ENSET Mohammedia

Cours de

Robotique



Robot 6R. "EducaArm1". ENISo 2016

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
MOHAMMEDIA
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

ENSET

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التقني
المحمدية
جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء

Support de cours

Cours robotique industrielle

2ème année Master GIL

2ème année FI-GIL

3ème année FI-GMSI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

Adresse : BP 159 Bd Hassan II,
Mohammedia - Maroc
Tél : 0523322220
Fax : 0523322546
Site web : www.enset-media.ac.ma

العنوان : صندوق البريد **159**، شارع
الحسن الثاني، المحمدية
الهاتف : **0523322220**
الفاكس : **0523322546**
www.enset-media.ac.ma

Table des matières

GENERALITES SUR LES ROBOTS 1

1.1 Définition d'un robot (Norme ISO 8373 :2021) 1
1.2 Types des robots et domaines d'application 1
1.2.1 Les robots industriels 1
1.2.2 Les robots de service 1
1.3 Principaux Types de robots industriels 2
1.3.1 Architecture générale d'un robot industriel 2
1.3.2 Robot cartésien 3
1.3.3 Robot SCARA 4
1.3.4 Robot articulé 5
1.3.5 Robot parallèle delta 8
1.3.6 La préhension 9
1.4 Les modèles de commande d'un robot 10
1.5 Etapes de conception d'un robot 11
1.6 Critère de choix d'un robot sériel 11
1.6.1 Degré de liberté 11
1.6.2 Espace de travail 12
1.6.3 Répétabilité 12
1.6.4 Vitesses maximales 12
1.6.5 Charge utile 12
1.7 Motorisation et transmission de puissance pour les robots industriels : 13
1.7.1 Motorisation 13
1.7.2 Transmission de puissance mécanique : 14
1.7.3 Transmission de puissance pour le poignet sphérique : 18

GEOMETRIE DES ROBOTS SERIELS 20

2.1 Introduction : 20
2.2 Représentations des transformations et mouvements rigides : 20
2.2.1 Définition de l'orientation d'un solide : 20
2.3 Déplacement rigide, Matrice homogène : 26
2.4 Composition des transformations homogènes : 27
2.4.1 Exemples d'application : 27
2.5 Paramétrage de Denavit-Hartenberg : 28
2.5.1 Définition des axes 29
2.5.2 Paramètres de D-H 29
2.5.3 Cas particuliers 30
2.6 Modèle géométrique direct des robots sériels 30

2.6.1 Exemple 1 : 31
2.6.2 Exemple 2 : 32
2.7 Modèle géométrique inverse MGI **33**
2.7.1 Méthode de Paul 33
2.7.2 Application au robot RRR de la paragraphe 2.6.2 34
2.7.3 Cas d'un robot à 6 dll comportant un poignet sphérique : 35
2.7.4 Application : Robot Fanuc S430-6R-Poignet sphérique 36

CINEMATIQUE DES ROBOTS SERIELS 40

3.1 Introduction **40**
3.2 Modèle cinématique direct MCD **40**
3.2.1 Matrice jacobienne 40
3.2.2 Exemple 40
3.2.3 Méthode explicite directe : 41
3.2.4 Méthode récurrente 43
3.2.5 Application au robot PRR (Figure 2-13) : 44
3.3 Modèle cinématique inverse (MCI) **45**
3.3.1 Cas où $\boldsymbol{n = m}$ 45
3.3.2 Cas où $\boldsymbol{n > m}$ 45
3.3.3 Cas où $\boldsymbol{n < m}$ 46
3.4 Singularités **49**
3.4.1 Définition 49
3.4.2 Exemple robot plan RR 49
3.4.3 Exemple d'un robot 6R : 50

DYNAMIQUE DES ROBOTS SERIELS 52

4.1 Introduction **52**
4.2 Modèle quasi-statique : **52**
4.2.1 Système linéaire statique 52
4.2.2 Exemple 53
4.3 Modèle dynamique **53**
4.3.1 Méthode de Newton-Euler 53
4.3.2 Méthode de Lagrange : 55
4.4 Exemple : Robot RR **55**
4.4.1 Méthode de Newton-Euler 56
4.4.2 Méthode de Lagrange 59

..... BIBLIOGRAPHIE

..... 62

Généralités sur les robots

1.1 Définition d'un robot (Norme ISO 8373 :2021)

Un robot est un mécanisme programmable actionné, avec un degré d'autonomie pour effectuer des opérations de locomotion, de manipulation ou de positionnement.

L'autonomie est la capacité d'exécuter des tâches prévues à partir de l'état courant et des détections, sans intervention humaine.

1.2 Types des robots et domaines d'application

On distingue deux grandes familles de robots : les robots industriels et les robots de service.

1.2.1 Les robots industriels

On a deux groupes de robots industriels, les robots conventionnels et les robots collaboratifs ou cobots. La nuance ce que les robots industriels conventionnels évoluent dans des zones de travail qui leur sont propres, alors que les cobots partagent le même espace que les travailleurs, qu'ils assistent dans l'accomplissement de tâches.

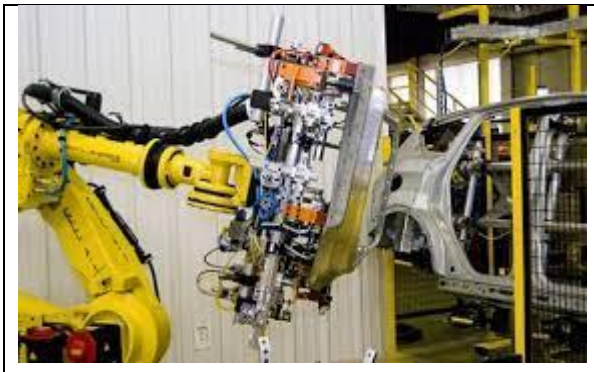


Figure 1-1 : Robot conventionnel FANUC

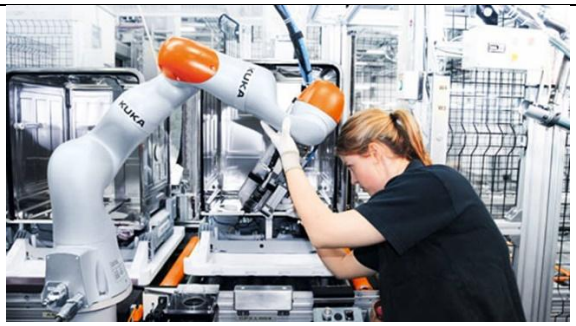


Figure 1-2 : Cobot KUKA

1.2.2 Les robots de service

Un robot de service est un robot à usage personnel ou professionnel qui exécute des tâches utiles pour des humains ou des appareillages. (Norme ISO 8373:2021)

Les tâches à usage personnel comprennent la manipulation ou le service d'articles, le transport, le soutien physique, la fourniture de conseils ou d'informations, le toilettage, la cuisine et la manipulation des aliments, et le nettoyage.

Les tâches à usage professionnel comprennent l'inspection, la surveillance, la manipulation d'objets, le transport de personnes, la fourniture de conseils ou d'informations, la cuisine et la manipulation d'aliments, et le nettoyage.



