

Support de cours

Cours robotique industrielle

2^{ème} année Master GIL

2^{ème} année FI-GIL

3^{ème} année FI-GMSI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

Modélisation des Robots

Manipulateurs

Un robot manipulateur est considéré comme étant un système mécanique articulé, actionné et commandé. La modélisation des robots, consiste à établir un modèle mathématique. Outre une fonction générale d'aide à la conception, la modélisation a de multiples utilisations pour, la prédiction des mouvements, l'adaptation des actionneurs, la planification des tâches, l'établissement des lois de commande, l'incorporation du robot dans des simulations informatiques...etc. Dans le langage courant, la modélisation précède la simulation sans que l'on distingue une séparation nette entre ces deux activités. Il est souvent acceptable de se contenter d'une modélisation simplifiée dans laquelle on ne tient pas compte des aspects qui sont, ou paraissent, secondaires tels que : les vibrations, les déformations élastiques, les jeux mécaniques, les tolérances de fabrication...etc. La modélisation des robots manipulateurs nécessite le calcul de certains modèles mathématiques, tels que : Le modèle géométrique, le modèle cinématique et le modèle dynamique.

1.1 Généralités sur la robotique

Si les manipulations et les automates existant depuis nombreuse décennies, c'est seulement vers les années 1970 que sont véritablement apparues en exploitation industrielle les premières machines que l'on puisse qualifier comme robots. En effet, le robot est avant tout une machine industrielle poly articulée, dotée de possibilité d'auto-adaptabilité et qui peut de ce fait agir d'une manière plus ou moins autonome dans et sur son environnement [Eti01].

1.1.1 Définition

Le robot est une machine physique a les caractéristiques suivantes :

- Modifier physiquement son environnement pour atteindre le but qui lui est fixé (la tâche désiré).
- Elle peut exécuter une tâche donnée de plusieurs manières *et/ou* des tâches variées (flexibilité).

-
- Elle peut s'adapter seule aux variations de son environnement, de telle sorte que la tâche soit correctement exécutée en dépit de ces variations[Eti01].

1.1.2 Catégories des robots

La classification des robots est délicate selon leurs fonctionnalités et leurs potentialités . Les robots peuvent être classés en trois grandes catégories :

1.1.2.1 Les manipulateurs

Les manipulateurs sont des systèmes mécaniques destinés à exécuter de manière autonome des tâches répétitives dans un environnement fixe et ordonné et dont les mouvements enregistrés dans une mémoire se répètent de manière cyclique, aucune fonction de décision ne lui permet de réagir dans le cas d'un événement inattendu, c'est pour ça ils sont appelés (automate). Les domaines d'application des manipulateurs sont : la peinture, le soudage par position, la manipulation des objets... etc [Pru88].

1.1.2.2 Les télémanipulateurs

Le télémanipulateur ou robot de téléopération est un système mécanique polyarticulé et multifonctionnel capable d'assister l'homme dans les opérations effectuées en milieu hostile ou suppléer un handicapé. Il est constitué par deux entités : Un bras maître et un bras esclave. Le bras esclave reproduit instantanément le mouvement imposé par un opérateur à un bras maître. Ce dernier est constitué d'une boîte à boutons, d'une poignée de commande ou d'une structure articulée identique à celle du bras esclave. Malgré la présence indispensable d'un opérateur, ce système est doté de potentialité comparable aux robots évolués [Pru88] :

- Prise de décision lors de vision réduite.
- Retour d'effort vers le bras maître.
- Amplification ou atténuation des mouvements.
- Autonomie de l'esclave pour alléger la charge de travail à l'homme.
- Création de mouvements élémentaires autonomes.

L'application des télémanipulateurs est répandue dans les domaines nucléaires (manipulation des produits radioactifs), spatial (exploration des planètes), sous-marin (forage), militaire (déminage) et médical (prothèse).

1.1.2.3 Les robots

Pour cette classe on peut distinguer :

- **Les robots manipulateurs industriels** : Un robot manipulateur industriel constitue l'association d'un manipulateur et d'organes aptes à acquérir, traiter et gérer des informations issues de l'environnement. Ils sont dotés de sens artificiels (vision, tactile...) et de ressources méthodologiques leur permettant de résoudre des problèmes de difficultés toutefois limitées[Coi93].

Ces robots sont essentiellement orientés vers les applications nécessitent une adaptabilité à la tâche : assemblage, soudage à l'arc, vérification, test... etc.

- **Les robots didactiques** : Sont de version ou format réduite des robots. Ils ont un rôle de formation et d'enseignement, ils peuvent aussi être utilisés pour effectuer des tests de faisabilités d'un poste robotisé.
- **Les robots mobiles autonomes** : Les possibilités sont plus vastes, du fait de leur mobilité. Notamment, ils peuvent être utilisés en zone dangereuse (nucléaire, incendie, sécurité civil, déminage... etc.), inaccessible (océanographie, spatial), de tels robots font appel à des capteurs et à des logiciels sophistiqués. On peut distinguer deux types de locomotion : les robots marcheurs qui imitent la démarche humaine, et les robots mobiles qui ressemblent plus à des véhicules.

1.2 Structure générale du robot manipulateur

1.2.1 Morphologie générale

Un robot manipulateur est l'ensemble formé par [Li0] :

- Une structure mécanique qui supporte l'organe terminale à situer.
- Des actionneurs qui servent à agir sur la structure mécanique pour changer la situation de l'organe terminal.
- Des capteurs divers nécessaires à la commande.
- Un système de commande qui pilote les actionneurs du robot manipulateur.
- Un système décisionnel qui assure la fonction de raisonnement et élabore le mouvement du robot manipulateur.
- Un système de communication qui gère le message transmis entre le système décisionnel et l'opérateur via une console de visualisation.

Pour décrire la topologie du mécanisme constituant le robot manipulateur, on lui associe un graphe dont les sommets sont les corps constitutifs et les arcs représentent les assemblages entre ces corps. Deux corps extrêmes ont des rôles particuliers [Li0] :

- La *base*, qui est fixée au sol ou sur un véhicule.
- L'*organe terminal* qui porte l'outil (ou effecteur).

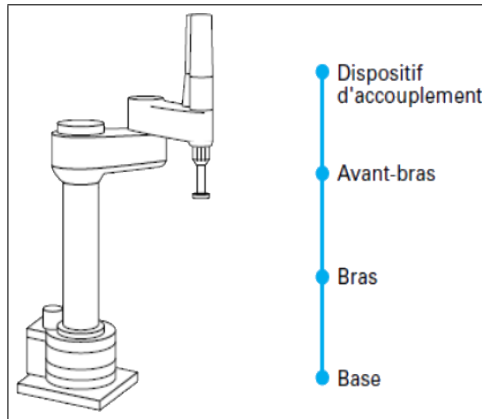


Fig 1.1: Structure série

En partant de la base pour aller vers l'effecteur, on pourra distinguer :

- Les structures série (Fig 1.1), ou sérielles, pour lesquelles le graphe est arborescent, la base étant la racine et les feuilles étant les organes terminaux.
- Les structures parallèles (Fig 1.2) pour lesquelles toutes les chaînes partent de la base pour aller vers l'organe terminal.
- Les structures mixtes (Fig 1.3.), présentant des boucles cinématiques, par exemple des parallélogrammes ou des motorisations par vérins linéaires[Li0].

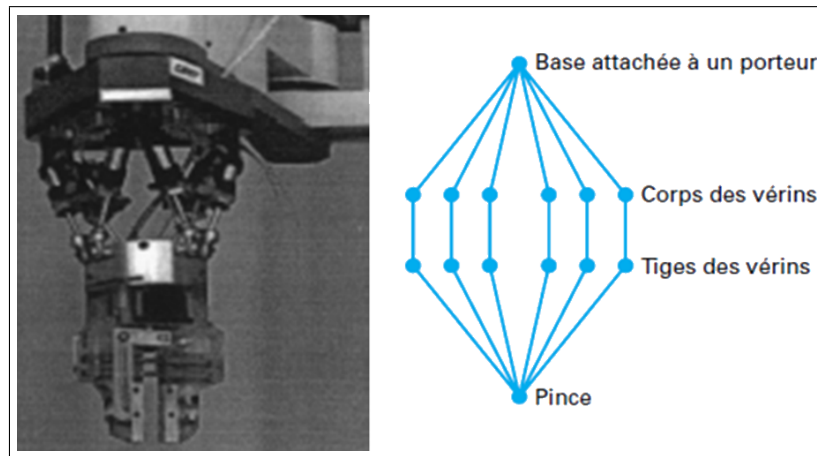


Fig 1.2: Structure parallèle

1.2.2 Les liaisons mécaniques

Dans l'assemblage de robots manipulateurs, les liaisons les plus courantes sont :

- La liaison rotoïde (ou pivot).
- La liaison prismatique (ou glissière).
- La liaison rotule S (sphérique).
- La liaison cardan U (joint universel).

