

Examens corrigés

Robotique industrielle

2^{ème} année FI-GIL

3^{ème} année FI-GMSI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

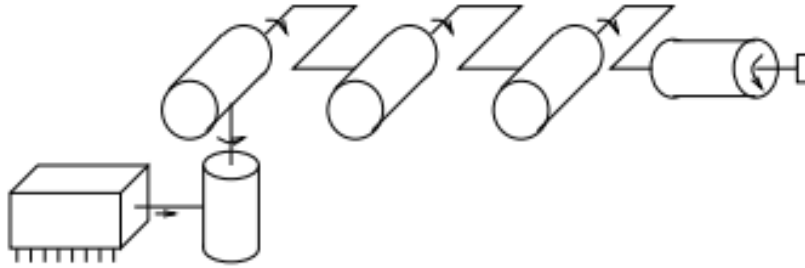
ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

ENSET Mohammedia
FI-GMSI Janvier 2021
Correction Examen robotique
Durée : 2h

Exercice 1 :

La structure suivante est un robot à 6 degrés de liberté :



1. Mettre en place les repères.
2. Compléter le tableau suivant :

	α_i	d_i	θ_i	r_i
R0 --> R1				
R1 --> R2				
R2 --> R3				
R3 --> R4				
R5 --> R6				

Exercice 2 :

On considère un robot manipulateur ayant trois articulations rotoïdes d'axe 1 vertical et d'axes 2 et 3 horizontaux (voir figure 1a). La figure 1b représente une solution basée sur un choix particulier des repères R_0 , R_1 , R_2 , et R_3 . On note θ_1 , θ_2 , et θ_3 les trois variables articulaires de ce robot.

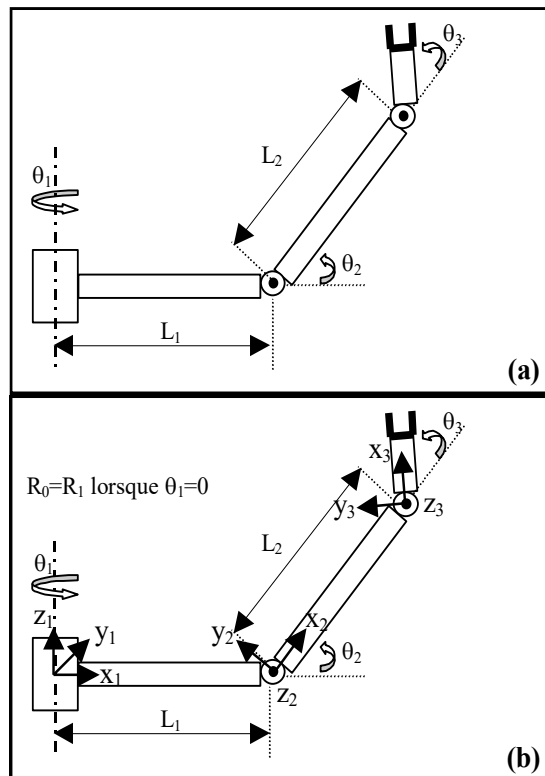


Figure 1 : (a) Robot manipulateur non planaire à 3 articulations rotoïdes. (b) Une modélisation possible de ce robot.

1. Donnez les paramètres de Denavit-Hartenberg associés au modèle représenté par la figure 1b :

	d_i	θ_i	r_i	α_i
R0 --> R1	0	θ_1	L_1	90
R1 --> R2	0	θ_2	L_2	0
R2 --> R3	0	θ_3	0	0

2. Exprimez les coordonnées du centre O_3 origine du repère R_3 en fonction de C_1 , C_2 , S_1 , S_2 , L_1 , et L_2 . En déduire une expression de la vitesse instantanée de translation de ce point. (C_i : $\cos(\theta_i)$, S_i : $\sin(\theta_i)$).

Coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \cos \theta_1 \\ y = (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \sin \theta_1 \\ z = L_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

Vitesse de O_3

La vitesse linéaire est :

$$\vec{V}_{O_3} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

En dérivant :

Composante x

$$\dot{x} = -(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - L_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_2$$

Composante y

$$\dot{y} = (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 - L_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_2$$

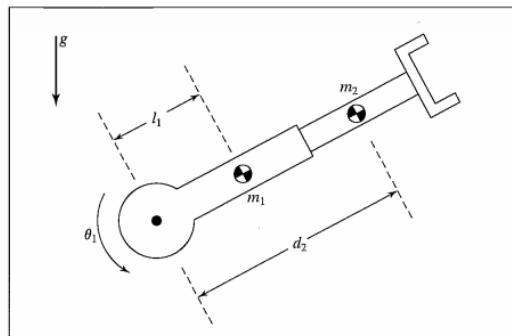
Composante z

$$\dot{z} = L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2$$

Résultat final

$$\vec{V}_{O_3} = \begin{bmatrix} -(L_1 + L_2 \cos \theta_2) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - L_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_2 \\ (L_1 + L_2 \cos \theta_2) \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 - L_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_2 \\ L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :



- matrice de DH.

