteur, et les couples correspondant au niveau des actionneurs.

⇒Elle facilite le calcul des singularités

Matrice Jacobienne

Determination de la matrice jacobienne

3 méthodes de calcul sont présentées :

Méthode explicite directe

Méthode analytique

Méthode différentielle

Matrice Jacobienne

Méthode analytique:

Cette méthode consiste à déterminer directement à partir du modèle géométrique direct, les différentes variables du jacobien. Il faut pour cela dériver les équations du MGD.

Les équations qui caractérisent la position de l'effecteur sont fournies par les relations :

$$ {}^{0}T_{eff} = \begin{bmatrix} {}^{0}A_{eff} & {}^{0}P_{i-1} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ avec } {}^{0}P_{i-1} \text{ coordonnées de l'effecteur/R0} $$

ainsi nous avons :

$$ \dot{X} = \sum_{1}^{\text{Nbre articulations}} \frac{\partial\ f_1(q)}{\partial\ (qi)} \dot{q}_i \ , \ \dot{Y} = \sum_{1}^{\text{Nbre articulations}} \frac{\partial\ f_2(q)}{\partial\ (qi)} \dot{q}_i \ , \ \dot{Z} = \sum_{1}^{\text{Nbre articulations}} \frac{\partial\ f_3(q)}{\partial\ (qi)} \dot{q}_i $$

$$ Jij = \frac{\partial\ fi(q)}{\partial\ (qj)} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1,...,n \text{ avec n le nombre d'articulations} $$

Ces équations sont obtenues directement dans le repère R0

Matrice Jacobienne

Méthode analytique:

Les mathématiciens parlent de matrice Jacobienne alors que les roboticiens utilisent plutôt les termes Jacobien ou Jacobienne. C'est une matrice qui relie les vitesses de l'organe terminal (le poignet du robot) aux vitesses articulaires du robot.

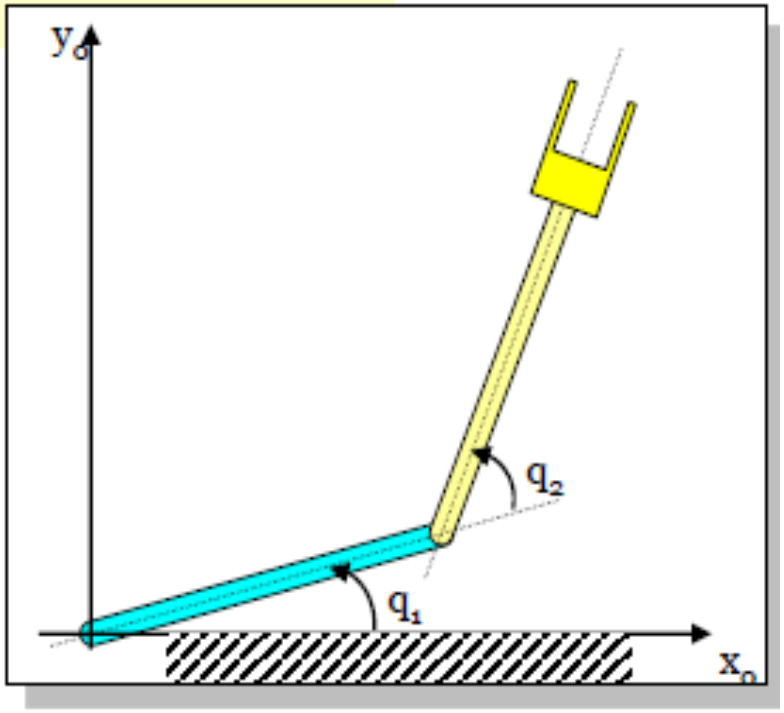
$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J \cdot \dot{q}$$