Certaines liaisons sont motorisées, on parlera de liaisons actives. Ce sera généralement le cas des liaisons rotoïde ou prismatique. Les liaisons non motorisées seront appelées liaisons passives.

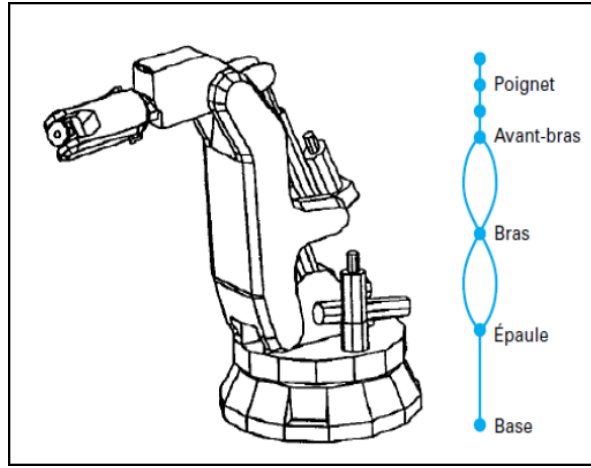


Fig 1.3: Structure mixte

Ce sera généralement le cas des liaisons rotule, cardan et bien sur appui sur plan.

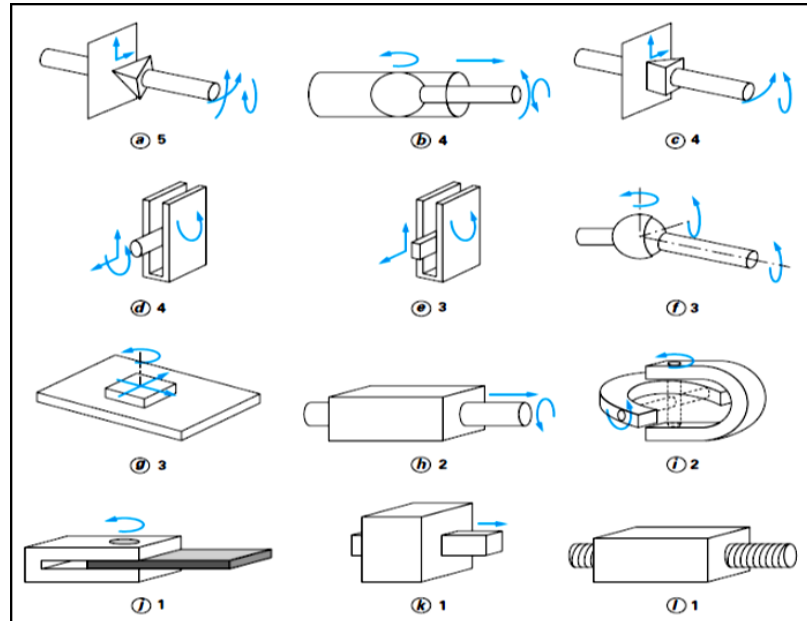


Fig 1.4: Type des liaisons

1.2.3 Constitution géométrique des robots manipulateurs

Un robot manipulateur est une cinématique constituée de $n+1$ corps, possédant deux corps particuliers et des actionneurs. Le premier corps particulier (C_0), appelé *base*, est le socle du robot, le seconde corps particulier (C_n), appelé *terminal*, est le support d'un préhenseur ou d'outil. Les n corps sont liés entre eux par des liaisons (*articulations*), suivant une structure de chaîne. Ces liaisons sont de nature prismatique P ou rotoïde R . Les corps et les liaisons du robot manipulateur sont numérotés de 0 à n dans un ordre croissant en partant du socle (Fig 1.5).

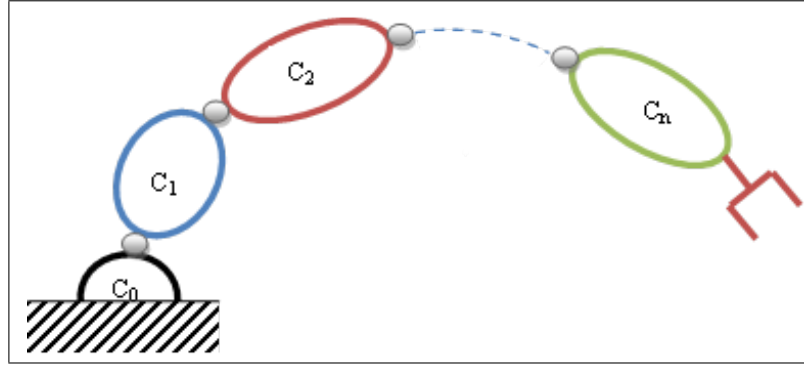


Fig 1.5: Robot à structure ouverte simple

1.2.4 Degré de liberté et redondance

Le positionnement complet d'une pièce dans l'espace nécessite six paramètres indépendants, appelés *degré de liberté*. Parmi les différents choix possibles de ces paramètres, les trois coordonnées cartésiennes pour positionner un point de la pièce et les trois angles pour orienter cette pièce [Abd04].

Lorsque le nombre de degré de liberté de l'organe terminal est inférieur au nombre de degrés de liberté de l'espace articulaire, on dit qu'il y a une *redondance* [Eti01].

1.2.5 Configuration singulière

Pour tous les robots, qu'ils soient redondants ou non, il se peut que dans certaines configurations dites *singulières*, le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal soit inférieur à la dimension de l'espace opérationnel [KE99]. La *configuration singulière* ou *singularités* se traduisent, physiquement, par la nullité du déterminant de la matrice Jacobienne. Par exemple, ceci peut se produire lorsque :

- Les axes de deux articulations prismatiques deviennent parallèles.
- Les axes de deux articulations rotoïde se trouvent sur la même droite.
- L'origine de l'organe terminal se trouve sur une ligne qui intersecté tous les axes des articulations.

1.2.6 Espace opérationnel

L'*espace opérationnel* est celui dans lequel la situation de l'organe terminal est représentée. La solution la plus simple consiste à utiliser les coordonnées cartésiennes. Soit R_m cet espace. La valeur m constitue donc le nombre de degré de liberté maximum que peut avoir l'organe terminal, égale au nombre de paramètres indépendants nécessaire pour décrire la situation de l'organe terminal dans l'espace cartésien [Abd04].

1.3 Modélisation des robots manipulateurs

1.3.1 Modélisation géométrique

La conception et la commande d'un robot exige le calcul de certains modèles mathématiques comme[Kha04] :

1. Les modèles de transformation entre l'espace articulaire et l'espace opérationnel. Ces modèles de transformation sont très importants puisque les robots sont commandés dans l'espace articulaire, tandis que les tâches sont définies dans l'espace opérationnel.

Deux classes des modèles sont considérées :

- Les modèles géométriques directs et inverses, qui donnent l'endroit de l'effecteur en fonction des variables articulaires du mécanisme et vice versa.
 - Les modèles cinématiques directs et inverses, qui donnent la vitesse de l'effecteur en fonction des vitesses d'articulation et vice versa.
2. Les modèles dynamiques donnant les relations entre les couples d'entrée ou les forces des actionneurs et les positions, les vitesses et les accélérations des articulations.

1.3.1.1 Transformations homogènes

Soit $({}^iP_x, {}^iP_y, {}^iP_z)$ les coordonnées cartésiennes d'un point P arbitraire, mesuré dans le repère $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$, Les *coordonnées homogène* du point P sont $(w \cdot {}^iP_x, w \cdot {}^iP_y, w \cdot {}^iP_z, w)$ ou w est le facteur d'échelle, dans la robotique $w = 1$. Les coordonnées homogènes du point P sont représentées par le vecteur colonne :

$${}^iP = \begin{bmatrix} {}^iP_x \\ {}^iP_y \\ {}^iP_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Les coordonnées homogènes d'un *plan* Q de l'équation :

$${}^i\alpha x + {}^i\beta y + {}^i\gamma z + {}^i\delta = 0 \quad (1.2)$$

exprimé selon le repère R_i , sont données par le vecteur ligne :

$${}^iQ = [{}^i\alpha \ {}^i\beta \ {}^i\gamma \ {}^i\delta] \quad (1.3)$$

Si un point P appartient à un plan Q , le produit matriciel ${}^iQ \cdot {}^iP$ est nul :

$${}^iQ.{}^iP = [{}^i\alpha {}^i\beta {}^i\gamma {}^i\delta].{}^iP = \begin{bmatrix} {}^iP_x \\ {}^iP_y \\ {}^iP_z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

La transformation (translation *et/ou* rotation) d'un repère R_i au repère R_j est représentée par la *matrice de transformation homogène* iT_j de dimension (4×4) où :

$${}^iT_j = [{}^is_j {}^in_j {}^ia_j {}^iP_j] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

où, ${}^is_j, {}^in_j, {}^ia_j$ contiennent les composantes des vecteurs unitaires suivant x_j, y_j , et z_j respectivement du repère R_j exprimées dans le repère R_i et iP_j représente les coordonnées de l'origine O_j de repère R_j exprimées dans R_i .