	α_i	d_i	θ_i	r_i
R0 --> R1	0	0	θ_1	0
R1 --> R2			0	

- Donner l'énergie cinétique totale :

1. Énergie cinétique

Vitesse du centre de masse G_1

Le centre de masse du bras 1 tourne autour du pivot :

$$v_{G_1} = l_1 \dot{\theta}_1$$

Donc :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$$

Vitesse du centre de masse G_2

La position de G_2 est :

$$\vec{r}_{G_2} = d_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

La vitesse :

$$\dot{\vec{r}}_{G_2} = \begin{bmatrix} \dot{d}_2 \cos \theta_1 - d_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{d}_2 \sin \theta_1 + d_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$v_{G_2}^2 = \dot{d}_2^2 + d_2^2 \dot{\theta}_1^2$$

L'énergie cinétique du bras 2 :

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{d}_2^2 + d_2^2 \dot{\theta}_1^2 \right) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2$$

Énergie cinétique totale

$$T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(I_1 + I_2 + m_1 \overset{\downarrow}{v_1^2} + m_2 d_2^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2$$

3. Donner l'énergie potentielle totale

L'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$V = mgh$$

Pour m_1

La hauteur de G_1 :

$$h_1 = l_1 \sin \theta_1$$

Donc :

$$V_1 = m_1 g l_1 \sin \theta_1$$

Pour m_2

La hauteur de G_2 :

$$h_2 = d_2 \sin \theta_1$$

Donc :

$$V_2 = m_2 g d_2 \sin \theta_1$$

Énergie potentielle totale

$$V = m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g d_2 \sin \theta_1$$

ou :

$$V = g \sin \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 d_2)$$

4. Donner le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2} (I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 - g \sin \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 d_2)$$

Équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \downarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

où :

- $Q_1 = \tau_1$: couple moteur rotatif
- $Q_2 = F_2$: force prismatique

Équation pour θ_1 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 d_2^2) \dot{\theta}_1$$

Dérivée temporelle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1$$

En fin :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -g \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 d_2)$$

Équation finale :

$$(I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2m_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + g \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 d_2) = \tau_1$$

Équation pour d_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} = m_2 \dot{d}_2$$

Dérivée temporelle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} \right) = m_2 \ddot{d}_2$$

En fin :

$$\frac{\partial L}{\partial d_2} = m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 g \sin \theta_1$$

Équation finale :

$$m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin \theta_1 = F_2$$

Sous forme matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 d_2 \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \cos \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 d_2) \\ m_2 g \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Cours : 3pts**Definir les termes suivants :**

a- Répétabilité	d- Position singulière
b- Justice	e- Robot redondant
c- Porté	f- Débatement

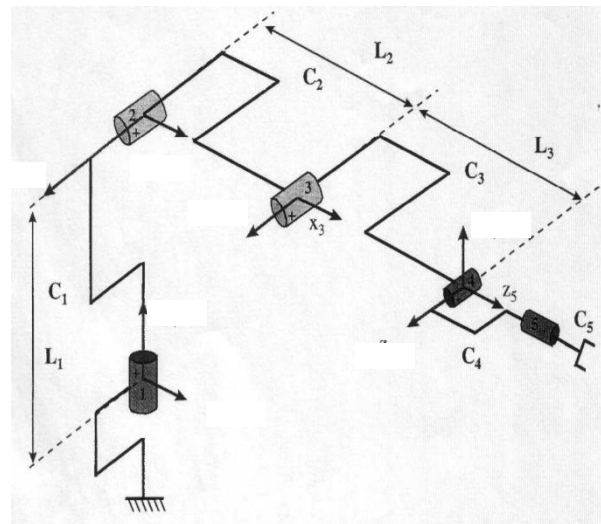
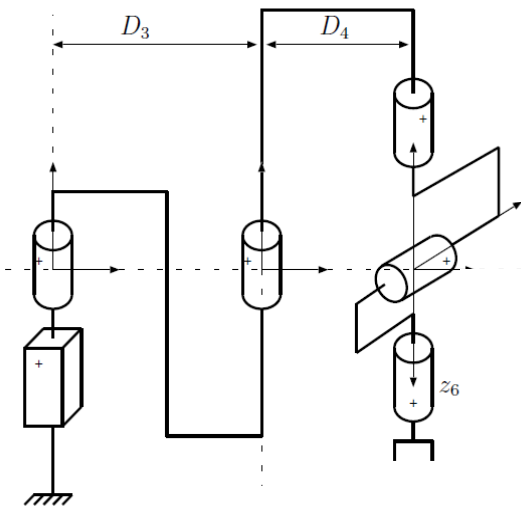
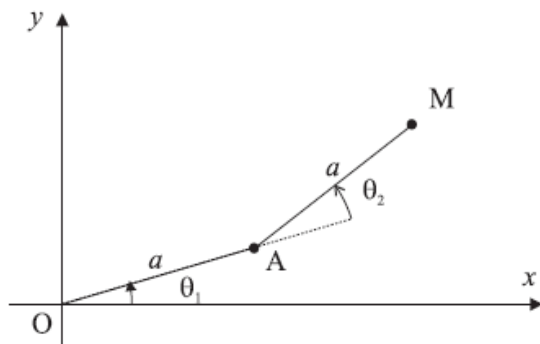
Exercice 1: 6pts

Sous forme de tableau ci-dessous donner les caractéristiques de chaque robot :

	Robot sphérique	Robot cylindrique	Robot cartésien
Schéma cinématique			
Volume atteignable			
Geometrie (XXX)			
Paramètres Denavit			

Exercice 2: 3pts

- 1- Compléter le repérage des deux robots suivant
- 2- Donner les paramètres de Denavit-Hartenberg

**Exercice 3 : 8pts**

Le schéma ci-contre représente un robot RR composé de deux bras articulés respectivement en O et en A, de longueur a et de masse m .