Robot P Guard. Enova Robotics



Robot aspirateur Xiaomi



AGV (Automated Guided vehicle) OMRON



Robot d'accueil . Enova Robotics



Robot Spot Boston Dynamics



Humanoïde Atlas Boston Dynamics



Robot de désherbage NAIO



Robot médical angiographie KUKA



Robot serveur KEENON

Figure 1-3 Exemples de Robots de service

1.3 Principaux Types de robots industriels

1.3.1 Architecture générale d'un robot industriel

La plus grande famille des robots industriels sont les manipulateurs. Un manipulateur est un mécanisme généralement composé d'une série de segments, articulés (liaison pivot ou rotoïde) ou coulissants (liaison glissière ou prismatique) les uns par rapport aux autres.
Le robot industriel inclut :
— le manipulateur, y compris les actionneurs du robot commandés par la commande du robot ;
— la commande du robot ;
— les moyens permettant de faire apprendre et/ou de programmer le robot, y compris toute interface de communication (matériel et logiciel) (Figure 1-4).

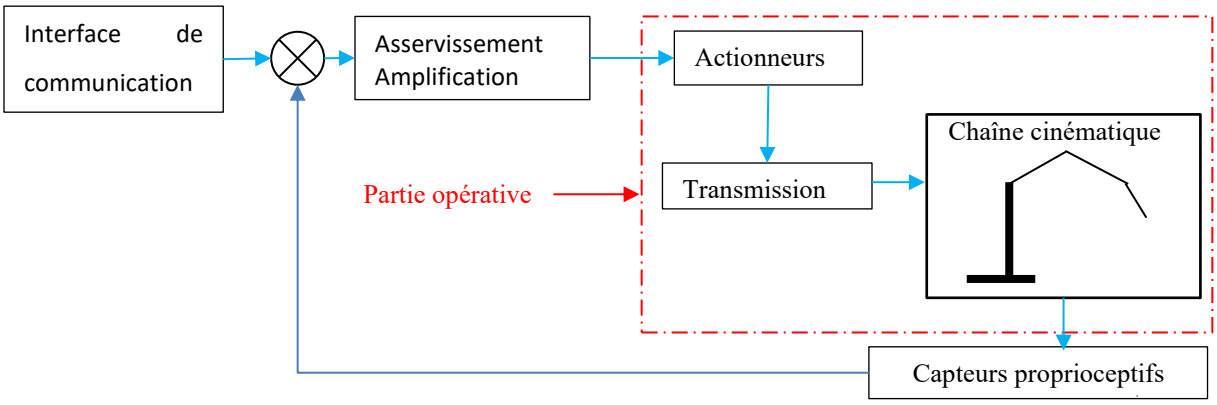


Figure 1-4 : constitution sommaire d'un robot industriel

La chaîne cinématique d'un manipulateur sériel a une structure à chaîne ouverte. Elle est composée des deux parties :(**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**)

- Le porteur, constitué des trois premières liaisons mécaniques ;
- Le poignet, constitué du reste de liaisons et se termine par l'Organe Terminal OT.

N.B : Le préhenseur, fixé sur l'OT ne fait partie du manipulateur (Norme ISO 8373 : 2021)

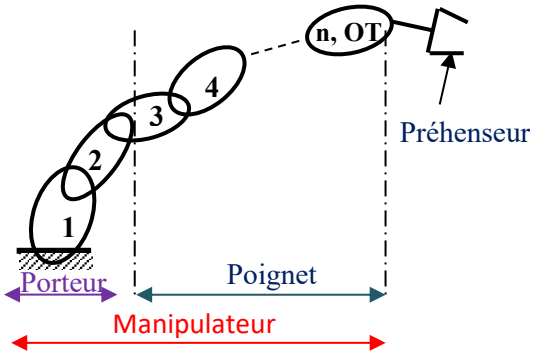


Figure 1-5 : Structure mécanique d'un manipulateur sériel

1.3.2 Robot cartésien

Les robots cartésiens effectuent uniquement des déplacements de translation selon les 3 axes.

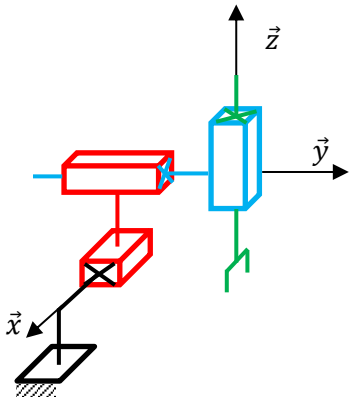


Figure 1-6 : *robot cartésien PPP*



Figure 1-7 : Robot cartésien IAI

Ces robots permettent une précision de positionnement élevée dans tout l'espace de travail (de l'ordre de quelques microns pour des portées de déplacement faibles). Pour cette raison, la plupart des machines de mesure tridimensionnelle sont fabriquées avec cette structure. Ces robots peuvent atteindre des tailles importantes grâce à leur structure modulaire. Un robot cartésien peut servir tout un parc de machines à la fois. Dans le cas où les charges (payload) manipulées sont très élevées, La structure en portique est la mieux appropriée.

Dans l'industrie, les robots cartésiens sont très utilisés dans :

Les opérations d'assemblage qui nécessitent un positionnement très précis ;

L'asservissement des machines-outils (chargement/déchargement des pièces usinées et changement d'outil) ;

Les opérations de pick-and-place pour les presses à injecter.



Figure 1-8 : Robot KUKA KR 600L jusqu'à 600 Kg, 45 m de déplacement, répétabilité $\pm\, 0,3\ mm$.

1.3.3 Robot SCARA

Un robot SCARA est un manipulateur comprenant deux articulations pivots à axes parallèles qui assurent une complaisance dans un plan donné (plan $(\vec{x}\,, \vec{y}\,)$ dans le cas de la Figure 1-9). SCARA vient de « Selectively compliant arm for robotic assembly » ou « Selective Compliance Articulated Robot Arm » (Bras robotisé d'assemblage à mobilité sélective).

La *complaisance* est définie comme le comportement souple d'un robot ou d'un quelconque outil associé, en réaction aux forces externes exercées sur lui. Quand ce comportement est indépendant de toute rétroaction due à des données de capteurs, il est appelé complaisance passive ; sinon il est appelé complaisance active.