On peut dire également que la matrice iT_j définit le repère R_j dans le repère R_i .

La matrice de transformation s'écrit aussi sous la forme :

$${}^iT_j = \begin{bmatrix} {}^iA_j & {}^iP_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^is_j & {}^in_j & {}^ia_j & {}^iP_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Finalement, la matrice de transformation iT_j :

- *Est considéré comme la représentation du repère R_j dans le repère R_i .*
- *Permet le passage du repère R_i au repère R_j .*

Soit **Trans**(a, b, c) la transformation d'une *translation pure* où a, b , et c sont les translations le long des axes **x,y** et **z** respectivement. Quand l'orientation est conservée, la matrice de transformation de cette translation a la forme suivante :

$${}^iT_j = \mathbf{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

La notation **Trans**(**u**, d) indique la translation d'une valeur d le long de l'axe **u**. Ainsi la matrice **Trans**(a, b, c) peut être décomposée en produit de trois matrice : $Trans(x, a)Trans(y, b)Trans(z, c)$,

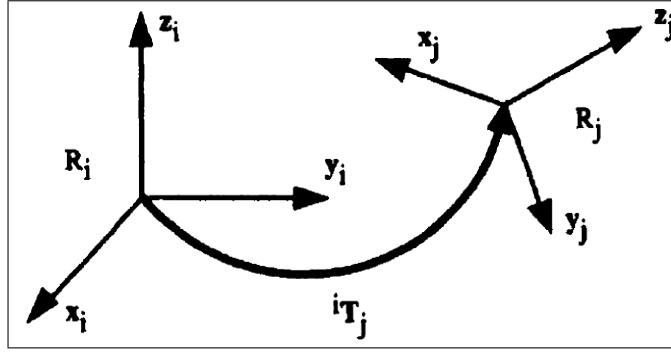


Fig 1.6: Transformation de repère

par n'importe quel ordre de multiplication.

Soit $\mathbf{Rot}(x, \theta)$ la transformation correspondante à une *rotation pure* d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{x}$, la matrice de transformation de cette rotation s'écrit :

$${}^i T_j = \mathbf{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{rot}(\mathbf{x}, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

où, $\mathbf{rot}(\mathbf{x}, \theta)$ désignant la matrice d'orientation de dimension (3×3) .

De la même façon on définit les matrice de transformation des rotations autour des axes $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$.

$${}^i T_j = \mathbf{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{rot}(\mathbf{y}, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$${}^i T_j = \mathbf{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{rot}(\mathbf{z}, \theta) & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

1.3.1.2 Modèle géométrique direct

Afin de calculer l'équation géométrique directe d'un bras manipulateur à chaîne ouverte simple, une méthode systématique et générale doit être appliquée pour définir la position et l'orientation relative de deux corps consécutifs, Les méthodes de *Denavit-Hartenberg* et de *Khalil et Kleinfinger* sont les plus répandus.

Le problème est comment déterminer deux repères attachés aux deux corps?, et comment calculer les transformations entre eux? Cependant, il est commode de placer quelques hypothèses pour la définition des repères du corps.

Se reportant à la figure (Fig 1.5), la structure est composée de n corps $C_i, i = 1$ à n , plus la base (C_0), reliés entre eux par des liaisons rotoïde ou prismatique, l'articulation i relie le corps C_i au corps C_{i-1} . Afin de définir la relation entre les positions des corps on associe à chaque corps C_i le repère $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$ tels que :

- L'axe z_i est porté par l'axe de l'articulation i .
- L'axe x_i est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_i et z_{i+1} .
- L'axe y_i est formé par la règle droite pour compléter les coordonnées du système (x_i, y_i, z_i) .

La matrice de transformation du repère R_{i-1} au repère R_i s'exprime en fonction des paramètres (de Denavit-Hartenberg) suivants (Fig 1.7) :

α_i : L'angle de rotation entre l'axe z_{i-1} et l'axe z_i autour de x_{i-1} .

d_i : La distance entre l'axe z_{i-1} et l'axe z_i le long de l'axe x_{i-1} .

θ_i : L'angle de rotation entre les axes x_{i-1} et x_i autour de z_i .

r_i : la distance entre les axes x_{i-1} et x_i le long de l'axe z_i .

La variable q_i de l'articulation i , définissant l'orientation ou la position relative entre les articulations $i-1$ et i , est soit θ_i , soit r_i , selon le type d'articulation est rotoïde ou prismatique respectivement. Ceci est défini par la relation :

$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i \quad (1.11)$$

avec :

- $\sigma_i = 0$ si l'articulation i est rotoïde.
- $\sigma_i = 1$ si l'articulation i est prismatique.
- $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$.

De la même façon on définit la variable $\bar{q}_i$:

$$\bar{q}_i = \sigma_i \theta_i + \bar{\sigma}_i r_i \quad (1.12)$$

La matrice de transformation définissant R_i dans R_{i-1} est donnée par :

$${}^{i-1}T_i = \mathbf{Rot}(x, \alpha_i) \mathbf{Trans}(x, d_i) \mathbf{Rot}(z, \theta_i) \mathbf{Trans}(z, r_i) \quad (1.13)$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & d_i \\ \cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i & -r_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & r_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

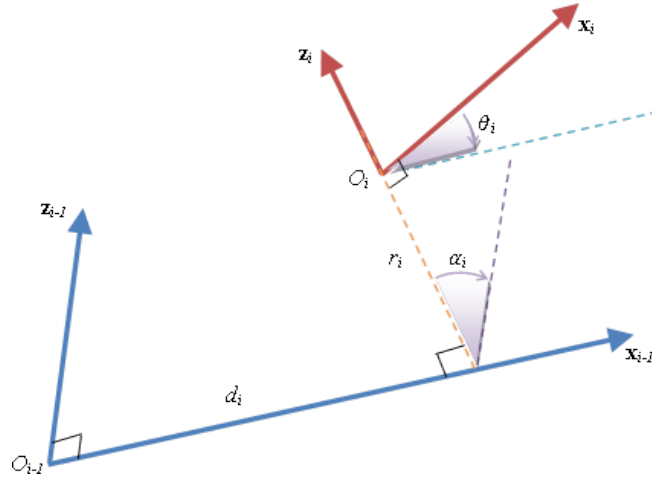


Fig 1.7: Paramètres de Denavit-Hartenberg

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} & & d_i \\ {}^{i-1}A_i & -r_i \sin \alpha_i \\ & r_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

où la matrice de rotation ${}^{i-1}A_i = \mathbf{Rot}(x, \alpha_i) \mathbf{Rot}(z, \theta_i)$.

La matrice de transformation définissant R_{i-1} dans R_i est donnée par :

$${}^iT_{i-1} = \begin{bmatrix} & -d_i \cos \theta_i \\ {}^{i-1}A_i^T & d_i \sin \theta_i \\ & -r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Le *modèle géométrique direct* (MGD) est l'ensemble des relations permettant de définir la position de l'organe terminal du robot en fonction de ses coordonnées articulaires. Pour un robot à chaîne ouverte simple le MGD est défini par la matrice de transformation 0T_n :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) {}^2T_3(q_3) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (1.17)$$

Le MGD peut aussi être représenté par la relation :

$$X = f(q) \quad (1.18)$$

où q est le vecteur des variables articulaires tels que :

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n]^T \quad (1.19)$$

1.3.1.3 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique direct fournit l'emplacement de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Le *modèle géométrique inverse* (MGI) consiste à déterminer les variables articulaires correspondant à une situation spécifique de l'organe terminal. Lorsqu'elles existent. Trois méthodes de calcul de MGI sont répandues[Kha04] :

- La méthode de *Paul*, qui convient pour la plupart des robots industriels.
- La méthode de *Pieper*, qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté avec trois articulations rotoïde ou trois articulation prismatiques.
- La méthode de *raghavan et Roth*, donnant la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égale 16.