- 1- Donner le modèle géométrique direct
- 2- Donner le modèle géométrique inverse
- 3- Donner la matrice jacobin
- 4- Donner les équations du mouvement en utilisant le formalisme Lagrange.
- 5- Donner les équations sous forme de représentation matricielle.

Correction :**Exercice 2 :**

Figure 1 :					Figure 2 :				
i	θ_i	d_i	a_i	α_i	i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	0	1	θ_1	L_1	0	$-\frac{\pi}{2}$
2	θ_2	0	D_3	0	2	θ_2	0	L_2	0
3	θ_3	0	D_4	0	3	θ_3	0	L_3	0
4	θ_4	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	4	θ_4	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	θ_5	0	0	$+\frac{\pi}{2}$	5	θ_5	0	0	0
6	θ_6	0	0	0					

Exercice 3 :

1- Modèle géométrique direct

La position du point A (extrémité du premier bras) est :

$$\begin{cases} x_A = a \cos \theta_1 \\ y_A = a \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = a \cos \theta_1 \\ y_A = a \sin \theta_1 \end{cases}$$

La position de l'effecteur terminal M est :

$$\begin{cases} x_M = a \cos \theta_1 + a \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_M = a \sin \theta_1 + a \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_M = a \cos \theta_1 + a \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_M = a \sin \theta_1 + a \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

2- Modèle géométrique inverse :

Calcul de θ_2

On utilise :

$$x^2 + y^2$$

Après simplification :

$$x^2 + y^2 = 2a^2 + 2a^2 \cos \theta_2$$

D'où :

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - 2a^2}{2a^2}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - 2a^2}{2a^2}$$

Alors :

$$\theta_2 = \pm \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - 2a^2}{2a^2} \right)$$

$$\theta_2 = \pm \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 - 2a^2}{2a^2} \right)$$

Les deux solutions correspondent aux configurations :

- Coude haut,
- Coude bas.

Calcul de θ_1

On pose :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et :

$$\phi = \text{atan2}(y, x)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Alors :

$$\theta_1 = \phi - \text{atan2}(a \sin \theta_2, a + a \cos \theta_2)$$

Comme les longueurs sont égales :

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(\sin \theta_2, 1 + \cos \theta_2)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) - \text{atan2}(\sin \theta_2, 1 + \cos \theta_2)$$

3- Matrice Jacobienne

La Jacobienne relie les vitesses articulaires aux vitesses cartésiennes :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{bmatrix} = J(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -a \sin \theta_1 - a \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a \cos \theta_1 + a \cos(\theta_1 + \theta_2) & a \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -a \sin \theta_1 - a \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a \cos \theta_1 + a \cos(\theta_1 + \theta_2) & a \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

4- Equation différentielle

Chaque barre possède une masse m uniforme et une longueur a , alors il faut prendre en compte :

- L'énergie cinétique de translation des centres de masse,
- L'énergie cinétique de rotation des barres,
- L'énergie potentielle de chaque barre.

On note :

- θ_1 : angle de la première barre,
- θ_2 : angle relatif de la deuxième barre par rapport à la première.

Le lagrangien devient :

$$L = T - V$$

Avec :

a. Énergie cinétique

Pour une barre uniforme :

$$I_G = \frac{1}{12} m a^2$$

(Moment d'inertie autour de son centre).

Barre 1

Le centre de masse G_1 est situé à :

$$x_{G_1} = \frac{a}{2} \cos \theta_1, y_{G_1} = \frac{a}{2} \sin \theta_1$$

Sa vitesse donne :

$$v_{G_1}^2 = \frac{a^2}{4} \dot{\theta}_1^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}_1^2 \\ T_1 &= \frac{1}{2} m \frac{a^2}{4} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m a^2 \dot{\theta}_1^2 \\ T_1 &= \frac{1}{6} m a^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

Barre 2

Son centre de masse :

$$\begin{aligned} x_{G_2} &= a \cos \theta_1 + \frac{a}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_{G_2} &= a \sin \theta_1 + \frac{a}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Après dérivation et simplification :

$$v_{G_2}^2 = a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{a^2}{4} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + a^2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2$$

L'énergie cinétique :

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_G (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

avec :

$$I_G = \frac{1}{12} m a^2$$

Donc :

$$T_2 = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m a^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2$$

b. Énergie potentielle

Barre 1

$$V_1 = m g \frac{a}{2} \sin \theta_1$$

Barre 2

$$V_2 = m g \left(a \sin \theta_1 + \frac{a}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right)$$

Donc :

$$V = m g a \left(\frac{3}{2} \sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right)$$

c. Lagrangien final

$$L = T_1 + T_2 - V$$

soit :

$$L = ma^2 \left[\frac{2}{3} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \right] - mga \left[\frac{3}{2} \sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \right]$$

Voici la structure compacte du lagrangien du robot manipulateur à 2 liaisons avec deux barres massiques identiques.

5- sous forme matricielle :

Pour ce robot manipulateur plan à 2 degrés de liberté, les équations différentielles du mouvement s'écrivent sous la forme matricielle classique :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

où :

- $q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$
- $M(q)$: matrice d'inertie
- $C(q, \dot{q})\dot{q}$: termes de Coriolis et centrifuges
- $G(q)$: gravité
- $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$: couples moteurs

a. Variables généralisées

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

b. Matrice d'inertie $M(q)$

Les deux barres ont :

- même longueur a ,
- même masse m .