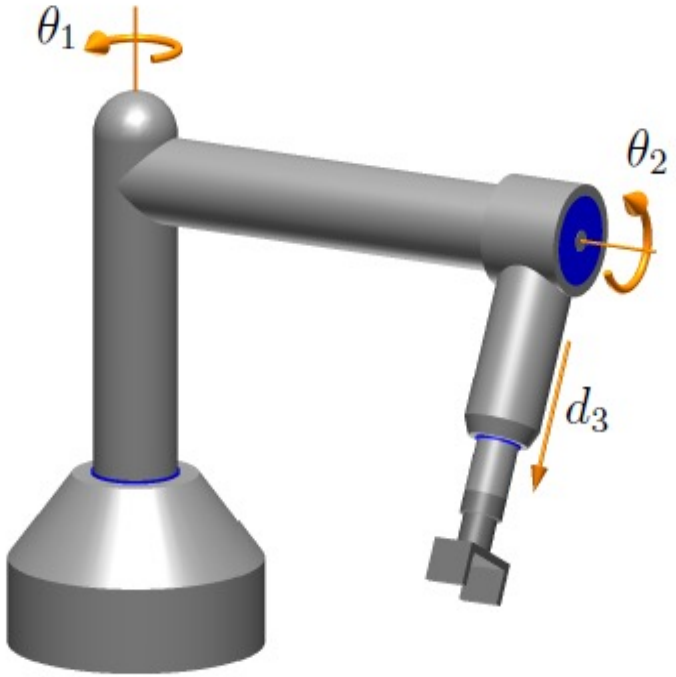
v et ω sont les vitesses translationnelles et rotationnelles de l'organe terminal. Ces composantes sont choisies pour pouvoir identifier d'une manière unique la vitesse de ce dernier.

Matrice Jacobienne

Exercices

Trouver le Jacobien des 2 robots.
Considérez que chaque lien est de longueur li.





Matrice Jacobienne

Méthode différentielle et opérateur différentiel

- Soit une matrice de rotation roulis-tangage-lacet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{RPY}(\phi,\theta,\psi) &= \boldsymbol{ROT}(z,\phi)\boldsymbol{ROT}(y,\theta)\boldsymbol{ROT}(x,\psi) \\ &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & 0 \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Cette matrice permet de représenter n'importe quel orientation d'un repère par rapport à un autre repère. Considérons maintenant des variations infinitésimales de l'angle de roulis, tangage et lacet:

$$\begin{aligned} \phi &= \delta_z \\ \theta &= \delta_y \\ \psi &= \delta_x \end{aligned}$$

- Alors:

$$\boldsymbol{RPY}(\delta_z,\delta_y,\delta_x) \approx \begin{bmatrix} 1 & \delta_y\delta_x - \delta_z & \delta_y + \delta_z\delta_x & 0 \\ \delta_z & \delta_z\delta_y + 1 & \delta_z\delta_y - \delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & 0 \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice Jacobienne

Méthode différentielle et opérateur différentiel

- Donc, la matrice de transformation reliée à un mouvement différentiel:

$$TRANS(dx,dy,dz)ROT(k,\delta_\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Donc, un mouvement différentiel peut se représenter par le **déplacement différentiel**:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}$$

- Ainsi que par l'opérateur différentiel:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} &= \boldsymbol{TRANS}(dx,dy,dz)\boldsymbol{ROT}(\boldsymbol{k},\delta_\theta) - \boldsymbol{I} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrice Jacobienne

Méthode différentielle et opérateur différentiel

- L'opérateur différentiel est donné par:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta} &= \boldsymbol{TRANS}(dx, dy, dz)\boldsymbol{ROT}(\boldsymbol{k}, \delta_\theta) - \boldsymbol{I} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Considérons un repère T qui subit un mouvement différentiel pour devenir T+dT:

$$\boldsymbol{T} + d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{TRANS}(dx, dy, dz)\boldsymbol{ROT}(\boldsymbol{k}, \delta_\theta)\boldsymbol{T}$$

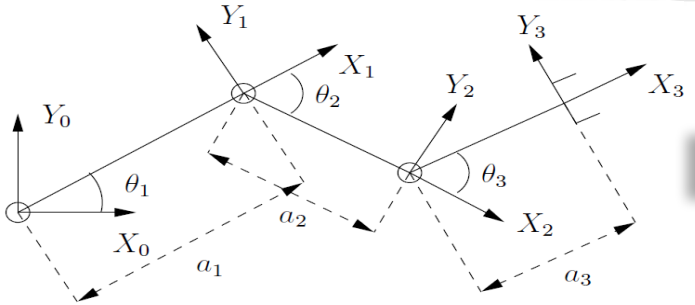
- On a donc:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{T} &= [\boldsymbol{TRANS}(dx, dy, dz)\boldsymbol{ROT}(\boldsymbol{k}, \delta_\theta) - \boldsymbol{I}]\,\boldsymbol{T} \\ d\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{T} \\ d\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{T}^{-1} &= \boldsymbol{\Delta} \end{aligned}$$