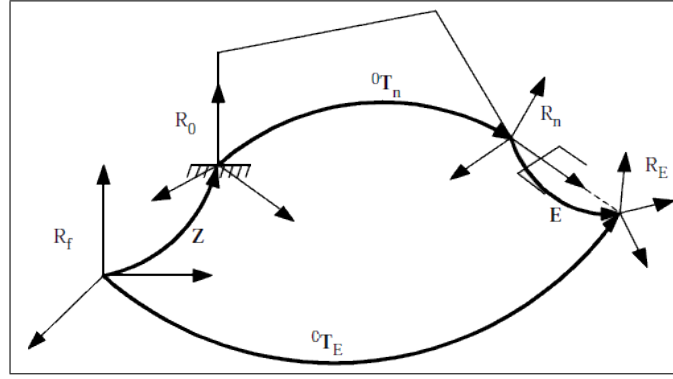


Fig 1.8: Transformations entre l'organe terminal et le repère atelier

Quand le modèle géométrique inverse ne peut pas être obtenu, des techniques numériques peuvent être employées. Ces techniques emploient la méthode de *Newton-Raphson* ou des méthodes fondées sur la transposé de la *matrice Jacobienne*.

Soit ${}^{i-1}T_E^d$ la matrice de transformation homogène représenté la position désiré du repère *outil* R_E par rapport au repère *atelier* R_f . En général on peut exprimer ${}^{i-1}T_E^d$ sous la forme :

$${}^fT_E^d = Z {}^0T_n(q) E \quad (1.20)$$

tels que :

- Z est la matrice de transformation définissant le repère de base du robot dans le repère atelier R_f .
- 0T_n est la matrice de transformation du repère terminal dans le repère R_0 .
- E est la matrice de transformation du repère outil R_E dans le repère terminal R_n .

Mettant tous les termes connus dans le membre gauche, on obtient :

$$U_0 = {}^0T_n(q) \quad (1.21)$$

avec, $U_0 = Z^{-1} {}^fT_E^d E^{-1}$

Le MGD donnant $X = f(q)$, $q = [q_1 q_2 \dots q_n]^T$, $X = [x_1 x_2 \dots x_m]^T$, ou n est le nombre de coordonnées opérationnelles et m le nombre de coordonnées articulaires, le problème au-dessus (1.20) s'agit de résoudre un système de m équations à n inconnues, ce système étant non linéaire. Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot manipulateur et de l'amplitude des articulations.

Trois cas se présentent pour calculer le MGI :

1. Solutions en nombre fini.
2. Absence de solution, lorsque la position de l'organe terminal désirée est en dehors de la zone accessible du robot.
3. Infinité de solutions lorsque :
 - le robot est redondant vis-à-vis la tâche.
 - le robot se trouve dans certaines configurations singulières.

Lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée d'un robot manipulateur ce dernier est dit *résoluble*.

La méthode de Paul

Soit la matrice de transformation homogène d'un robot manipulateur (1.17) :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) {}^2T_3(q_3) \dots {}^{n-1}T_n(q_n)$$

Soit U_0 la situation désirée telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) {}^2T_3(q_3) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (1.23)$$

Pour résoudre le système (1.23), Paul a proposé une méthode (*Méthode de Paul*) qui consiste à pré-multiplier successivement les deux membres de l'équation par les matrices ${}^iT_{i-1}$ pour i de 1

à $n - 1$. Ces opérations permettent d'isoler les variables d'articulations l'une après l'autres.

$$\begin{aligned}
U_0 &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{n-1}T_n \\
{}^1T_0 U_0 &= {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 \dots {}^{n-1}T_n \\
{}^2T_1 U_1 &= {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 \dots {}^{n-1}T_n \\
{}^3T_2 U_2 &= {}^3T_4 {}^4T_5 \dots {}^{n-1}T_n \\
&\vdots \\
{}^{n-1}T_{n-2} U_{n-2} &= {}^{n-1}T_n
\end{aligned}$$

avec, $U_{j+1} = {}^{j+1}T_n = {}^{j+1}T_j U_j$, pour $j = 0, \dots, n$.

Pour un robot à six degrés de liberté on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
U_0 &= {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\
{}^1T_0 U_0 &= {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\
{}^2T_1 U_1 &= {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\
{}^3T_2 U_2 &= {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 \\
{}^4T_3 U_3 &= {}^4T_5 {}^5T_6 \\
{}^5T_4 U_4 &= {}^5T_6
\end{aligned}$$

1.3.2 Modélisation cinématique

1.3.2.1 Modèle cinématique direct

Le *modèle cinématique direct* (MCD) d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires [Eti01]. Il s'écrit :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (1.24)$$

où, $J(q)$ désigne la matrice *Jacobienne* de dimension $(m \times n)$ du mécanisme, égale à $\frac{\partial X}{\partial q}$.

le calcul de la matrice Jacobienne peut se faire en dérivant le MGD, $X = f(q)$, à partir de la relation suivante :

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(q)}{\partial q_j} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (1.25)$$

où, J_{ij} est l'élément (i, j) de la matrice Jacobienne J .

Cette méthode est pratique pour des robots simples avec un nombre réduit de degrés de liberté. Le calcul de la *matrice Jacobienne de base*, connu sous le nom de *matrice Jacobienne cinématique*, est plus pratique pour un robot général de degré de liberté égale n . La matrice Ja-

cobienne obtenue (*sans calcul de la dérivée du MGD*) relie les vecteurs des vitesses de translation et de rotation V_n et ω_n et les vitesses articulaires [Kha04] :

$$\begin{bmatrix} V_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J_n \dot{q} \quad (1.26)$$

où, V_n et ω_n sont les vitesses linéaire et angulaire du repère R_n respectivement.

La vitesse $\dot{q}_k$ de l'articulation k produit une vitesse linéaire ($V_{k,n}$) et une vitesse angulaire ($\omega_{k,n}$) sur le repère terminal R_n . Deux cas se présentent :

1. Si l'articulation k est prismatique ($\sigma_k = 1$, Fig 1.9) :

$$\begin{cases} V_{k,n} = a_k \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

où, a_k est le vecteur unitaire porté par l'axe z_k de l'articulation k .

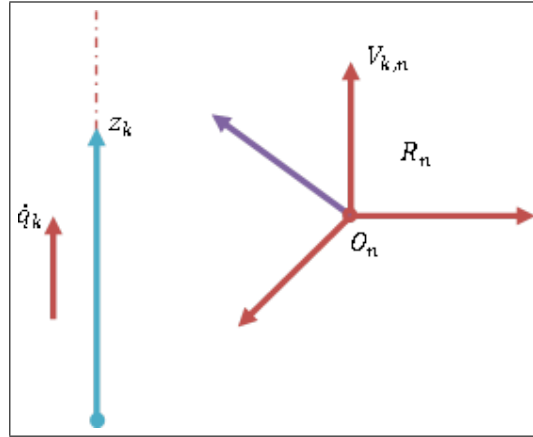


Fig 1.9: Cas d'articulation prismatique

2. Si l'articulation k est rotoïde ($\sigma_k = 0$, Fig 1.10) :

$$\begin{cases} V_{k,n} = a_k \dot{q}_k \times L_{k,n} = (a_k \times L_{k,n}) \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = a_k \dot{q}_k \end{cases} \quad (1.28)$$

le terme $L_{k,n}$ désigne le vecteur $\overrightarrow{O_k O_n}$.