En notant :

- I_1, I_2 les moments d'inertie autour des centres de masse,
- centre de masse à $a/2$,

la matrice d'inertie devient :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$M_{11} = \frac{5}{3}ma^2 + ma^2 \cos \theta_2 + I_1 + I_2$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{2}ma^2 \cos \theta_2 + I_2$$

$$M_{22} = \frac{1}{3}ma^2 + I_2$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}ma^2 + ma^2\cos\theta_2 + I_1 + I_2 & \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{2}ma^2\cos\theta_2 + I_2 \\ \frac{1}{3}ma^2 + \frac{1}{2}ma^2\cos\theta_2 + I_2 & \frac{1}{3}ma^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

c. Matrice de Coriolis et centrifuge

Les termes dynamiques sont :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -ma^2\sin\theta_2 \left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 \right) \\ \frac{1}{2}ma^2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -ma^2\sin\theta_2 \left(\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 \right) \\ \frac{1}{2}ma^2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

d. Vecteur gravité

En prenant g l'accélération gravitationnelle :

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}mg\cos\theta_1 + \frac{1}{2}mg\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{1}{2}mg\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}mg\cos\theta_1 + \frac{1}{2}mg\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{1}{2}mg\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

e. Équation différentielle matricielle finale

Le système dynamique complet est :

$$\boxed{M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau}$$

avec :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

f. Forme d'état

On peut écrire les équations différentielles sous forme d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

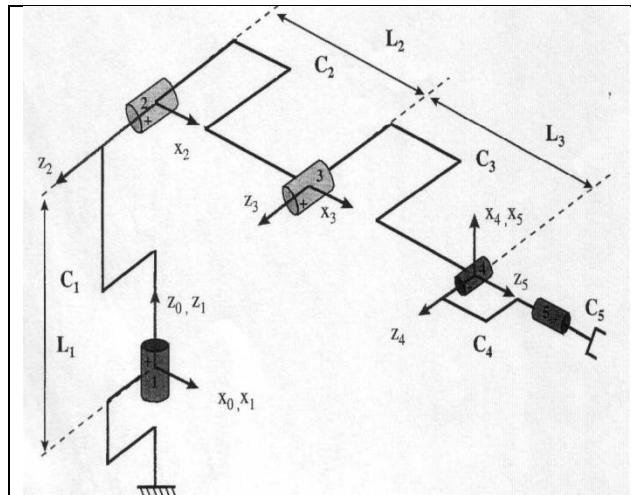
avec :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)]$$

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)]$$

ENSET Mohammedia
FI-GMSI - Janvier 2025
Examen de robotique
Durée : 2 heures

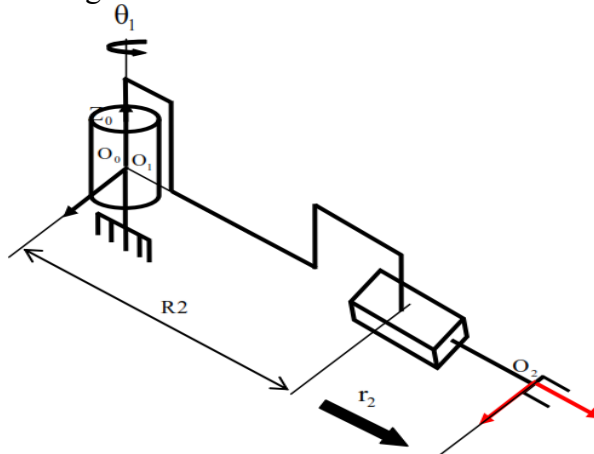
Exercice 1 :



- 1- Compléter le repérage du robot ci-contre :
- 2- Donner les paramètres de Denavit-Hartenberg

	d_i	θ_i	a_{i+1}	α_{i+1}
$R_{0 \rightarrow 1}$				
$R_{1 \rightarrow 2}$				
$R_{2 \rightarrow 3}$				
$R_{3 \rightarrow 4}$				
$R_{4 \rightarrow 5}$				

Exercice2 : Soit le robot plan à deux degrés de liberté schématisé ci-dessous :



1. Nommez sur la figure les axes X_i et Z_i des repère R_i d'origine O_i de ce robot selon les conventions de Dénavit-Hartenberg.
2. Remplissez le tableau de Dénavit-Hartenberg :

	d_i	θ_i	a_{i+1}	α_{i+1}
$R_{0 \rightarrow 1}$				
$R_{1 \rightarrow 2}$				
$R_{2 \rightarrow 3}$				

Rappel matrice DH :

$$M_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calculez les matrices M_0^1 et M_1^2 (Rappel Matrice DH : voir tableau ci-dessus) :

.....

.....

.....

.....

.....

Nom : Prénom :

4. Calculez son MGD correspondant à la matrice M_0^2 :

.....

.....

.....

.....

5. Calculer le MGI de ce robot :

.....

.....

.....

.....

.....

6. Donner la forme de l'espace de travail de ce robot :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Donner le jacobien de ce robot :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Calculer le déterminant du jacobien :

.....

.....

.....

9. Déterminer les points où on a des singularisées cinématiques :

.....

.....

.....