- Cette dernière équation permet souvent d'identifier les déplacements différentiels, comme nous le verrons dans le prochain exemple…

Méthode différentielle et opérateur différentiel
Exemple du robot planaire (1)

- Soit le robot planaire RRR pour lequel nous avions réalisé la cinématique directe:



$$T = {}^0T_1\ {}^1T_2\ {}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_3C_{123} + a_2C_{12} + C_1a_1 \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_3S_{123} + a_2S_{12} + S_1a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calculons le changement qui affecte cette matrice lorsqu'elle subie un déplacement différentiel de $\delta\theta_1$:

$$\frac{dT}{\delta\theta_1} = \begin{bmatrix} -S_{123} & -C_{123} & 0 & -a_3S_{123} - a_2S_{12} - S_1a_1 \\ C_{123} & -S_{123} & 0 & a_3C_{123} + a_2C_{12} + C_1a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Et puisque :

$$dT\ T^{-1} = \Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Alors:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -S_{123} & -C_{123} & 0 & -a_3S_{123} - a_2S_{12} - S_1a_1 \\ C_{123} & -S_{123} & 0 & a_3C_{123} + a_2C_{12} + C_1a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\theta_1 \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_3C_{123} + a_2C_{12} + C_1a_1 \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_3S_{123} + a_2S_{12} + S_1a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -a_3S_{123} - a_2S_{12} - S_1a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_3C_{123} + a_2C_{12} + C_1a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\theta_1$$

Méthode différentielle et opérateur différentiel
Exemple du robot planaire (2)

- Nous pouvons alors identifier le déplacement différentiel (**D**) lorsque le robot est affecté d'un déplacement infinitésimal au niveau de son joint 1 (θ_1):

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - S_1 a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\theta_1$$

- Ce dernier résultat implique donc que le déplacement différentiel est donc donnée par:

$$D_{\delta\theta_1} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - S_1 a_1 \\ a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta\theta_1$$

Méthode différentielle et opérateur différentiel
Exemple du robot planaire (3)

- Nous pouvons refaire la même démarche pour un mouvement infinitésimal au niveau des joints 2 et 3, les résultats que nous obtiendrions sont:

$$D_{\delta\theta_1} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - S_1 a_1 \\ a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta\theta_1 \qquad \boldsymbol{D}_{\delta\theta_2} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} \\ a_3 C_{123} + a_2 C_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \qquad \boldsymbol{D}_{\delta\theta_3} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 S_{123} \\ a_3 C_{123} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta\theta_3$$

- Donc, le mouvement différentiel total (c'est-à-dire le mouvement différentiel obtenu étant donnée une variation infinitésimale affectant tous les joints) est:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - S_1 a_1 & -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} & -a_3 S_{123} \\ a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 & a_3 C_{123} + a_2 C_{12} & a_3 C_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} \delta_{\theta_1} \\ \delta_{\theta_2} \\ \delta_{\theta_3} \end{bmatrix}$$

Ceci se nomme la matrice **Jacobienne:** ${}^0J$

Matrice Jacobienne et son interprétation (1)

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - S_1 a_1 & -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} & -a_3 S_{123} \\ a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 & a_3 C_{123} + a_2 C_{12} & a_3 C_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\theta_1} \\ \delta_{\theta_2} \\ \delta_{\theta_3} \end{bmatrix}$$

Ceci se nomme la matrice **Jacobienne** : ${}^0J$

- La matrice Jacobienne est extrêmement puissante…
  - Comme nous l'avons vu, la matrice Jacobienne permet de lier les déplacements infinitésimaux dans l'espace articulaires au mouvement différentiel dans l'espace cartésien.
  - La matrice Jacobienne permet aussi de lier les vitesses articulaires aux vitesses dans l'espace cartésien:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = {}^0\boldsymbol{J} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Matrice Jacobienne et son interprétation (2)