De façon générale, les vecteurs $V_{k,n}$ et $\omega_{k,n}$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} V_{k,n} = [\sigma_k a_k + \bar{\sigma}_k (a_k \times L_{k,n})] \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = \bar{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases} \quad (1.29)$$

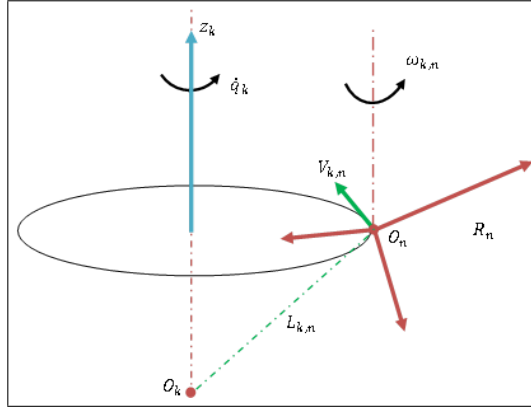


Fig 1.10: Cas d'articulation rotoïde

Les vitesses linéaires et angulaires de l'organe terminal peuvent être écrites comme :

$$\begin{cases} V_n = \sum_{k=1}^n V_{k,n} = \sum_{k=1}^n [\sigma_k a_k + \bar{\sigma}_k (a_k \times L_{k,n})] \dot{q}_k \\ \omega_n = \sum_{k=1}^n \omega_{k,n} = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases} \quad (1.30)$$

L'écriture de l'équation (1.32) sous forme d'une matrice en utilisant l'équation (1.28), donne :

$$J_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 a_1 + \bar{\sigma}_1 (a_1 \times L_{1,n}) & \cdots & \sigma_n a_n + \bar{\sigma}_n (a_n \times L_{n,n}) \\ \bar{\sigma}_1 a_1 & \cdots & \bar{\sigma}_n a_n \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Se référant les vecteurs de J_n par rapport au repère R_i , on obtient la matrice jacobienne ${}^i J_n$, telle que :

$${}^i \begin{bmatrix} V_n \\ \omega_n \end{bmatrix}_n = {}^i J_n \dot{q} \quad (1.32)$$

En général, on calcul V_n et ω_n dans R_n et R_0 , la matrice jacobienne correspondante est ${}^n J_n$ ou ${}^0 J_n$ respectivement. ces matrices peuvent être aussi calculées en utilisant une matrice ${}^i J_n$, $j=0, \dots, n$, grâce à l'expression suivante :

$${}^s J_n = \begin{bmatrix} {}^s A_i & 0_3 \\ 0_3 & {}^s A_i \end{bmatrix} {}^i J_n \quad (1.33)$$

où ${}^s A_i$ est la matrice d'orientation du repère R_i dans R_s . En général on obtient la matrice simple ${}^i J_n$ lorsqu'on prend $i = \text{entier}(n/2)$ ¹. On note que les matrices ${}^i J_n$ ayant les mêmes positions singulières.

1. entier(x) : partie entière de x.

Calcul de la matrice ${}^i J_n$

Le produit $a_k \times K_{k,n}$ peut être calculé par $\hat{a}_k L_{k,n}^2$, la k^{ime} colonne de la matrice ${}^i J_n$ notée par ${}^i J_{n:k}$ devienne :

$${}^i J_{n:k} = \begin{bmatrix} \sigma_k {}^i a_k + \bar{\sigma}_k {}^i A_k {}^k \hat{a}_k {}^k L_{k,n} \\ \bar{\sigma}_k {}^i a_k \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

on pose ${}^k a_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ et ${}^k L_{k,n} = {}^k P_n$, donc on obtient :

$${}^i J_{n:k} = \begin{bmatrix} \sigma_k {}^i a_k + \bar{\sigma}_k ({}^k P_{n_y} {}^i s_k + {}^k P_{n_x} {}^i n_k) \\ \bar{\sigma}_k {}^i a_k \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

où ${}^k P_{n_y}$ et ${}^k P_{n_x}$ sont les composants du vecteur ${}^k P_n$. a partir de cette expression, la k^{ime} colonne de la matrice ${}^i J_n$ est :

$${}^i J_{n:k} = \begin{bmatrix} \sigma_k {}^i a_k + \bar{\sigma}_k {}^i \hat{a}_k ({}^i P_n - {}^i P_k) \\ \bar{\sigma}_k {}^i a_k \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

qui donne pour $i = 0$:

$${}^0 J_{n:k} = \begin{bmatrix} \sigma_k {}^0 a_k + \bar{\sigma}_k {}^0 \hat{a}_k ({}^0 P_n - {}^0 P_k) \\ \bar{\sigma}_k {}^0 a_k \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

dans ce cas on est besoin de calculer les matrices ${}^0 T_k$ pour $k=1, \dots, n$.

1.3.2.2 Modèle cinématique inverse

Le *modèle cinématique inverse* (MCI) donne les vitesses articulaires $\dot{q}$ correspondants à une vitesse désiré $\dot{X}$ de l'organe terminal. le modèle cinématique inverse s'obtient par la solution d'un système d'équations linéaires soit analytiquement, soit numériquement. Les *solutions analytiques* diminuent le nombre d'opérations de façon remarquable par rapport au solutions numériques, mais il faut traiter les cas singuliers séparément. Les *solutions numériques* sont plus générales et traitent tous les cas de la même façon[Eti01].

Soit $X = \begin{bmatrix} X_p^T & X_r^T \end{bmatrix}^T$ une représentation de la situation du repère R_n dans le repère R_0 . où X_p^T et X_r^T désignent respectivement la position et l'orientation opérationnelles.

Les relations entre les vitesses $\dot{X}_p$ et $\dot{X}_r$ et les vecteurs ${}^0 V_n$ et ${}^0 \omega_n$ sont :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{X}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_p & 0_3 \\ 0_3 & \Omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0 V_n \\ {}^0 \omega_n \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} {}^0 V_n \\ {}^0 \omega_n \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

2. La matrice $\hat{a}$ est défini par : $\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$

A partir de l'équation (1.28) le MCD s'écrit sous la forme : $\dot{X} = J\dot{q}$.

La méthode la plus générale consiste à calculer J^{-1} la matrice inverse de J , qui permet de déterminer les vitesses articulaires $\dot{q}$ grâce à la relation :

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X} \quad (1.39)$$

Lorsque la matrice J a la forme : $J = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$, les matrices A et C étant carrées inversibles, il est facile de montrer que l'inverse de cette matrice s'écrit :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

La résolution du problème se ramène donc à l'inversion de la matrice J .

1.3.3 Modélisation dynamique

Le *modèle dynamique* est la relation entre les couples(et/ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires[Abd04]. Il est représenté par la relation :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \mathbf{f}_e) \quad (1.41)$$

avec :

- Γ : vecteur des couples des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique.
- q : vecteur des positions articulaires.
- $\dot{q}$: vecteurs des vitesses articulaires.
- $\ddot{q}$: vecteurs des accélérations articulaires.
- $\mathbf{f}_e$: vecteurs représentant l'effort extérieur qu'exerce le robot sur l'environnement.

La relation (1.41) est appelée *modèle dynamique inverse*(ou *modèle dynamique*) parce qu'elle définit le système d'entrée en fonction des variables sorties.

Le *modèle dynamique direct* décrit les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses et couples. Il est représenté par la relation suivante :

$$\ddot{q} = g(q, \dot{q}, \Gamma, \mathbf{f}_e) \quad (1.42)$$

Le modèle dynamique joue un rôle important dans la conception et le fonctionnement des robots. Pour la conception, le modèle dynamique inverse peut être utilisé pour choisir les actionneurs, alors que le modèle dynamique direct est utilisé pour effectuer des simulations, afin de tester les performances du robot. En ce qui concerne les fonctionnalités du robot, le modèle dynamique inverse est utilisée pour calculer les couples actionneurs, qui sont nécessaires pour réaliser un mouvement souhaité. Il est également utilisé pour identifier les paramètres dynamiques qui sont nécessaires à la fois pour le contrôle et la simulation[Kha04].

plusieurs approches sont proposés pour obtenir le modèle dynamique des robots. Les plus

souvent utilisé dans la robotique sont le formalisme de *Lagrange*, et le formalisme de *Newton-Euler*.

L'approche de Newton-Euler est basée sur les forces et les moments agissent entre les liens. La formulation de Newton-Euler peut être considéré comme une approche basée sur l'*équilibre des forces*, la formulation de Lagrange est une approche basée sur l'*énergie*. Bien sûr, pour le même manipulateur, les deux donnent les mêmes équations du mouvement[Joh05].

Dans cette étude on présente le formalisme de Lagrange et on considère que les robots à chaîne ouverte simple.

1.3.3.1 Formalisme de Lagrange

On considère un système idéal sans frottement ou élasticité, exerçant ni des forces ni des moments sur l'environnement.

La formulation de Lagrange décrit le comportement d'un système dynamique en terme d'énergie[LB99]. Les équations de Lagrange sont généralement écrites sous la forme :

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (1.43)$$

où L est le *Lagrangien* du système, se définit comme la différence entre l'énergie cinétique K et l'énergie potentiel P :

$$L = K - P \quad (1.44)$$

Pour obtenir l'équation dynamique générale du robot, on détermine les énergies cinétiques et potentielles, et le lagrangien, puis les remplacés dans l'équation de Lagrange.

Dans notre usage, q sera le vecteur des variables articulaires, se composant de l'angle d'articulation θ_i et le déplacement de l'articulation d_i . Alors que Γ est un vecteur qui a comme composants les couples n_i correspondants aux angles θ_i , et les forces f_i correspondantes aux déplacements d_i .