Prénom :

a. Donner l'énergie cinétique du corps 1 et du corps 2, puis l'énergie totale :

b. Donner l'énergie potentiel du corps 1 et du corps 2, puis l'énergie total :

c. Donner les équations du mouvement en appliquant le formalisme de Lagrange :

Nom :

Prénom :

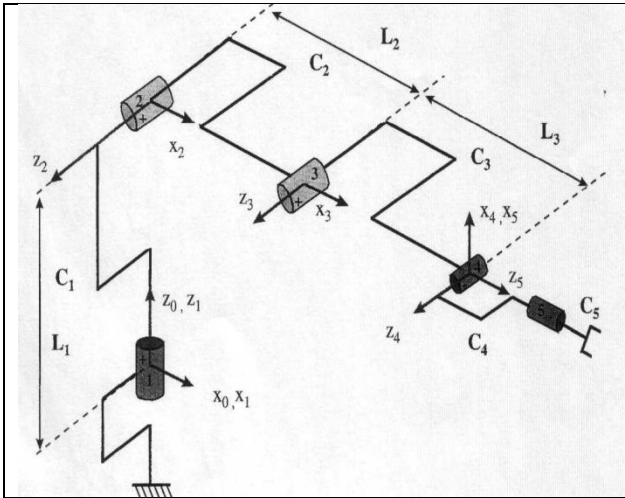
ENSET Mohammedia

FI-GMSI Janvier 2025

Examen de robotique

Durée : 2 heures

Exercice 1 :

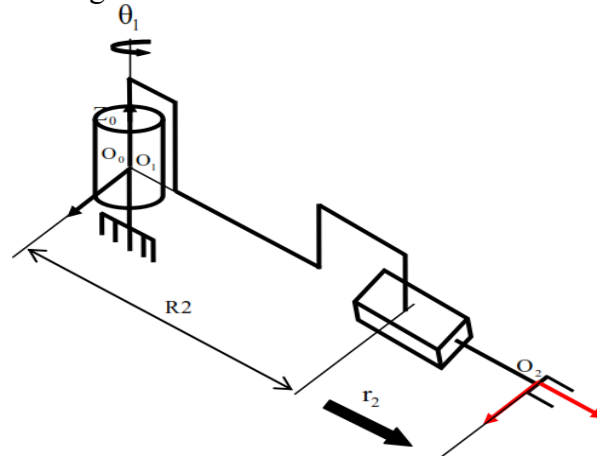


1- Compléter le repérage du robot ci-contre :

2- Donner les paramètres de Denavit-Hartenberg

	d_i	θ_i	a_{i+1}	α_{i+1}
$R_{0 \rightarrow 1}$	0	θ_1	0	0
$R_{1 \rightarrow 2}$	L1	θ_2	0	90
$R_{2 \rightarrow 3}$	0	θ_3	L2	0
$R_{3 \rightarrow 4}$	0	θ_4	L3	0
$R_{4 \rightarrow 5}$	L5	θ_5	0	90

Exercice2 : Soit le robot plan à deux degrés de liberté schématisé ci-dessous :



- Nommez sur la figure les axes X_i et Z_i des repères R_i d'origine O_i de ce robot selon les conventions de Dénavit-Hartenberg.
- Remplissez le tableau de Dénavit-Hartenberg :

	d_i	θ_i	a_{i+1}	α_{i+1}
$R_{0 \rightarrow 1}$	0	θ_1	0	0
$R_{1 \rightarrow 2}$	0	0	$R_2 + r_2$	$-\pi/2$

Rappel matrice DH :

$$M_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calculez les matrices M_0^1 et M_1^2 (Rappel Matrice DH : voir tableau ci-dessus) :

$M_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$M_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & R2+r_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
---	--

Nom :

Prénom :

4. Calculez son MGD correspondant à la matrice M_0^2 :

$$\begin{bmatrix} C1 & 0 & -S1 & -S1(R2+r_2) \\ S1 & 0 & C1 & C1(R2+r_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Calculer le MGI de ce robot :

Matrice M_1^0 :

$$\begin{bmatrix} C1 & S1 & 0 & 0 \\ -S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculez son MGI (θ_1 et r_2 en fonction de la position opérationnelle connue (P_x, P_y et P_z)).

- On écrit l'équation de position :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- On effectue la première multiplication par la matrice inverse :

$${}^1T_0 \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1T_0 {}^0T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ce qui donne le système suivant :
- Ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} C1P_x + S1P_y = 0 & (1) \\ -S1P_x + C1P_y = R2 + r_2 & (2) \\ P_z = 0 & (3) \end{cases}$$

- L'équation (1) nous donne la valeur de θ_1 en deux solutions :

$$\theta_1 = \text{ATAN2}(S1, C1) = \text{ATAN2}(-P_x, P_y)$$

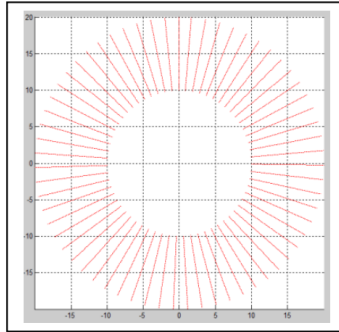
$$\theta_1' = \theta_1 + \pi$$

Nom :

Prénom :

- L'equation (2) nous donne directement l'unique solution de r_2 telle que :
$$r_2 = -S1P_x + C1P_y - R2$$

6. Donner la forme de l'espace de travail de ce robot : Disque creux



7. Donner le jacobien de ce robot :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta)(R2 + r2) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta)(R2 + r2) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

8. Calculer le déterminant du jacobien :

$$\mathbf{D} = -R2 - r2$$

9. Déterminer les points où on a des singularisées cinématiques :

$$\mathbf{D}=0 \Rightarrow -R2 - r2=0 \Rightarrow -R2 = r2$$

C'est la configuration où le bras est totalement replié sur l'axe de rotation.