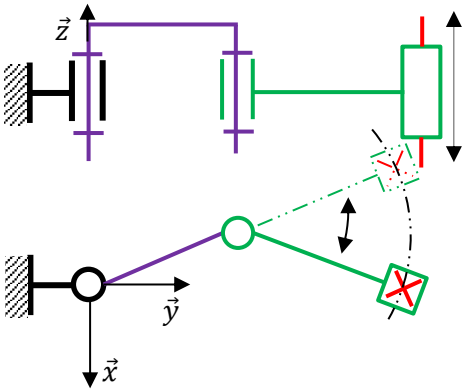


Figure 1-9 : *Porteur RRP (SCARA)*



Payload: 5,5 Kg

Reach: 0,6 à 0,8 m

Rep:$\pm$ 0,017 mm

Figure 1-10 : *Robot SCARA eCobra "OMRON"*

Les robots SCARA sont plus rapides et plus flexibles que les robots cartésiens. La plupart des robots SCARA sont fabriqués avec quatre degrés de liberté (RRPR). Ils sont utilisés pour des opérations d'assemblage simples qui n'exigent pas une orientation complète (dans l'espace) des pièces manipulées. Essentiellement après un positionnement dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, grâce aux deux premières rotoïdes, Ils sont notamment remarquables pour leur capacité à effectuer des opérations de montage vertical en utilisant le déplacement de l'axe $\vec{z}$ et éventuellement la rotation autour de l'axe $\vec{z}$. Dans ces conditions le robot SCARA possède une répétabilité plus précise et il est moins onéreux que les robots articulés.

1.3.4 Robot articulé

Un robot articulé est un manipulateur comprenant au moins trois articulations rotoïdes. Les robots articulés commercialisés ont 4 à 7 axes. La quasi-totalité des robots articulés commercialisés ne comportent que des liaisons rotoïdes et sont de 4 à 6 axes. Ils sont composés de deux parties : le porteur comprenant les trois premières liaisons et le poignet comprenant de 1 à 3 liaisons. Le porteur du robot est construit sur la base d'un bras humain il est dit « anthropomorphe » (Figure 1-11).
Selon le type d'utilisation, le nombre des liaisons du poignet varie de 1 à 3. Le poignet à 3 liaisons rotoïde d'axes concourants au même point est appelé poignet sphérique vu que la liaison équivalente aux 3 liaisons est une liaison sphérique (Figure 1-12).

Lorsque le nombre des liaisons dépasse le nombre de 6 le robot est dit redondant. Un robot redondant est capable d'atteindre n'importe quelle position et orientation malgré l'existence des obstacles.
Ces robots sont plus difficiles à programmer que les autres robots et sont également plus chers.

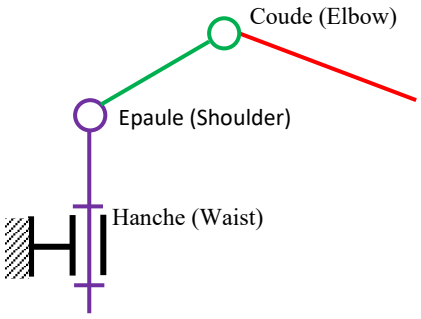


Figure 1-11 : *Porteur RRR anthropomorphe*

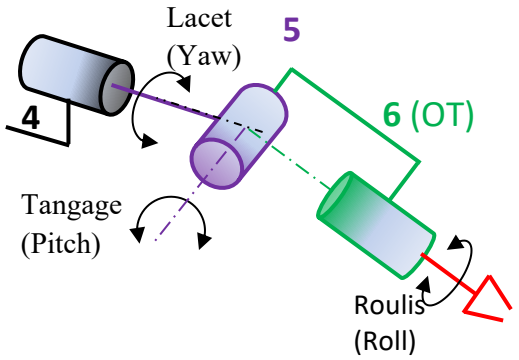


Figure 1-12 : *Poignet sphérique*

Les applications de ces robots sont très variées. Ils sont très utilisés dans les chaînes de production pour des tâches demandant de 4 à 6 degrés de liberté comme le soudage, la manipulation, la palettisation, le chargement, la peinture, le montage etc… Dans le cas où l'environnement de travail du robot peut comporter des obstacles à éviter, un robot redondant à 7 axes est recommandé.

1.3.4.1 Robot de palettisation à 4 axes

La palettisation est le procédé logistique qui consiste à placer des objets sur une palette afin d'en unifier la charge et faciliter son transport par les différents équipements de manutention. Cette tâche nécessite en général 4 libertés dont 3 déplacements linéaires dans l'espace et une orientation autour de l'axe vertical. La Figure 1-13 montre un robot de palettisation à 4 axes du fabriquant ABB.



Figure 1-13 : Robot de palettisation 4 axes ABB IRB 660

Les actionneurs sont reportés à la base du robot, diminuant ainsi les masses globales en mouvement. Pour transférer le mouvement vers l'articulation concernée une boucle cinématique en parallélogramme est insérée pour transmettre le mouvement moteur à l'articulation 3 (Figure 1-14)

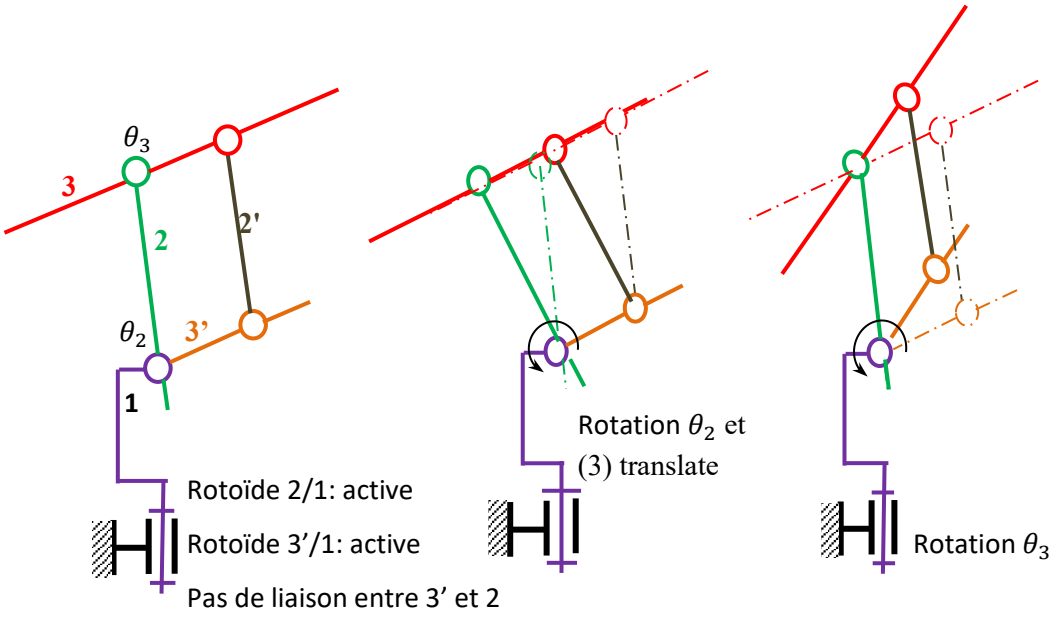


Figure 1-14 : *Boucle en parallélogramme*

1.3.4.2 Robot collaboratif "Cobot" 7 axes :

Le mot Cobot est la contraction du terme « robot » et « collaboratif. Si les robots industriels évoluent dans des zones de travail qui leur sont propres, les cobots partagent le même espace que les travailleurs, qu'ils assistent dans l'accomplissement de tâches. La cohabitation Homme-cobot est rendue possible car les robots collaboratifs sont équipés d'un système de sécurité sophistiqué qui surveille tout ce qui se passe entre eux. Selon les informations reçues de ses différents capteurs, le cobot contrôle les trajectoires, les forces et les vitesses de façon à sécuriser les utilisateurs dans son environnement. Le 7ème axe de mouvement leur permet d'éviter des obstacles en planifiant des trajectoires alternatives.