L'énergie cinétique

L'énergie cinétique k_i du $i^{ième}$ articulation est donnée par l'expression :

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_i^T {}^{C_i} I_i {}^i \omega_i \quad (1.45)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique due à la vitesse linéaire et le deuxième terme est l'énergie cinétique due à la vitesse angulaire. L'énergie cinétique totale du manipulateur est la somme de l'énergie cinétique des différentes articulations c'est-à-dire :

$$K = \sum_{i=1}^n k_i \quad (1.46)$$

Les vitesses $v_{C_i}^T$ et ${}^i\omega_i^T$ sont des fonctions de q et $\dot{q}$ respectivement, donc on voit que l'énergie cinétique d'un manipulateur peut être décrite par une formule en fonction de la position et de la vitesse, $k(q, \dot{q})$. En fait, l'énergie cinétique d'un manipulateur est donnée par :

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (1.47)$$

où $M(q)$ est une matrice $n \times n$ de l'énergie cinétique appelée *matrice d'inertie*. Une expression de la forme ci-dessus est appelé la *forme quadratique*. L'énergie cinétique doit toujours être positive, pour cela la matrice d'inertie du manipulateur doit être une matrice **définie positive**³.

L'énergie potentiel

L'énergie potentiel du i^{ime} articulation, a l'expression suivantes :

$$p_i = m_i {}^0g^T {}^0T_{C_i} + p_{ref_i} \quad (1.48)$$

où 0g est le vecteur de gravité (3×1), ${}^0T_{C_i}$ une transformation homogène localisant le centre de la i^{ime} articulation, et p_{ref_i} est une constante choisie de sorte que la valeur minimum de p_i soit 0. l'énergie potentielle totale est la somme de l'énergie potentielle dans les différentes articulations, c'est-à-dire :

$$P = \sum_{i=1}^n p_i \quad (1.49)$$

Puisque ${}^0T_{C_i}$ sont en fonction de $q_1, q_2, \dots, q_n$, l'energie potentielle est en fonction de la position de l'articulation, $P(q)$. donc le Lagrangien sera :

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - P(q) \quad (1.50)$$

1.3.3.2 Équation du mouvement d'un robot manipulateur

Se reportant à l'équation (1.50) le Lagrangien a la forme :

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - P(q) \quad (1.51)$$

où $M(q)$ est la matrice d'inertie du manipulateur et $P(q)$ est l'énergie potentielle due au gravité. Il est convenable d'écrire l'énergie cinétique sous forme d'une somme :

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - P(q) \quad (1.52)$$

3. Les matrices définie positives sont ceux qui ont la propriété que leur forme quadratique est toujours positif

en substituant dans l'équation de Lagrange, les équations de mouvements sont données par :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.53)$$

où Γ_i sont les forces(couples) agissant sur l'articulation i , en utilisant l'équation (1.52) on a :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n (M_{ij}(q) \ddot{q}_j + \dot{M}_{ij}(q) \dot{q}_j) \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{\partial P(q)}{\partial q_i} \quad (1.55)$$

Le terme $\dot{M}(q)$ peut être augmenté en termes de dérivés partiels.

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j \right) + \frac{\partial P(q)}{\partial q_i} \quad (1.56)$$

Afin de mettre les équations du mouvement sous forme d'un vecteur, on définit la matrice $C(q, \dot{q})$, tel que :

$$C_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad (1.57)$$

maintenant l'équation (1.58) peut être écrite comme :

$$\boxed{\Gamma = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)} \quad (1.58)$$

où :

- Γ : vecteur des couples appliquées aux articulations.
- $M(q)$: matrice d'inertie du robot.
- $C(q, \dot{q}) \dot{q}$: vecteur des forces de Coriolis et centrifuges.
- $G(q)$: vecteur des forces de gravité.

Pour un système avec frottement ou élasticité, le modèle dynamique est :

$$\boxed{\Gamma = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + F_e} \quad (1.59)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre pour le mouvement du manipulateur en fonction des couples articulaires appliqués[RLSS94].

Les matrices M et C , qui résument les propriétés d'inertie du manipulateur, ont les propriétés :

- La matrice d'inertie $M(q)$ est symétrique et définie positive.
- La matrice $M(q)$ est donnée comme suit :

$$M_m I \leq M(q) \leq M_M I \quad (1.60)$$

avec M_m et M_M des scalaires positives, et I la matrice d'inertie.

— L'inverse de la matrice $M(q)$ est borné :

$$\frac{1}{M_M} \leq M^{-1}(q) \leq \frac{1}{M_m} \quad (1.61)$$

— La matrice $N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ est antisymétrique.

— La matrice $C(q, \dot{q})$ vérifie la relation suivante :

$$C(q, x)y = C(q, y)x \quad (1.62)$$

avec x, y les vecteurs de vitesse de dimension $(n \times 1)$.

— la matrice $C(q, \dot{q})\dot{q}$ peut être écrite sous la forme :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q) [\dot{q}\dot{q}] + C(q) [\dot{q}^2] \quad (1.63)$$

où :

$B(q)$: une matrice de dimension $n \times n(n-1)$ des coefficients de Coriolis ses éléments sont égaux à :

$$b_{ijk} = \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \quad (1.64)$$

et $C(q)$: est une matrice de dimension $(n \times n)$ des coefficients centrifuges et $[\dot{q}^2]$ est un vecteur de dimension $(n \times 1)$, les éléments de $C(q)$ sont donnés par :

$$C(q) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{jj}}{\partial q_k} \right) \quad (1.65)$$

— La norme de la matrice $C(q, \dot{q})$ vérifie la relation suivante :

$$\|C(q, \dot{q})\| \leq v_0 \|\dot{q}\| \quad (1.66)$$

où, $v_0 > 0$ est indépendant de q .

— La norme du vecteur de gravité est bornée supérieurement ce que veut dire :

$$\|G(q)\| \leq g_b(q) \quad (1.67)$$

où, g_b est une fonction scalaire.

Observation : Les formules de cette partie sont démontrées dans l'annexe A

1.4 Application sur un Robot PUMA 600

1.4.1 Introduction

Afin d'appliquer les différentes notions et techniques de modélisation présentées dans ce chapitre, on présente dans cette section une application de calcul de modèle géométrique et modèle dynamique, du robot manipulateur PUMA 600.

Ces Modèles seront utilisés pour valider les commandes présentées dans les chapitres suivants. L'application sera faite pour les trois premières articulations (robot à 3 ddl).

1.4.2 Description géométrique et dynamique du robot PUMA 600

Le robot PUMA 600 est un robot à six axes. Les robots du type PUMA sont les robots les plus répandus dans les domaines de recherche et les robots d'assemblage les plus utilisés dans l'industrie.

Le PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) a été originalement conçu par Vic Schienman et financé par General Motors et The Massachusetts Institute of Technology au milieu des années 70, et fut produit pendant de nombreuses années par UNIMATION.

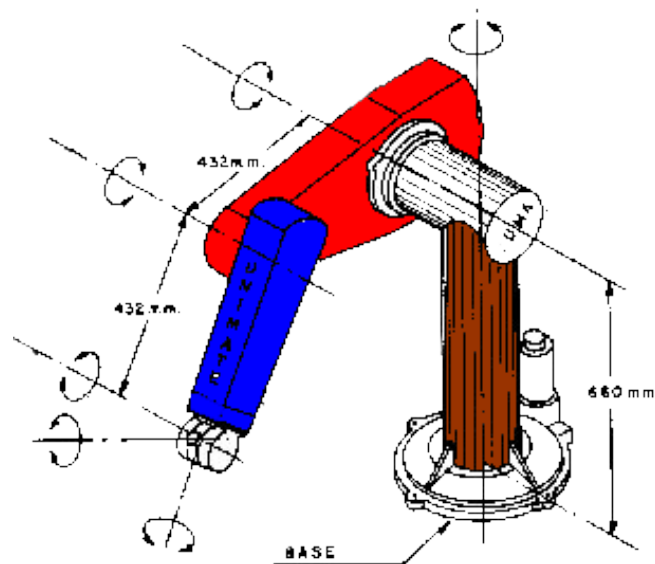


Fig 1.11: Le robot PUMA 600

1.4.2.1 Paramètres mesurés du robot PUMA 600

Les valeurs des paramètres mesurés du robot PUMA 600 utilisés sont données par les tableaux suivants :

	Axes	Masse
m_1	1 ^{er} corps	10.521Kg
m_2	2 ^{ème} corps	10.236Kg
m_3	3 ^{ème} corps	8.767Kg

Tab 1.1: Masses des axes

Corps	Longeur	
1 ^{er} corps	$l_1 = r_2$	0.149 m
2 ^{ème} corps	$l_2 = d_3$	0.432m
3 ^{ème} corps	$l_3 = a$	0.431 m

Tab 1.2: Longueurs des corps

1.4.3 Modèle géométrique direct du robot PUMA 600

Le placement des repères du robot manipulateur en utilisant la notation de Denavit-Hartenberg des trois premiers degrés de liberté est donné par la figure (Fig 1.12) qui permet de tirer les paramètres géométriques.