10. En supposant que les bras sont de sections circulaires et symétriques, de masse m_1 et m_2 , de centre de masse G_1 et G_2 et d'inertie I_1 et I_2 :

a. Donner l'énergie cinétique du corps 1 et du corps 2, puis l'énergie total :

Pour le bras 1

Le premier bras tourne autour de l'axe Z_1 .

Son centre de masse est à une distance constante d_1 de l'axe :

$$OG_1 = d_1$$

donc :

$$\vec{OG}_1 = \begin{bmatrix} d_1 \cos \theta_1 \\ d_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

Nom :

Prénom :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$$

avec

$$v_{G_1}^2 = d_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

donc

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_1 d_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2$$

Pour le bras 2

Le second bras est prismatique.

Son centre de masse est situé à :

$$OG_2 = R_2 + r_2 + d_2$$

où d_2 est la position du centre de masse dans le bras 2.

Donc :

$$O\vec{G}_2 = \begin{bmatrix} (R_2 + r_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ (R_2 + r_2 + d_2) \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$O\vec{G}_2 = \begin{bmatrix} (R_2 + r_2 + d_2) \cos \theta_1 \\ (R_2 + r_2 + d_2) \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2$$

avec

$$v_{G_2}^2 = (R_2 + r_2 + d_2)^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{r}_2^2$$

donc

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[(R_2 + r_2 + d_2)^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{r}_2^2 \right] + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2$$

b. Donner l'énergie potentiel du corps 1 et du corps 2, puis l'énergie total :

Robot travaille dans un plan horizontal, $U=0$

c. Donner les équations du mouvement en appliquant le formalisme de Lagrange :

Nom :

Prénom :

Pour le robot RP :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

avec :

- $q_1 = \theta_1$: articulation rotative
- $q_2 = r_2$: articulation prismatique

et la distance radiale :

$$\rho = R_2 + r_2 + d_2$$

où :

- R_2 : longueur fixe
- r_2 : course prismatique
- d_2 : position du centre de masse de 2

1. Énergie cinétique

Bras 1

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_1 d_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2$$

Bras 2

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\rho^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{r}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2$$

Énergie totale

$$T = \frac{1}{2} [m_1 d_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 \rho^2] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2$$

2. Énergie potentielle

Cas horizontal

$$V = 0$$

donc :

$$L = T$$

3. Équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

4. Première équation (θ_1)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = [m_1 d_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 \rho^2] \dot{\theta}_1$$

donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = [m_1 d_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 \rho^2] \ddot{\theta}_1 + 2m_2 \rho \dot{r}_2 \dot{\theta}_1$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

alors :

$$\tau_1 = [m_1 d_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 \rho^2] \ddot{\theta}_1 + 2m_2 \rho \dot{r}_2 \dot{\theta}_1$$

5. Deuxième équation (r_2)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = m_2 \dot{r}_2$$

donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} \right) = m_2 \ddot{r}_2$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = m_2 \rho \dot{\theta}_1^2$$

alors :

$$\tau_2 = m_2 \ddot{r}_2 - m_2 \rho \dot{\theta}_1^2$$

6. Modèle dynamique final

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [m_1 d_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 \rho^2] \ddot{\theta}_1 + 2m_2 \rho \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \\ \tau_2 &= m_2 \ddot{r}_2 - m_2 \rho \dot{\theta}_1^2\end{aligned}$$

avec



$$\rho = R_2 + r_2 + d_2$$

Forme matricielle

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$$

avec :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 d_1^2 + I_1 + I_2 + m_2 \rho^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

et

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2m_2 \rho \dot{r}_2 \dot{\theta}_1 \\ -m_2 \rho \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = 0$$

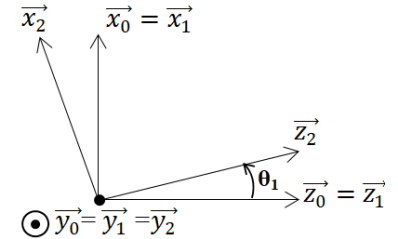
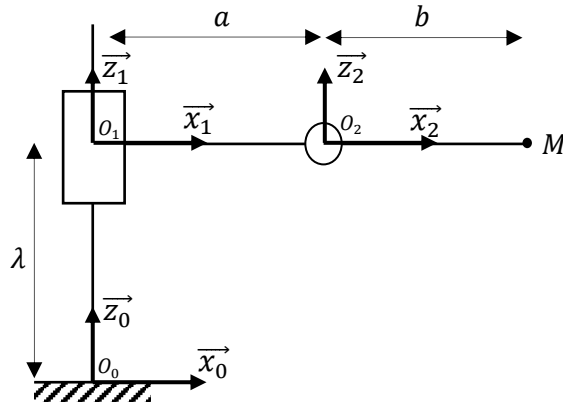
Nom :

Prénom :

ENSETM
Examen Robotique, Mai 2026
FI-GIL2
Durée : 2Heures30

Exercice 1: 4 pts

Considérons le robot PR suivant :



λ : Variable ; $a=1,5m$; $b=1m$

1- Donner la forme d'espace de travail du robot, puis deonner un dessin à main levée .

.....

.....

.....

.....

2- Donner le vecteur position $\overrightarrow{O_0M}$ dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

.....

.....

.....

.....

3- Déduire les coordonnées du point **M** dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

.....

.....

.....

.....

Nom :

Prénom :

- 4- Pour les deux configuration suivantes, donner les valeurs des coordonnées du points **M** dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

Config 1 : $\lambda=1\text{m}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$; **Config 2** : $\lambda=1,5\text{m}$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

.....