Leurs faibles coûts d'intégration et de démarrage, leur prise en main et leur programmation simplifiés grâce au mode d'apprentissage et leur flexibilité relative sont les principaux avantages de leur utilisation. Cependant, leurs principaux inconvénients sont leurs normes de sécurité sévères et les charges relativement faibles qu'ils peuvent manipuler.

Aujourd'hui les cobots sont utilisés dans la production industrielle notamment dans le secteur automobile et dans le domaine médical, en particulier dans la chirurgie.



Figure 1-15 : Cobot assistant de polissage

1.3.5 Robot parallèle delta

Un robot parallèle est un robot où l'OT appelé plateforme mobile est lié à la base par trois chaînes ouvertes souvent identiques. Leurs avantages majeurs sont la rigidité et la précision des mouvements. Cependant leurs espaces de travail sont beaucoup plus réduits que les robots sériels. Le robot parallèle industriel le plus connu est le robot DELTA, parfois appelé Spider, à trois degrés de liberté en translation.

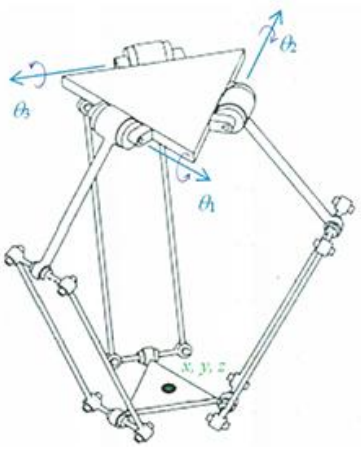


Figure 1-16 : *Robot Translateur DELTA*



Figure 1-17 : Robot Delta « FANUC"

Chacune de trois chaînes comporte un parallélogramme qui a pour effet d'éliminer la rotation de la plateforme autour d'un axe. Les 3 parallélogrammes montés à 120° empêchent tout rotation de la plateforme mobile et n'autorisent qu'une translation dans l'espace

Vu que les moteurs sont montés sur la base fixe, la structure du robot Delta est très légère et offrent des mouvements à des grandes vitesses à une grande précision. Cependant, les charges manipulées varient le plus souvent de 10g à 1 Kg et peuvent atteindre 12 Kg. Ces robots industriels sont très utilisés dans l'industrie agroalimentaire, l'industrie pharmaceutique et électronique, ou pour les opérations de pick-and-place sur des objets légers et sont la solution idéale pour les tâches d'assemblage et d'emballage à faible charge utile.

Certains constructeurs ajoutent un poignet de 1 à 3 rotoïdes, fixé sur la plateforme pour permettre l'orientation de l'objet manipulé.

1.3.6 La préhension

C'est la faculté ou l'action de saisir des objets avec la main. Un préhenseur est un composant fixé sur l'OT du robot. Il assure la saisie de l'objet à manipuler. Il doit donc s'adapter à cet objet et fournir l'effort nécessaire pour l'immobiliser. Les principaux préhenseurs sont :

- Les pinces à deux ou plusieurs doigts (Figure 1-18 et Figure 1-19)
- Les préhenseurs à ventouses pour les tôles, feuilles … (Figure 1-20)
- Les préhenseurs magnétiques (Figure 1-21)

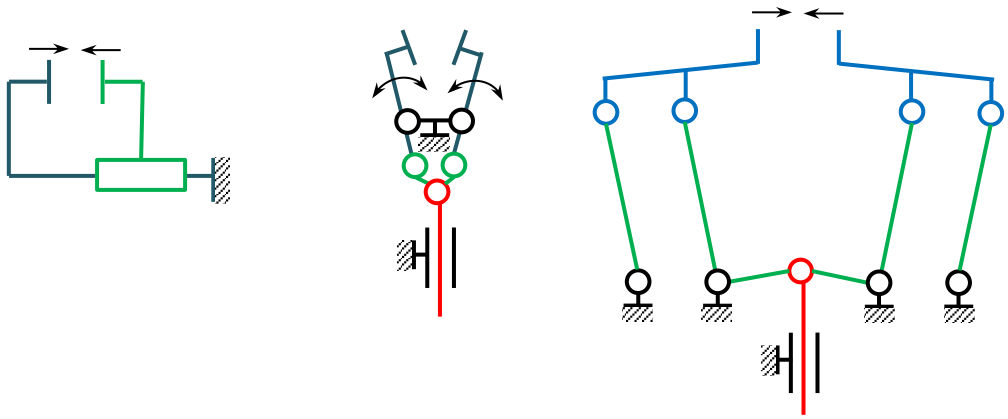


Figure 1-18 : *Pinces à deux doigts*

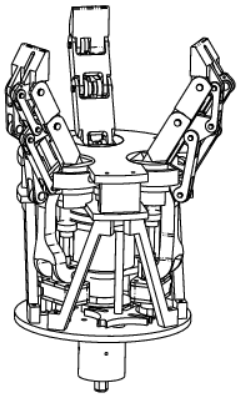




Figure 1-19 : *Pinces à plusieurs doigts*

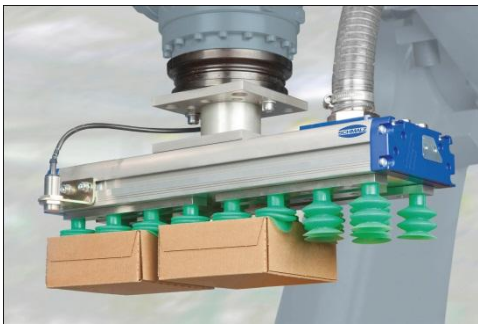




Figure 1-20 : *Préhenseurs à ventouses*

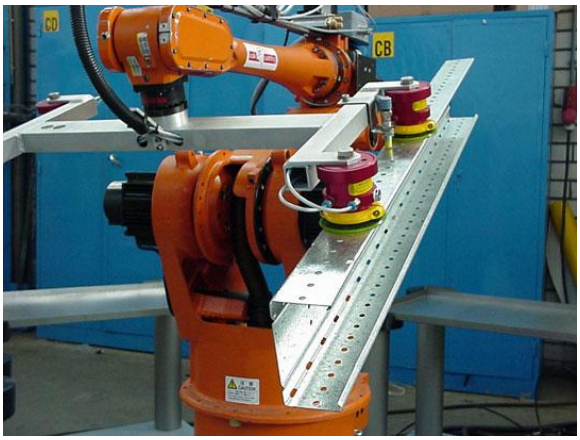
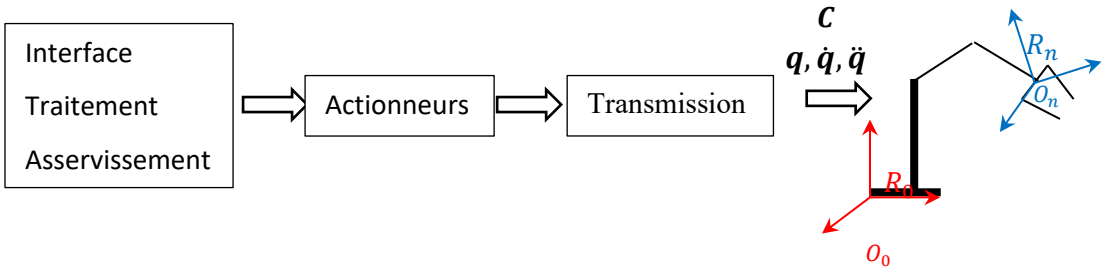




Figure 1-21 : *Préhenseurs magnétiques*

1.4 Les modèles de commande d'un robot

Les paramètres de commande d'un robot sont les efforts $\boldsymbol{C}$, les déplacements $\boldsymbol{q}$ et les vitesses $\boldsymbol{\dot{q}}$. Le déplacement de l'OT dans l'environnement opérationnel (repère R_0) est défini par le vecteur $\boldsymbol{X}$.