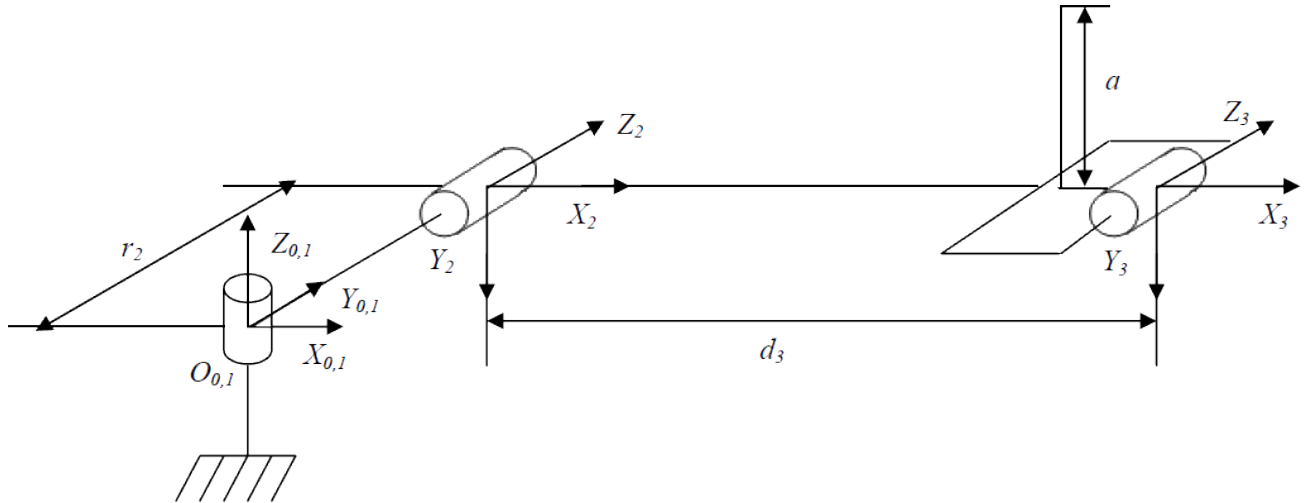


Fig 1.12: Le placement des repères du robot PUMA 600

En utilisant l'équation (1.14) on obtient les matrices de transformations suivantes :

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & d_i \\ \cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i & -r_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & r_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Corps	coefficient de frottement visqueux		coefficient de frottement sec	
1 ^{er} corps	f_1	2.52 N.m.s/rd	f^4	3.6 N.m.s/rd
2 ^{ème} corps	f_2	7 N.m.s/rd	f^5	10 N.m.s/rd
3 ^{ème} corps	f_3	1.75 N.m.s/rd	f^6	2.5 N.m.s/rd

Tab 1.3: coefficients de frottement visqueux et sec

Articulation i	σ_i	α_i	d_i	r_i	θ_i
1	0	0	0	0	q_1
2	0	$-\pi/2$	0	r_2	q_2
3	0	0	d_3	0	q_3

Tab 1.4: Paramètres géométriques du robot PUMA 600

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r_2 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir le MGD, il faut déterminer la matrice de passage du robot : soit 0T_3 dans le cas présent. Pour l'obtenir, on multiplie les matrices ${}^{i-1}T_i$ en partant de la dernière afin de définir des matrices intermédiaires U_i utiles pour l'élaboration du modèle géométrique inverse (MGI).

On a :

$$U_i = {}^i T_{i+1} \cdot U_{i+1} \quad (1.68)$$

Appliquer à notre cas, on définit successivement :

$$\begin{aligned} U_3 &= I_3 \\ U_2 &= {}^2T_3 \cdot U_3 = {}^2T_3 \cdot I_3 = {}^2T_3 \\ U_1 &= {}^1T_2 \cdot U_2 = {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = {}^1T_3 \\ U_0 &= {}^0T_1 \cdot U_1 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 = {}^0T_3 \end{aligned}$$

Les expressions des matrices U_i peuvent être présentés sous la forme :

$$U_i = \begin{bmatrix} s_{xi} & n_{xi} & a_{xi} & P_{xi} \\ s_{yi} & n_{yi} & a_{yi} & P_{yi} \\ s_{zi} & n_{zi} & a_{zi} & P_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

$$U_2 = {}^2T_3.U_3$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = {}^1T_2.U_2$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r_2 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & d_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 q_2 - \sin q_2 \cdot \cos q_3 & -\cos q_2 \cdot \sin q_3 - \cos q_3 \cdot \sin q_2 & 0 & d_3 \cdot \cos q_2 \\ 0 & 0 & 1 & -r_2 \\ -\sin q_2 \cdot \cos q_2 - \cos q_2 \cdot \sin q_3 & \sin q_2 \cdot \sin q_3 - \cos q_2 \cdot \cos q_3 & 0 & -d_3 \cdot \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_0 = {}^0T_1.U_1$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times U_1$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} -\cos q_1 \cdot (\sin q_2 \cdot \sin q_3 - \cos^2 q_2) & -\cos q_1 \cdot (\cos q_2 \cdot \sin q_3 + \cos q_3 \cdot \sin q_2) & -\sin q_1 & r_2 \cdot \sin q_1 + d_3 \cdot \cos q_1 \cdot \cos q_2 \\ -\sin q_1 \cdot (\sin q_2 \cdot \sin q_3 - \cos^2 q_2) & -\sin q_1 \cdot (\cos q_2 \cdot \sin q_3 + \cos q_3 \cdot \sin q_2) & \cos q_1 & d_3 \cdot \cos q_2 \cdot \sin q_1 - r_2 \cdot \cos q_1 \cdot \cos q_2 \\ -\cos q_2 \cdot \sin q_2 - \cos q_2 \cdot \sin q_3 & \sin q_2 \cdot \sin q_3 - \cos q_2 \cdot \cos q_3 & 0 & -d_3 \cdot \sin q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.4 Modèle dynamique du robot PUMA 600

1.4.4.1 La matrice d'inertie

Les matrices de pseudo-inertie des trois premiers corps sont :

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m_1 r^2 & 0 & \frac{1}{2} m_1 r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_1 r & 0 & m_1 \end{bmatrix}; I_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_2 d^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_2 d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} m_2 d & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}; I_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_3 a^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_3 a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} m_3 a & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice d'inertie sont (Annexe A) :

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) & m_{13}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) & m_{23}(q) \\ m_{31}(q) & m_{32}(q) & m_{33}(q) \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} m_{11}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_1}{\partial q_1} I_1 \frac{\partial^0 T_1^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_1 + \frac{\partial^0 T_2}{\partial q_1} I_2 \frac{\partial^0 T_2^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_1 + \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_1} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_1 \right\} \\ &= \frac{1}{6} m_3 r^2 + \frac{1}{6} d^2 (3m_3 + m_2) \cos(2q_2) + \frac{1}{6} m_3 a^2 \cos(2q_3 + 2q_2) + \frac{1}{2} m_3 d^2 + \frac{1}{6} m_2 d^2 + \frac{1}{3} m_3 r^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} m_3 a^2 + \frac{1}{2} m_3 a d \cos(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2} m_3 a d \cos(q_3) + r^2 m_2 \\ m_{21}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_2}{\partial q_1} I_2 \frac{\partial^0 T_2^T}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_1} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} m_3 a r \sin(q_3 + q_2) - \frac{1}{2} d r (m_2 + 2m_3) (q_2) \\ m_{31}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_1} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_3} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} m_3 a r \sin(q_3 + q_2) \\ m_{22}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_2}{\partial q_2} I_2 \frac{\partial^0 T_2^T}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dot{q}_2 + \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_2} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_2} \dot{q}_2 \dot{q}_2 \right\} \\ &= \frac{1}{3} m_2 d^2 + m_3 d^2 + \frac{1}{3} m_3 a^2 + m_3 a d \cos(q_3) \\ m_{32}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_2} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_3} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right\} \\ &= -\frac{1}{3} m_3 a^2 + \frac{1}{2} m_3 a d \cos(q_3) \\ m_{33}(q) &= \text{trace} \left\{ \frac{\partial^0 T_3}{\partial q_3} I_3 \frac{\partial^0 T_3^T}{\partial q_3} \dot{q}_3 \dot{q}_3 \right\} \\ &= -\frac{1}{3} m_3 a^2 \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} m_{11} &= 3.24 + 1.77 \cos(2q_2) + 0.814 \cos(2q_3 + 2q_2) + 1.63(2q_2 + q_3) + 1.63(q_3) \\ m_{12} = m_{21} &= -1.22 \sin(q_2) - 0.563 \sin(q_3 + q_2) \\ m_{22} &= 5.17 + 3.26 \cos(q_3) \\ m_{13} = m_{31} &= -0.563 \sin(q_3 + q_2) \\ m_{32} = m_{23} &= 1.63 + 1.63 \cos(q_3) \\ m_{33} &= 1.63 \end{aligned}$$