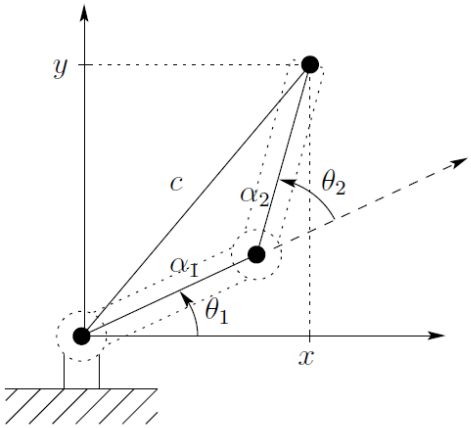
- Supposons à l'inverse que, étant données des vitesses dans le repère de base, nous désirons connaître les vitesses pour chacune des articulations:

$$\dot{q} = {}^{0}J^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

- Pensez-vous qu'en général, la matrice Jacobienne est inversible?
- Pas toujours! Rien n'assure que la matrice Jacobienne sera carrée.
  - En fait, elle ne sera pas carrée lorsque le nombre de degrés de liberté du robot est différent du nombre de degrés de liberté du robot dans l'espace cartésien.
- Dans le cas où vous cherchez à inverser une Jacobienne qui n'est pas carrée, vous devez vous référez au pseudo-inverse (dans les notes: *inverse généralisé*), voir l'annexe à cet effet.

Matrice Jacobienne et son interprétation (3)

- Lorsque la matrice Jacobienne carrée n'est pas inversible, cela signifie que le robot se trouve dans une configuration de singularité. Par exemple:



$$J^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 s_{\theta_2}} \begin{bmatrix} \alpha_2 c_{\theta_1+\theta_2} & \alpha_2 s_{\theta_1+\theta_2} \\ -\alpha_1 c_{\theta_1} - \alpha_2 c_{\theta_1+\theta_2} & -\alpha_1 s_{\theta_1} - \alpha_2 s_{\theta_1+\theta_2} \end{bmatrix}$$

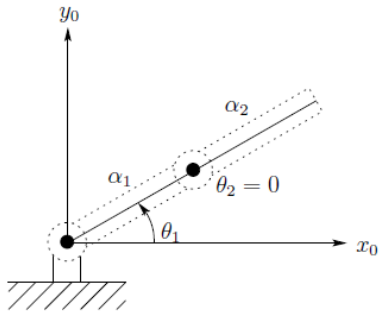


Fig. 1.27 A singular configuration.

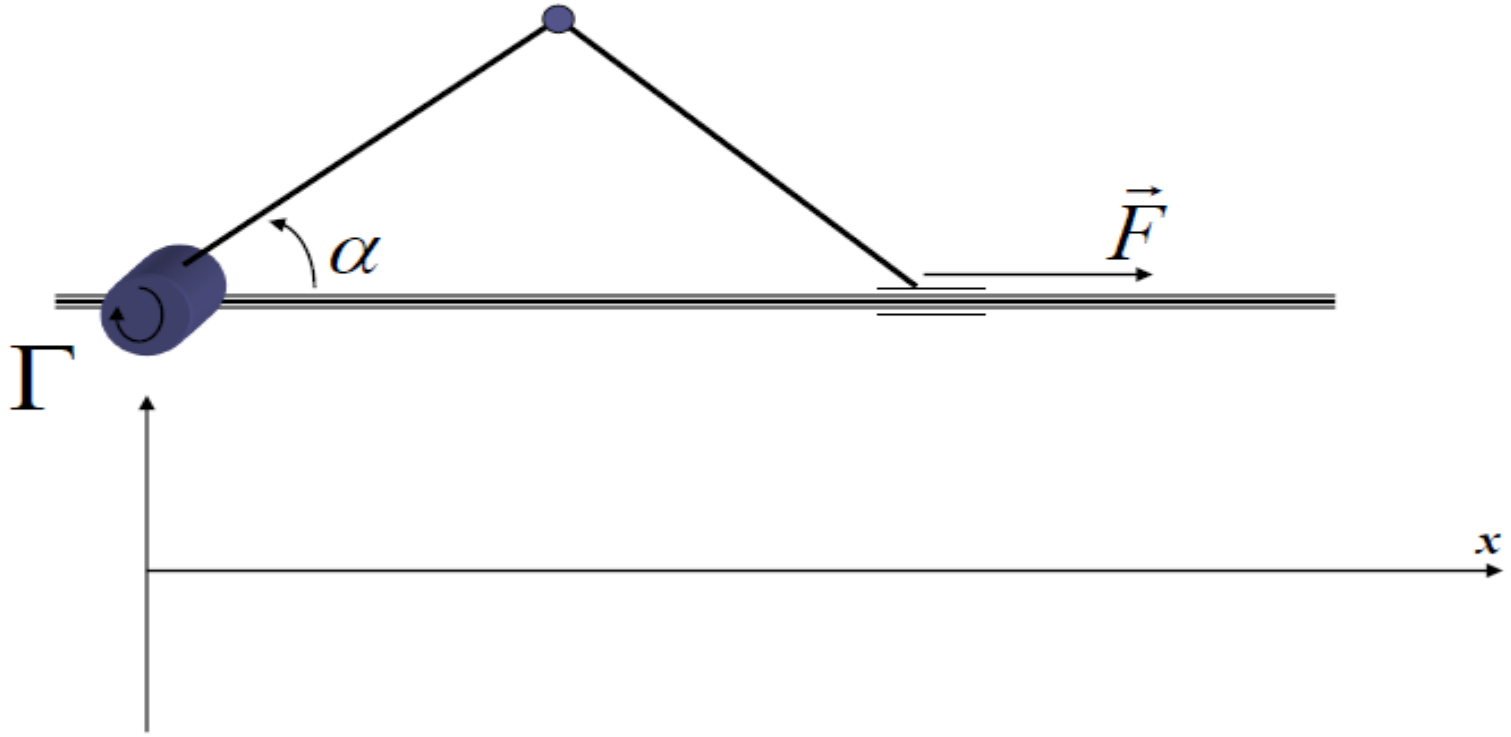
- Également: Le robot est dans une configuration singulière lorsque :