Les modèles de commandes sont résumés dans le tableau suivant

Tableau 1-1

Modèle	**Sens direct**	**Sens inverse**
Géométrique	$\boldsymbol{X} = f(\boldsymbol{q})$	$\boldsymbol{q} = \mathcal{F}(\boldsymbol{X})$
Cinématique	$\dot{\boldsymbol{X}} = f(\dot{\boldsymbol{q}})$	$\dot{\boldsymbol{q}} = \mathcal{F}(\dot{\boldsymbol{X}})$
Dynamique	$\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, \ddot{\boldsymbol{X}} = f(\boldsymbol{C})$	$\boldsymbol{C} = \mathcal{F}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, \ddot{\boldsymbol{X}})$

1.5 Etapes de conception d'un robot

Etape 1 : définition rigoureuse du CDCF (tâches à effectuer, paramètres …)

Etape 2 : étude de la structure articulée :

- Schéma cinématique
- Paramétrage, variables, hypothèses
- Modèles de commande

Etape 3 : étude de la gestuelle du bras

- L'évitement des obstacles
- Les accès à la tâche
- Le dégagement du préhenseur
- …

Etape 4 : l'analyse de coopération et de l'implantation sur site

Etape 5 : étude des transmissions et des couplages mécaniques

Etape 6 : étude des asservissements, des systèmes de sécurité…

1.6 Critère de choix d'un robot sériel

1.6.1 Degré de liberté

C'est le nombre d'articulations actives du robot. Les plus commercialisés sont les robots 6R car ils s'adaptent bien à la plupart des tâches industrielles. Les intervalles du déplacement pour chaque articulation sont primordiaux dans le choix du robot.

1.6.2 Espace de travail

C'est l'espace balayé par le point de référence du poignet.

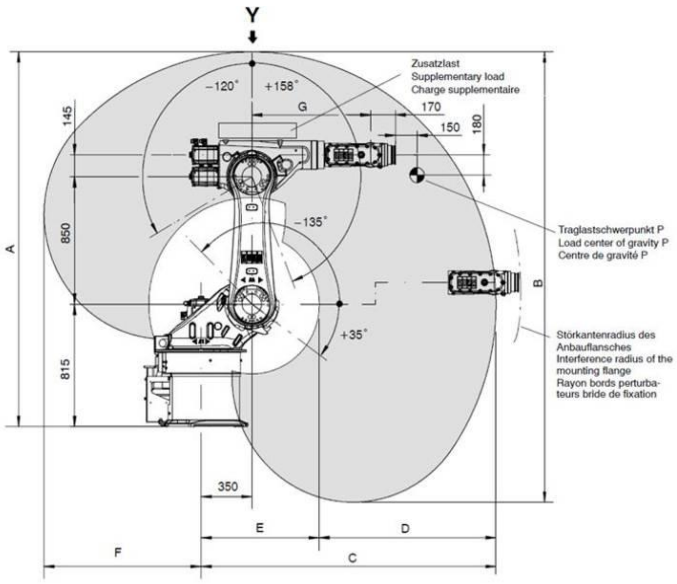


Figure 1-22 : *Espace de travail d'u robot 6R*

1.6.3 Répétabilité

C'est l'erreur maximale de positionnement (ou d'orientation) répété de l'OT en tout point de son espace de travail.

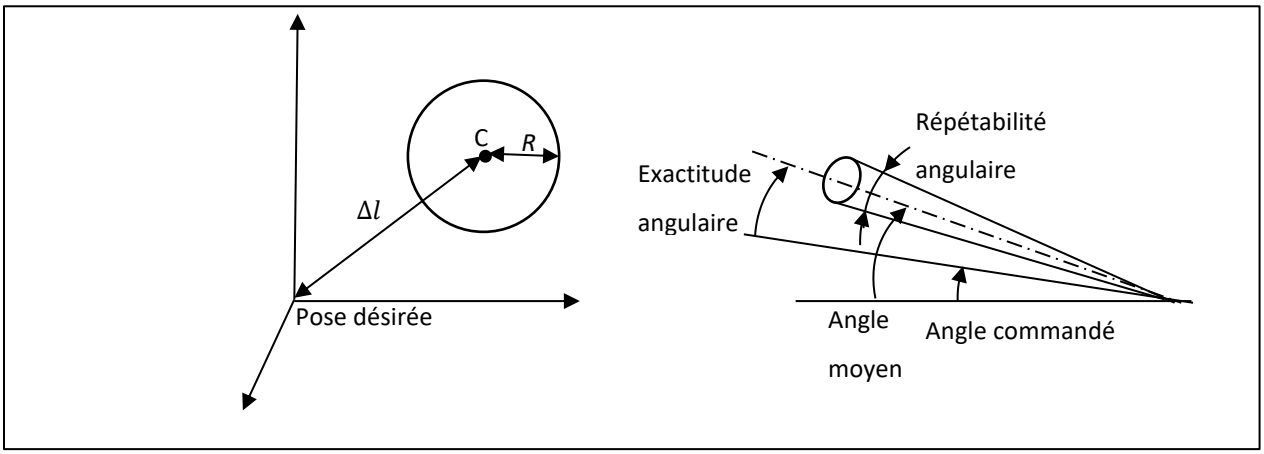


Figure 1-23 : *répétabilité de position et d'orientation*

1.6.4 Vitesses maximales

La vitesse maximale et l'accélération de chaque axe dans la position la plus défavorable.

1.6.5 Charge utile

C'est la charge maximale qui peut manipuler le robot sans dégrader la répétabilité et les performances dynamiques.

1.7 Motorisation et transmission de puissance pour les robots industriels :

Ce paragraphe étudie la motorisation et présente quelques techniques utilisées pour la transmission des puissances pour les robots industriels.

1.7.1 Motorisation



Figure 1-24 : *Servomoteur ACOPOS B&R automation*

Le moteur le plus utilisé pour la robotique industrielle est le servomoteur synchrone AC. Un servomoteur synchrone AC est un moteur électrique conçu pour fonctionner à une vitesse précise, synchronisée avec la fréquence de l'alimentation électrique. Il est couramment utilisé dans les applications nécessitant un contrôle précis du mouvement, telles que la robotique et les machines CNC.