1.4.4.2 La matrice des forces Centrifuges et de Coriolis

Les éléments de la matrice des forces Centrifuges et de Coriolis sont(*Annexe A*) :

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) & c_{13}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) & c_{23}(q, \dot{q}) \\ c_{31}(q, \dot{q}) & c_{32}(q, \dot{q}) & c_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} c_{11}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q} \\ &= -\frac{1}{4} m_3 a d (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + q_3) + \frac{1}{6} m_3 a^2 (\dot{q}_2 \sin(3q_3 + 2q_2)) \\ &\quad - \frac{1}{2} d^2 (m_3 + \frac{1}{3} m_3) \dot{q}_2 \sin(2q_2) - \frac{1}{4} m_3 a d \sin(q_3) \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{32}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_3 \\ &= -\frac{1}{2} d^2 (m_3 + \frac{1}{3} m_2) \dot{q}_1 \sin(2q_2) - m_3 a \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} a \sin(2q_3 + 2q_2) + d \sin(2q_2 + q_3) \right\} \dot{q}_1 \\ &\quad - m_3 a \frac{1}{4} r (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos(q_3 + q_2) - dr (m_3 + \frac{1}{2} m_2) \dot{q}_2 \cos(q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{13}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_3 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_3 a^2 \sin(2q_3 + q_2) \right) \frac{1}{2} m_3 a d \sin(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2} m_3 a d \sin(q_3) \dot{q}_1 \\ &\quad - \frac{1}{4} m_3 a r \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{31}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_3 \\ &= \frac{1}{2} (d^2 (m_3 + \frac{1}{3} m_2) \sin(2q_2) + \frac{1}{3} m_3 a^2 \sin(2q_3 + 2q_2) + m_3 a d \sin(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1 \\ &\quad - \frac{1}{4} m_3 a r \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{22}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q} \\ &= -\frac{1}{2} m_3 a d \sin(q_3) \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{23}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_3 \\ &= -\frac{1}{2} m_3 a d (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_3) - \frac{1}{4} m_3 a r \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_3 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_3 a^2 \sin(2q_3 + 2q_2) + \frac{1}{2} m_3 a d \sin(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2} m_3 a d \sin(q_3) \right) \dot{q}_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} m_3 a r \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{32}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial m_{21}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{13}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{23}(q)}{\partial q_3} - \frac{\partial m_{33}(q)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_3 \\
&= \frac{1}{2} m_3 a d \sin(q_3) \dot{q}_2 + \frac{1}{4} m_3 a r \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_1
\end{aligned}$$

$$c_{33}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q}$$

donc, on a

$$\begin{aligned}
c_{11}(q, \dot{q}) &= 1.63(\dot{q}_2 + 0.5\dot{q}_3) \sin(2q_2 + q_3) - 0.814(\dot{q}_2 + q_3) \sin(2q_3 + 2q_2) - 1.77\dot{q}_2 \sin(2q_2) \\
&\quad - 0.816 \sin(q_3) \dot{q}_3 \\
c_{12}(q, \dot{q}) &= -1.22\dot{q}_2 \cos(q_2) - 0.563(\dot{q}_2 + 0.5\dot{q}_3) \cos(q_2 + q_3) - 1.77\dot{q}_1 \sin(2q_2) \\
&\quad - 0.5(1.63 \sin(2q_2 + 2q_3) + 3.26 \sin(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1 \\
c_{13}(q, \dot{q}) &= 0.5(-1.63 \sin(2q_2 + 2q_3) - 1.63 \sin(2q_2 + q_3) - 1.63 \sin(q_3)) \dot{q}_1 - 0.282 \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_2 \\
c_{21}(q, \dot{q}) &= 0.5(3.55 \sin(2q_2) + 1.63 \sin(2q_2 + 2q_3) + 3.26 \sin(q_3 + 2q_2)) \dot{q}_1 - 0.282 \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_3 \\
c_{22}(q, \dot{q}) &= -1.63 \sin(q_3) \dot{q}_3 \\
c_{23}(q, \dot{q}) &= -1.63(\dot{q}_3 + \dot{q}_2) \sin(q_3) - 0.282 \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_1 \\
c_{31}(q, \dot{q}) &= 0.5(1.63 \sin(2q_2 + 2q_3) + 1.63 \sin(2q_2 + q_3) + 1.63 \sin(q_3)) \dot{q}_1 + 0.282 \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_2 \\
c_{32}(q, \dot{q}) &= 1.63 \sin(q_3) \dot{q}_2 + 0.282 \cos(q_3 + q_2) \dot{q}_1 \\
c_{33}(q, \dot{q}) &= 0
\end{aligned}$$

1.4.4.3 Le vecteur de gravité

Pour calculer le vecteur de gravité, nous devons déterminer l'énergie potentielle du robot, comme exprime par les équations (1.48) et (1.49) :

$$\begin{aligned}
P_1 &= -m_1 {}^0g^T {}^0T_1 1_{\bar{r}} = 0 \\
P_2 &= -m_2 {}^0g^T {}^0T_2 2_{\bar{r}} = -\frac{1}{2} m_2 g d \sin(q_2) \\
P_3 &= -m_3 {}^0g^T {}^0T_3 3_{\bar{r}} = -m_2 g \left\{ \frac{1}{2} a \sin(q_2 + q_3) + d \sin(q_2) \right\}
\end{aligned}$$

ou

$${}^0g^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix}$$

$$1_{\bar{r}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}r & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2_{\bar{r}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3_{\bar{r}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors

$$P(q) = -\frac{1}{2}m_2gd \sin(q_2) - m_2g \left\{ \frac{1}{2}a \sin(q_2 + q_3) + d \sin(q_2) \right\}$$

en utilisant cette expression de l'énergie potentielle totale, on peut calculer les éléments du vecteur de gravité comme suit :

$$\begin{aligned} g_1(q) &= \frac{\partial P(q)}{\partial q_1} = 0 \\ g_2(q) &= \frac{\partial P(q)}{\partial q_2} = -\frac{1}{2}gd(m_2 + 2m_3) \cos(q_2) - \frac{1}{2}m_3ga \cos(q_2 + q_3) \\ g_3(q) &= \frac{\partial P(q)}{\partial q_3} = -\frac{1}{2}m_3ga \cos(q_2 + q_3) \end{aligned}$$

le vecteur de gravité est :

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -80.5 \cos(q_2) - 37.1(q_3 + q_2) \\ -37.1 \cos(q_3 + q_2) \end{bmatrix}$$

1.4.4.4 Le vecteur de frottement

A partir de l'Annexe A le vecteur de frottement peut s'écrire comme suit :

$$f(\dot{q}) = \begin{bmatrix} f_1\dot{q}_1 + f_4sgn(\dot{q}_1) \\ f_2\dot{q}_2 + f_5sgn(\dot{q}_2) \\ f_3\dot{q}_3 + f_6sgn(\dot{q}_3) \end{bmatrix}$$

donc le vecteur de frottement est :

$$f(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 2.52\dot{q}_1 + 3.6sgn(\dot{q}_1) \\ 7\dot{q}_2 + 10sgn(\dot{q}_2) \\ 1.75\dot{q}_3 + 2.5sgn(\dot{q}_3) \end{bmatrix}$$

1.5 Conclusion

Ce chapitre permis la découverte de quelques notions de base du domaine de robotique, notamment dans les sections 1.1 et 1.2 où ils sont présentées les définitions générales de base et les notions permettant de comprendre la constitution et le fonctionnement d'un robot manipulateur. La section 1.3 est consacré pour la modélisation des robots manipulateurs, à partir de la modélisation géométrique, la modélisation cinématique, jusqu'à la modélisation dynamique où il est représenté le formalisme de Lagrange pour l'obtention de l'équation de mouvement du robot manipulateur. La dernière section présente une application de calcul des différents modèles du robot PUMA 600 afin de les utilisés dans les chapitres suivants qui seront consacrés aux commandes classiques et intelligentes des robot manipulateurs.