$$\text{rang}(\boldsymbol{J}) < \min\{6, n\}$$

- Donc, la matrice Jacobienne intervient dans une foule de contexte
  - Calcul de vitesse, planification de trajectoires lisses, détermination des singularités, intervient dans les équations de la dynamique des manipulateurs et dans la relation entre les forces transmis par l'effecteur et les couples articulaires (moteurs).

Relation entre les forces articulaires et opérationnelles

$$\Gamma_{art} = J^T \cdot F_{op}$$



Matrice Jacobienne
Algorithme de calcul (1)

- La matrice Jacobienne ${}^0J$ est exprimé dans le repère de base, il est toutefois simple d'exprimer la Jacobienne dans un repère arbitraire i:

$$ {}^i\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} ({}^0\boldsymbol{R}_i)^T & 0 \\ 0 & ({}^0\boldsymbol{R}_i)^T \end{bmatrix} {}^0\boldsymbol{J} $$

- Nous venons d'étudier la matrice Jacobienne, nous avons vu comment l'exprimer par rapport à un repère i, nous avons constater sa puissance et nous avons aussi vu comment la calculer.
  - Il existe toutefois une manière plus méthodique de calculer la Jacobienne…

Matrice Jacobienne
Algorithme de calcul (2)

- L'algorithme de calcul de la matrice Jacobienne:
  - Cet algorithme fonctionne si les repères ont été apposés selon la méthode de Denavit-Hartenberg

1. Initialiser $\boldsymbol{J} = 0$ où $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{J}_2 & \cdots & \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix}$ est une matrice $6 \times n$.
2. Initialiser $i = n$
3. Calculer ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_n$.
4. Si le joint i est un joint rotoïde,

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times {}^{i-1}p_n \\ \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Si le joint i est un joint prismatique,

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Mettre à jour $i = i - 1$
6. Si $i = 0$, le calcul de la jacobienne est terminé.
7. Sinon

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\boldsymbol{R}_i & 0 \\ 0 & {}^{i-1}\boldsymbol{R}_i \end{bmatrix} \boldsymbol{J}$$

8. Aller à l'étape 3.

Matrice Jacobienne
Algorithme de calcul (3) - Exemple

- On peut recommencer le calcul de la Jacobienne du robot planaire à l'aide de cet algorithme:

Étape 1 :

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Étape 2 : $i = 3$
Étape 3 :

$${}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3 a_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice Jacobienne
Algorithme de calcul (4) - Exemple

Étape 4 : le joint 3 est un joint rotoïde,

$$\boldsymbol{J}_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_3 a_3 \\ C_3 a_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Étape 5 : $i = 2$
Étape 6 : $i \neq 0$
Étape 7 :

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -S_{23} a_3 \\ 0 & 0 & C_{23} a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice Jacobienne
Algorithme de calcul (5) - Exemple