Principe : Le rotor du servomoteur synchrone tourne à la même vitesse que le champ magnétique tournant créé par le courant alternatif dans le stator.

Avantage :

- Rendement élevé.
- Précision de positionnement.
- Vitesse de réponse rapide.
- Faible inertie.

<u>Motorisation des cobots :</u>

Pour les cobots, les moteurs sont placés directement sur l'articulation afin de :

- Compacité et intégration,
- Réduction de la transmission mécanique
- Mesure directe du couple
- Contrôle plus précis

Le choix d'intégrer le moteur dans l'articulation simplifie énormément la mesure de couple et le contrôle, ce qui est indispensable pour un cobot collaboratif.

La conséquence de ce choix est la disparition d'un poignet sphérique pour le robot car il est très difficile d'intégrer le moteur aux articulations de poignet et garantir des axes concourants comme pour l'Universal Robot de la Figure 1-25



Figure 1-25 : *Universal Robot UR5e*

1.7.2 Transmission de puissance mécanique :

Un réducteur mécanique est nécessaire pour avoir la vitesse maximale souhaitée au niveau de la transmission et supporter la charge dynamique et statique. Dans la robotique industrielle (bras manipulateurs, robots collaboratifs), **le choix du réducteur est critique**, car il conditionne la précision, la rigidité et la capacité à supporter de lourdes charges. Les types de réducteurs les plus utilisés sont :

1.7.2.1 Réducteur harmonique (Harmonic Drive)

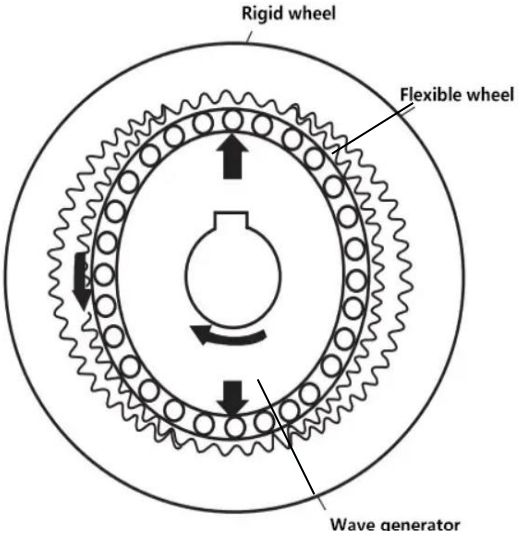


Figure 1-26 *: Réducteur harmonique*

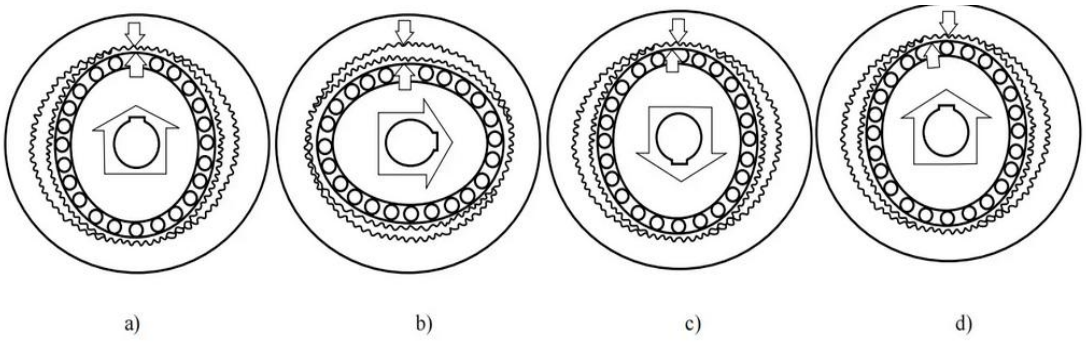


Figure 1-27 : *Fonctionnement du réducteur harmonique*



Figure 1-28 : *Organes du réducteur harmonique*

Il est composé de (Figure 1-26 et Figure 1-28)

- Générateur d'ondes (Wave Generator) : C'est un composant ovale entraîné, placé à l'entrée du réducteur.
- Bague flexible (Flexspline or flexible wheel) : Une coupelle élastique avec une denture extérieure. Le générateur d'ondes la déforme pour créer un mouvement elliptique.
- Bague fixe (Rigid wheel) : Une bague annulaire à denture intérieure, qui entoure les deux autres composants.

Le générateur d'ondes déforme le « Flexspline », le rendant elliptique. Le Flexspline entre alors en contact avec le Rigid wheel à denture intérieure (Figure 1-27). Comme le Flexspline a deux dents de moins que le Rigid wheel, sa rotation entraîne un mouvement relatif. Le Rigid wheel restant fixe, la rotation du générateur d'ondes provoque un mouvement qui est à la fois réduit en vitesse et inversé par rapport à l'entrée.

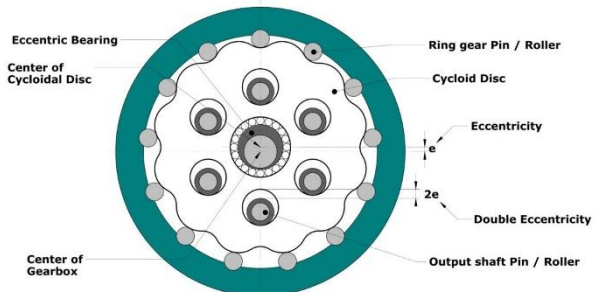
- **Avantages** :
  - Très **grand rapport de réduction** (jusqu'à 1 : 300) en un seul étage.
  - **Très grande précision** (jeu quasi-nul < 1').
  - Compact et léger.
- **Inconvénients** :

- Moins efficace à haute vitesse.
- Usure du flexspline à long terme.

- **Usage** :
  - Bras de robots collaboratifs (UR, KUKA iiwa).
  - Articulations des humanoïdes (Boston Dynamics, robots de recherche).
  - Axes nécessitant **haute précision et compacité**.

1.7.2.2 Réducteur cycloïdal (Cycloidal Drive)

Un réducteur cycloïdal se compose de quatre éléments (Figure 1-29):



- Un arbre excentrique qui transmet le mouvement d'entrée ;
- Un disque cycloïdal qui est monté sur l'arbre excentrique ;
- Un engrenage à disque cycloïde ;
- Un arbre de sortie.

Figure 1-29 : *Réducteur cycloïdal*

L'arbre est déplacé par des goupilles agissant sur les trous du disque cycloïde. La rotation de l'arbre excentrique entraîne la rotation du disque cycloïdal, qui s'engrène avec l'engrenage cycloïdal (Figure 1-30). La rotation du disque déclenche le mouvement des goupilles dans les trous du disque cycloïdal. Cet accouplement orifice-goupille permet à l'arbre de sortie de tourner. La vitesse de rotation de ce dernier est définie par le rapport de transmission i=z1/z1+z2, où z1 est le nombre de rouleaux sur le disque cycloïdal et z2 le nombre de lobes sur la couronne.