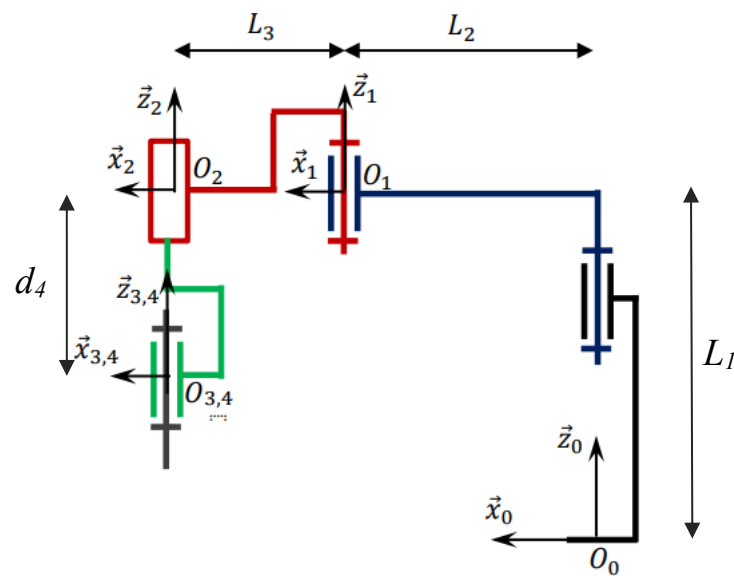
.....

.....

.....

Exercice 2: 6 pts

Considérons le robot SCARA illustré ci-dessous.



- 1- Remplir le tableau des paramètres D-H.

Articulation	θ_i	d_i	a_i	α_i
1				
2				
3				
4				

- 2- Déterminer les matrices de transformation homogène élémentaires T_0^1 , T_1^2 , T_2^3 et T_3^4 .

.....

.....

.....

.....

.....

Nom :

Prénom :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3- Donner l'expression de la matrice de transformation homogène T_0^4 .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4- Ecrire le modèle géométrique direct (MGD) définissant la position du point P (le centre de l'outil) par rapport au repère de la base fixe du robot.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$P_x =$

$P_y =$

$P_z =$

Nom :

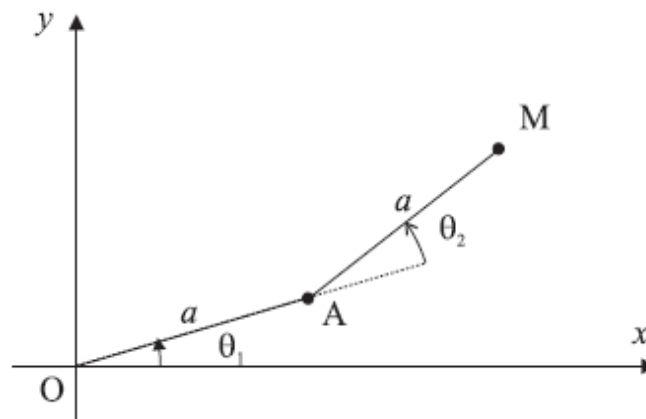
Prénom :

Rappel : La matrice DH :

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 : 10 pts

Le schéma ci-dessous représente un robot **RR** composé de deux bras articulés respectivement en **O** et en **A**, de longueur **a** et de masse négligeable. Le robot manipule un objet de masse **m** et de dimensions négligeable, la masse est concentrée au point **M**.



1- Donner le modèle géométrique direct :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2- Donner la matrice jacobienne :

.....

.....

.....

.....

.....

Nom :

Prénom :

3- Si la masse manipulée est de **2kg**, la longueur **a** est de **0.50m**, donner la valeur du couple appliquer par les moteurs pour soulever cette masse :

4- Donner les équations du mouvement de la structure en utilisant le formalisme Lagrange.

ENSETM
Examen Robotique, Mai 2026
FI-GIL2
Durée : 2Heures30
Corrigé

Correction exercice 1 :

Q1-

L'espace de travail est plan (x,z)

Q2-

$$O_0M = O_0O_1 + O_1O_2 + O_2M$$

D'après le schéma :

1- $O_0O_1 = \lambda \cdot z_0$

2- $O_1O_2 = a \cdot x_1$

3- $O_2M = b \cdot x_2$

Ce qui donne :

$$O_0M = \lambda \cdot z_0 + a \cdot x_1 + b \cdot x_2$$

rojection de la base 2 (Rotation d'un angle θ_1 autour de y_0) :

En observant la figure de changement de base:

$$x_2 = \cos(\theta_1)x_1 - \sin(\theta_1)z_1$$

Comme $x_1 = x_0$ et $z_1 = z_0$, on obtient :

$$x_2 = \cos(\theta_1)x_0 - \sin(\theta_1)z_0$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation de O_0M :

$$O_0M = \lambda \cdot z_0 + a \cdot x_0 + b \cdot (\cos(\theta_1)x_0 - \sin(\theta_1)z_0)$$

En regroupant selon les axes de la base 0 :

$$O_0M = (a + b\cos\theta_1)x_0 + 0y_0 + (\lambda - b\sin\theta_1)z_0$$

Q3-

Les coordonnées (X_M, Y_M, Z_M) correspondent directement aux composantes du vecteur position calculé ci-dessus :

$$\begin{cases} X_M = a + b\cos(\theta_1) \\ Y_M = 0 \\ Z_M = \lambda - b\sin(\theta_1) \end{cases}$$