Étape 3 :

$$ {}^1T_3 = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & a_3 C_{23} + C_2 a_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3 S_{23} + S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Étape 4 : le joint 2 est un joint rotoïde,

$$ \boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_3 S_{23} - S_2 a_2 \\ a_3 C_{23} + C_2 a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} $$

Étape 5 : $i = 1$
Étape 6 : $i \neq 0$
Étape 7 :

$$ \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{J} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 S_{123} - S_{12} a_2 & -S_{123} a_3 \\ 0 & a_3 C_{123} + C_{12} a_2 & C_{123} a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} $$

Matrice Jacobienne
Algorithme de calcul (6) - Exemple

Étape 3 :

$$ {}^0T_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_3 S_{123} + a_2 S_{12} + S_1 a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Étape 4 : le joint 1 est un joint rotoïde,

$$ \boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - S_1 a_1 \\ a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} $$

Étape 5 : $i = 0$
Étape 6 : Terminé

$$ {}^0\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -a_3 S_{123} - a_2 S_{12} - S_1 a_1 & -a_3 S_{123} - S_{12} a_2 & -S_{123} a_3 \\ a_3 C_{123} + a_2 C_{12} + C_1 a_1 & a_3 C_{123} + C_{12} a_2 & C_{123} a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} $$

Dynamique (1)
Rappel des notions de base

- La dynamique d'un robot manipulateur peut être développé à partir de la méthode d'Euler-Lagrange:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}}$$

où $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q})$ est le lagrangien, $T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ l'énergie cinétique totale, $U(\boldsymbol{q})$ l'énergie potentielle, $\boldsymbol{q}$ le vecteur des positions aux articulations (coordonnées généralisées) et $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur des couples aux articulations (forces généralisées).

L'application de l'équation de Lagrange au robot manipulateur résulte en une équation de la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

S'il y a présence de friction dans les joints, on peut en tenir compte en introduisant un terme de friction $\boldsymbol{b}(\dot{\boldsymbol{q}})$ pour obtenir

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{b}(\dot{\boldsymbol{q}})$$

Dynamique (2)
Rappel des notions de base

- Soit une particule de masse *m* qui peut seulement se déplacer verticalement:

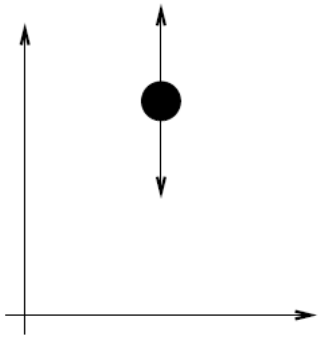


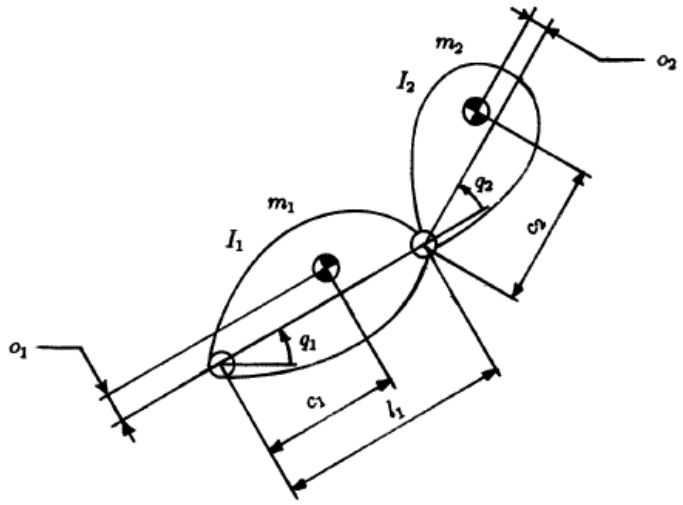
Fig. 6.1 One Degree of Freedom System

- Son énergie cinétique est: $T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$
- Son énergie potentielle est : $U = mgy$
- Le Lagrangien est: $L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy$
- La dynamique de ce système, obtenue par Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = f$

$$\boxed{m\ddot{y} = f - mg}$$

Dynamique (4)

- Soit un robot RR à deux degrés de liberté:



L'énergie cinétique des deux segments est donnée par

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + I_1 \dot{q}_1^2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_2 v_2^2 + I_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2)$$

où I_1 et I_2 sont les inerties des segments 1 et 2 par rapport à leur centre de masse, v_1 et v_2 sont les vitesses de ces centres de masse.