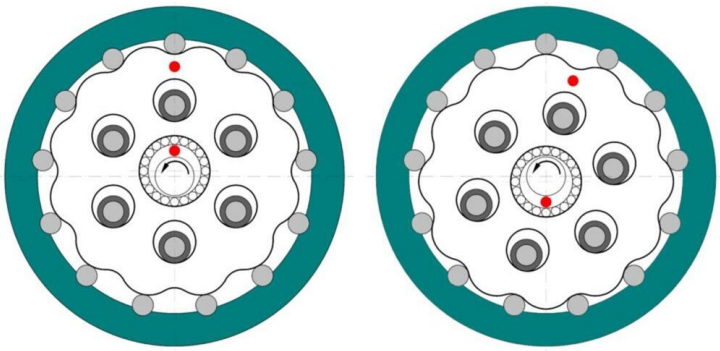


Figure 1-30 : *Fonctionnement du réducteur cycloïdal*

- **Avantages** :
  - Très **robuste et durable** (peu sensible aux chocs).
  - Peut supporter de **forts couples** (utilisé dans les gros robots industriels).
  - Jeu réduit (presque nul avec précharge).
- **Inconvénients** :
  - Plus volumineux que les harmoniques.
  - Vibrations possibles à grande vitesse.
- **Usage** :
  - Robots industriels lourds (KUKA, FANUC, YASKAWA, ABB).

- Axes où le couple est prioritaire (ex : base, épaules, axes 1–3 des robots 6 axes).

1.7.2.3 Réducteur planétaire

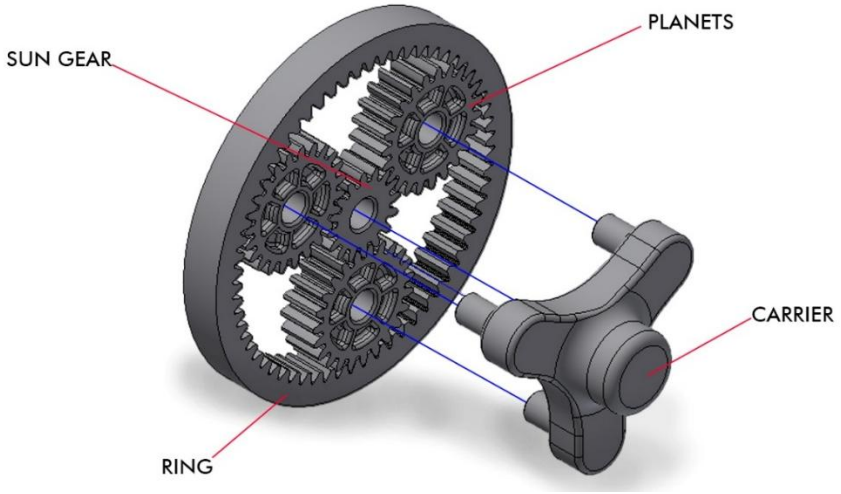


Figure 1-31 : *Réducteur planétaire*

- **Principe** : engrenage central (soleil) entraîne des satellites qui engrènent avec une couronne fixe.
- **Avantages** :
  - Bon compromis entre **précision, compacité et coût**.
  - Couple correct et efficacité élevée.
  - Plus économique que cycloïdal/harmonique.
- **Inconvénients** :
  - Jeu mécanique plus important (mais peut être réduit avec versions de précision).
- **Usage** :
  - Axes moins critiques en précision (effecteurs, axes secondaires, AGV/AMR).
  - Actionneurs modulaires de robots mobiles.

1.7.2.4 Comparaison

Type	Jeu backlash	Couple max	Précision	Taille	Coût	Usage typique
Harmonique	Quasi nul	Moyen	++++	Compact	+++	Articulations précises (poignet, humanoïdes)
Cycloïdal	Faible	Très élevé	+++	Plus gros	++	Axes lourds (épaules, base)
Planétaire	Moyen	Moyen à élevé	++	Compact	+	Robots mobiles, axes secondaires

1.7.2.5 Réducteur roue et vis sans fin

Les réducteurs roue et vis sans fin sont largement utilisés dans les articulations des robots industriels pour assurer un contrôle précis des mouvements et du positionnement. Leur capacité à fournir des rapports de réduction élevés dans un encombrement réduit les rend idéaux pour les

actionneurs où l'espace est limité. Leur fonction autobloquante permet aux robots de maintenir une position spécifique sans alimentation continue des moteurs, ce qui est crucial pour la stabilité lors de tâches de précision. Dans les robots dédiés à la manutention (Figure 1-32), ces réducteurs sont utilisés pour manipuler des charges lourdes avec précision, comme dans les bras robotisés pour l'assemblage ou le chargement/déchargement de matériaux. Leur couple élevé et leur capacité d'autoblocage en font un choix sûr pour les applications de levage, évitant tout mouvement non désiré en cas de panne de courant. Leur utilisation est moins fréquente dans les robots 6 axes modernes en raison de leur rendement énergétique réduit (souvent autour de 50-60%) et de leurs besoins de maintenance. Cependant, ils sont encore employés dans des applications spécifiques où leur autoblocage est un avantage de sécurité, comme pour maintenir une position sans alimentation.

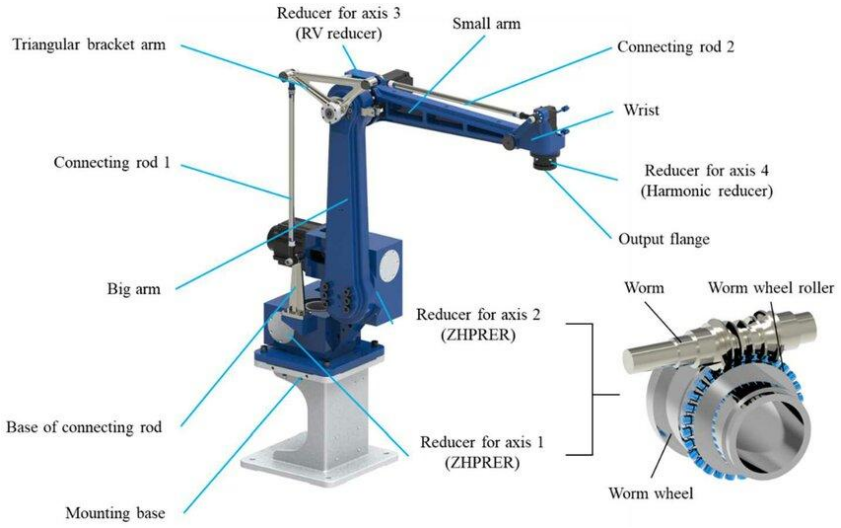


Figure 1-32 : *Robot de palettisation à réducteur à roue et vis sans fin (axes 1 et 2)*

1.7.3 Transmission de puissance pour le poignet sphérique :

Dans un robot industriel, le poignet sphérique doit transmettre la puissance mécanique provenant des moteurs (souvent situés à la base ou au niveau du bras) vers les articulations compactes du poignet.