Avec les valeurs numériques ($a = 1,5$ m et $b = 1$ m) :

$$\begin{cases} X_M = 1,5 + 1 \cos(\theta_1) \\ Y_M = 0 \\ Z_M = 1 - \sin(\theta_1) \end{cases}$$

Q4-

Configuration 1: $\lambda = 1$ m et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

- $X_M = 1,5 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,5 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,5 + 0,707 = 2,207$ m
- $Y_M = 0$ m
- $Z_M = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1 - 0,707 = 0,293$ m

Coordonnées Config1: $M = \begin{pmatrix} 2,21 \\ 0 \\ 0,29 \end{pmatrix}$

Configuration 2: $\lambda = 1,5$ m et $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

- $X_M = 1,5 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,5 + 0 = 1,5$ m
- $Y_M = 0$ m
- $Z_M = 1,5 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,5 - 1 = 0,5$ m

Coordonnées Config2: $M = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

Correction exercice 2 :

Q1-

Articulation	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	L1	L2	0
2	θ_2	0	L3	0
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	0	0	0

Q2-

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & L_2 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & L_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_3 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & L_3 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q3-

$$T_0^4 =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & L_2 \cos \theta_1 + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4) & 0 & L_2 \sin \theta_1 + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q4-

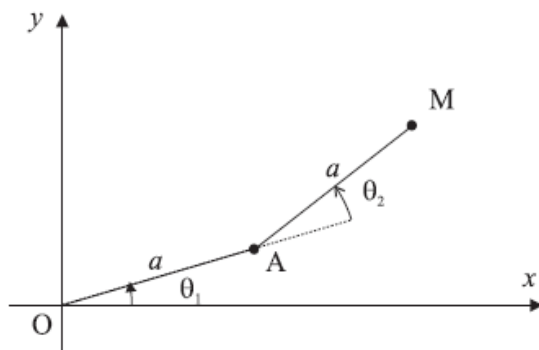
$$P_x = L_2 \cos(\theta_1) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$P_y = L_2 \sin(\theta_1) + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$P_z = L_1 + d_4$$

Correction exercice 3 :

Le schéma ci-dessous représente un robot RR composé de deux bras articulés respectivement en **O** et en **A**, de longueur **a** et de masse négligeable. Le robot manipule un objet de masse **m** et de dimensions négligeable, la masse est concentrée au point **M**.



Description du robot

Robot plan RR à deux articulations rotatives :

- Coordonnées articulaires :

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

- Masse des barres négligeable,
- Masse totale m concentrée à l'extrémité M .

1. Modèle géométrique direct (MGD)

La position du point terminal $M(x, y)$:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta_1 + a \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = a \sin \theta_1 + a \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

2. Matrice Jacobienne :

Vitesse

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = J(q) \dot{q}$$

Avec :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Et :

$$J(q) = \begin{bmatrix} -a\sin\theta_1 - a\sin(\theta_1 + \theta_2) & -a\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a\cos\theta_1 + a\cos(\theta_1 + \theta_2) & a\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

3. Si la masse manipulée est de 2kg, la longueur a est de 0.50m, donner la valeur du couple appliquer par les moteurs pour soulever cette masse :

a) Force appliquée par la masse

La masse portée en M vaut :

$$m = 2 \text{ kg}$$

Le poids est :

$$P = mg$$

Avec :

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Donc :

$$P = 2 \times 9.81 = 19.62 \text{ N}$$

La force appliquée à l'effecteur est verticale vers le bas :

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -19.62 \end{bmatrix}$$

b) Couples moteurs par le Jacobien

La relation est :

$$\tau = J^T F$$

Donne :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -19.62 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -19.62[a\cos\theta_1 + a\cos(\theta_1 + \theta_2)] \\ \tau_2 &= -19.62[a\cos(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Comme $a = 0.50 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -9.81[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)] \\ \tau_2 &= -9.81\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

c) Résultat final

Les couples aux moteurs sont :

$$\tau_1 = -9.81(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2))$$

Et

$$\tau_2 = -9.81\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Les couples sont en mN.

4. Modèle dynamique par Euler-Lagrange

a. Énergie cinétique

Les vitesses :

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= -a\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - a(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{y}_M &= a\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + a(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Après simplification :

$$v_M^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2$$

On obtient :

$$v_M^2 = a^2 [2\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2]$$

Donc :

$$T = \frac{1}{2}mv_M^2$$
$$T = \frac{1}{2}ma^2 [2\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2]$$

b. Énergie potentielle

$$V = mg y_M$$
$$V = mga[\sin\theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

c. Lagrangien

$$L = T - V$$

d. Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 (i = 1, 2)$$

Équation pour θ_1

Après calcul :

$$ma^2 [(3 + 2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + (1 + \cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \sin\theta_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)] + mga[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)] = 0$$

Équation pour θ_2

$$ma^2 [(1 + \cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \sin\theta_2 \dot{\theta}_1^2] + mg a \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

Les équations du mouvement peuvent donc s'écrire sous forme matricielle :

$$M(\theta) \ddot{q} + C(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = 0$$

Avec

$$q = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

et la matrice d'inertie :

$$M(\theta) = ma^2 \begin{bmatrix} 3 + 2\cos\theta_2 & 1 + \cos\theta_2 \\ 1 + \cos\theta_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Les termes centrifuges/coriolis :

$$C = ma^2 \begin{bmatrix} -\sin\theta_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ \sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

et la gravité :

$$G = mga \begin{bmatrix} \cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$