Dynamique (5)

Les positions des centres de masse des segments 1 et 2 sont donnés par

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_1 \cos q_1 - o_1 \sin q_1 \\
y_1 &= c_1 \sin q_1 + o_1 \cos q_1 \\
x_2 &= l_1 \cos q_1 + c_2 \cos(q_1 + q_2) - o_2 \sin(q_1 + q_2) \\
y_2 &= l_1 \sin q_1 + c_2 \sin(q_1 + q_2) + o_2 \cos(q_1 + q_2)
\end{aligned}
$$

et leur vitesse par

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -(c_1 \sin q_1 + o_1 \cos q_1)\dot{q}_1 \\
\dot{y}_1 &= (c_1 \cos q_1 - o_1 \sin q_1)\dot{q}_1 \\
v_1^2 &= (c_1^2 + o_1^2)\dot{q}_1^2 \\
\dot{x}_2 &= -l_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 - [c_2 \sin(q_1 + q_2) + o_2 \cos(q_1 + q_2)](\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
\dot{y}_2 &= l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + [c_2 \cos(q_1 + q_2) - o_2 \sin(q_1 + q_2)](\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
v_2^2 &= l_1^2 \dot{q}_1^2 + (c_2^2 + o_2^2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
&\quad + 2l_1(c_2 \cos q_2 - o_2 \sin q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)
\end{aligned}
$$

Dynamique (6)

$$v_1^2 = (c_1^2 + o_1^2)\dot{q}_1^2$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= l_1^2\dot{q}_1^2 + (c_2^2 + o_2^2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &\quad + 2l_1(c_2\cos q_2 - o_2 \sin q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{aligned}$$

L'énergie cinétique des segments est donnée par

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}[m_1(c_1^2 + o_1^2) + I_1]\dot{q}_1^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2}m_2 l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}[m_2(c_2^2 + o_2^2) + I_2](\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &\quad + m_2 l_1 c_2 \cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - m_2 l_1 o_2 \sin(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{aligned}$$

En utilisant les paramètres :

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1(c_1^2 + o_1^2) + I_1 + m_2 l_1^2 \\ p_2 &= m_2(c_2^2 + o_2^2) + I_2 \\ p_3 &= m_2 l_1 c_2 \end{aligned}$$

on obtient l'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= \frac{1}{2}p_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}p_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + p_3\cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ &\quad - p_4 \sin(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{aligned}$$

Dynamique (7)

Si la gravité est dans le sens négatif de l'axe des Y, l'énergie potentielle totale est donnée par

$$\begin{aligned} U &= m_1 g(c_1 \sin q_1 + o_1 \cos q_1) \\ &\quad + m_2 g(l_1 \sin q_1 + c_2 \sin(q_1 + q_2) + o_2 \cos(q_1 + q_2)) \end{aligned}$$

En définissant les paramètres

$$\begin{aligned} p_5 &= (m_1 c_1 + m_2 l_1) g \\ p_6 &= m_1 o_1 g \\ p_7 &= m_2 c_2 g \\ p_8 &= m_2 o_2 g \end{aligned}$$

on obtient

$$U = p_5 \sin q_1 + p_6 \cos q_1 + p_7 \sin(q_1 + q_2) + p_8 \cos(q_1 + q_2)$$

Dynamique (8)

- On peut alors obtenir la dynamique par la méthode d'Euler-Lagrange pour chacun des liens:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}}$$



$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (p_1 + p_2 + 2p_3\cos q_2 - 2p_4\sin q_2)\ddot{q}_1 \\
&\quad + (p_2 + p_3\cos q_2 - p_4\sin q_2)\ddot{q}_2 \\
&\quad - (p_3\sin q_2 + p_4\cos q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
&\quad + p_5\cos q_1 - p_6\sin q_1 + p_7\cos(q_1+q_2) - p_8\sin(q_1+q_2) \\
\tau_2 &= (p_2 + p_3\cos q_2 - p_4\sin q_2)\ddot{q}_1 + p_2\ddot{q}_2 + (p_3\sin q_2 + p_4\cos q_2)\dot{q}_1^2 \\
&\quad + p_7\cos(q_1+q_2) - p_8\sin(q_1+q_2)
\end{aligned}$$

Dynamique (9)

- Sous forme matricielle:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= (p_1 + p_2 + 2p_3 \cos q_2 - 2p_4 \sin q_2)\ddot{q}_1 \\
&\quad + (p_2 + p_3 \cos q_2 - p_4 \sin q_2)\ddot{q}_2 \\
&\quad - (p_3 \sin q_2 + p_4 \cos q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\
&\quad + p_5 \cos q_1 - p_6 \sin q_1 + p_7 \cos(q_1 + q_2) - p_8 \sin(q_1 + q_2) \\
\tau_2 &= (p_2 + p_3 \cos q_2 - p_4 \sin q_2)\ddot{q}_1 + p_2\ddot{q}_2 + (p_3 \sin q_2 + p_4 \cos q_2)\dot{q}_1^2 \\
&\quad + p_7 \cos(q_1 + q_2) - p_8 \sin(q_1 + q_2)
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{D}(q) = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 + 2p_3 \cos q_2 - 2p_4 \sin q_2 & p_2 + p_3 \cos q_2 - p_4 \sin q_2 \\ p_2 + p_3 \cos q_2 - p_4 \sin q_2 & p_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{h}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -(p_3 \sin q_2 + p_4 \cos q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ (p_3 \sin q_2 + p_4 \cos q_2)\dot{q}_1^2 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{g}(q) = \begin{bmatrix} p_5 \cos q_1 - p_6 \sin q_1 + p_7 \cos(q_1 + q_2) - p_8 \sin(q_1 + q_2) \\ p_7 \cos(q_1 + q_2) - p_8 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}
$$

Dynamique (10)

- Sous forme matricielle (autre forme):

$$D(q) = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 + 2p_3\cos q_2 - 2p_4\sin q_2 & p_2 + p_3\cos q_2 - p_4\sin q_2 \\ p_2 + p_3\cos q_2 - p_4\sin q_2 & p_2 \end{bmatrix}$$

$$h(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -(p_3\sin q_2 + p_4\cos q_2)\dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ (p_3\sin q_2 + p_4\cos q_2)\dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} p_5\cos q_1 - p_6\sin q_1 + p_7\cos(q_1+q_2) - p_8\sin(q_1+q_2) \\ p_7\cos(q_1+q_2) - p_8\sin(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

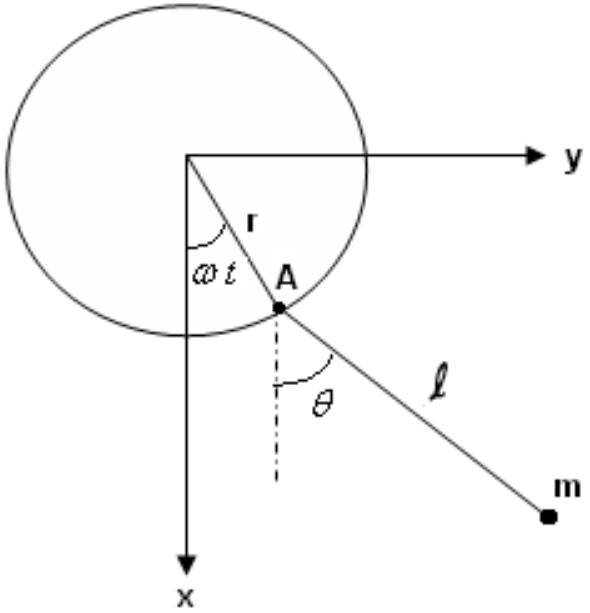
$$h(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\dot{q}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} -(p_3\sin q_2 + p_4\cos q_2)\dot{q}_2 & -(p_3\sin q_2 + p_4\cos q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ (p_3\sin q_2 + p_4\cos q_2)\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice1:

Dans un plan vertical oxy, on considère un pendule simple (l,m) dont le point de suspension A se déplace à vitesse angulaire constante w , sur un cercle de rayon r.

Calculer le lagrangien du système et en déduire l'équation du mouvement.



Exercice2:

En G_1 et G_2 sont disposées deux masse ponctuelles m_1 et m_2 .
La masse des barres est négligeable et les liaisons sont parfaites.

Etablir le lagrangien du système
Endéduire les équations du mouvement dans le cas des faibles oscillations