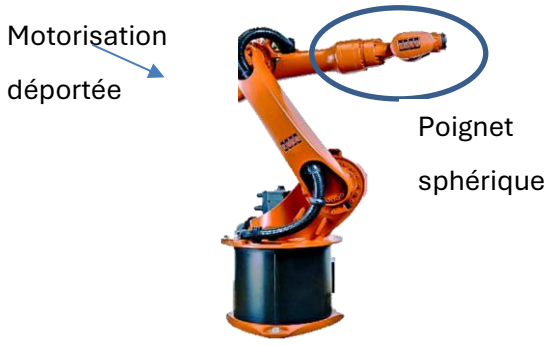


Figure 1-33 : *Poignet sphérique KUKA*

Les moteurs nécessaires pour la commande du poignet sont déportés sur le dernier bras du porteur. Un système de transmission de puissance mécanique particulier est nécessaire pour commander le poignet sphérique. Chaque constructeur possède sa propre technologie.

Les principaux solutions industrielles pour transmettre la puissance sont :

- Double joint de cardan(Figure 1-34) suivi par une courroie crantée (Figure 1-35)(KUKA).
- Engrenage coniques (Figure 1-36).

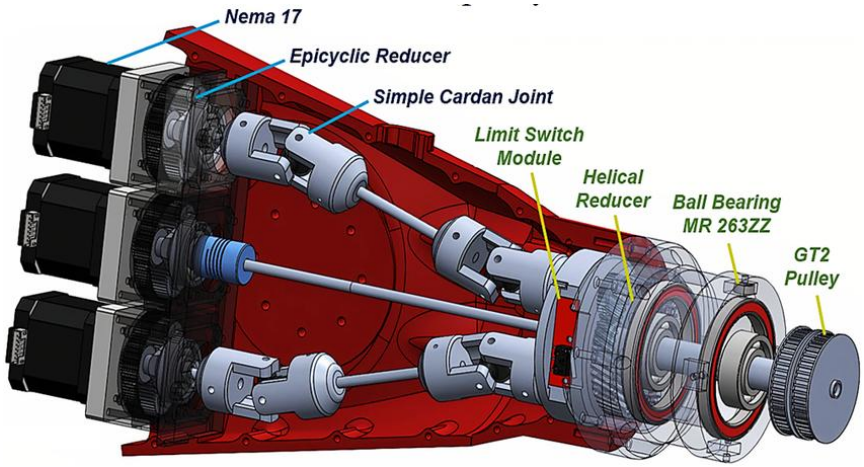


Figure 1-34 : *Transmission par double joint de cardan*



Figure 1-35 : *Transmission par courroie crantée*

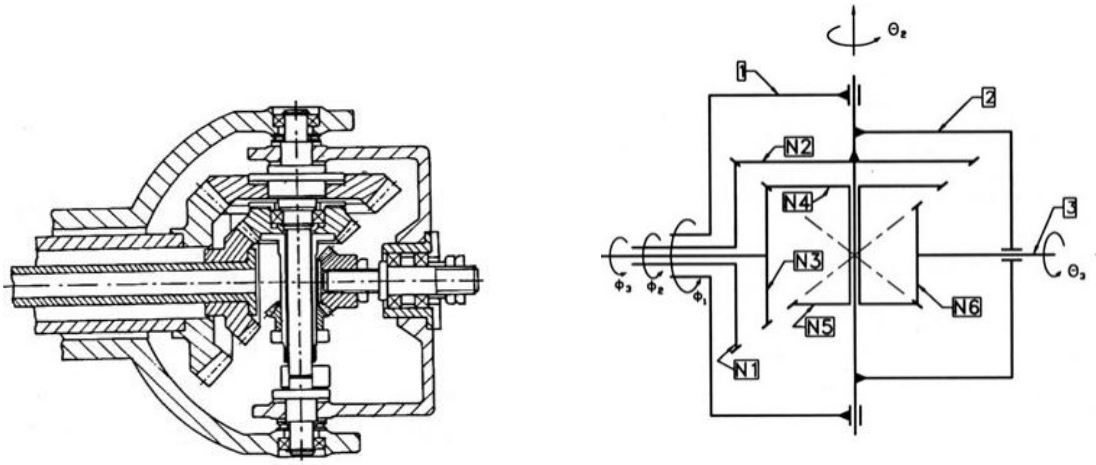


Figure 1-36 : *Transmission par engrenages coniques*

Géométrie des robots sériels

2.1 Introduction :

Programmer un robot revient à imposer à l'organe terminal (OT) une ou plusieurs positions dans l'espace. On dit que l'on spécifie la situation instantanée de l'OT dans l'espace opérationnel. Pour atteindre la position désirée (défini par $\boldsymbol{X}$) le robot prend une configuration donnée dans son espace articulaire (défini par $\boldsymbol{q}$).

Les modèles géométriques, direct (MGD) et inverse (MGI) expriment les coordonnées de la situation instantanée de l'OT $\boldsymbol{X}$ en fonction des paramètres articulaires $\boldsymbol{q}$ et inversement.

2.2 Représentations des transformations et mouvements rigides :

2.2.1 Définition de l'orientation d'un solide :

2.2.1.1 Matrice de rotation :

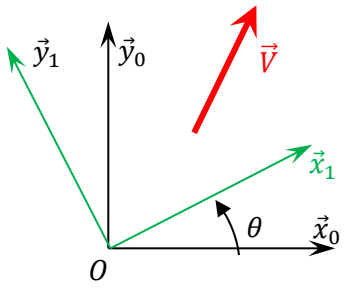


Figure 2-1 : *rotation d'un repère*

Soit deux repères orthonormés directs $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $R_1(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ (Figure 2-1)

On a $\vec{x}_1 = cos\theta\ \vec{x}_0 + sin\theta\ \vec{y}_0$

$\vec{y}_1 = -sin\theta\ \vec{x}_0 + cos\theta\ \vec{y}_0$

En écriture matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{y}_1\\ \vec{z}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta & 0\\ -sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{x}_0\\ \vec{y}_0\\ \vec{z}_0\end{bmatrix} = [M_p]\begin{bmatrix}\vec{x}_0\\ \vec{y}_0\\ \vec{z}_0\end{bmatrix}$$

La matrice M_p qui permet de passer de R_0 à R_1 s'appelle matrice de passage.

Soit le vecteur $\vec{V}$ défini dans R_1 par $\vec{V}_{R_1} = V_x\ \vec{x}_1 + V_y\ \vec{y}_1 + V_z\ \vec{z}_1$. Dans R_0 ce vecteur sera

$$\vec{V}_{R_0} = V_x\begin{bmatrix}cos\theta\\ sin\theta\\ 0\end{bmatrix} + V_y\begin{bmatrix}-sin\theta\\ cos\theta\\ 0\end{bmatrix} + V_z\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{V}_{R_0} = R_{(O\vec{z}_0,\theta)}\,\vec{V}_{R_1}$$

La matrice $R_{(O\vec{z}_0,\theta)}$est la matrice de rotation d'angle θ autour de $O\vec{z}_0$.

De la même façon :

La matrice $R_{(O\vec{x}_0,\theta)}$ de rotation d'angle θ autour de $O\vec{x}_0$ est $R_{(O\vec{x}_0,\theta)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

La matrice $R_{(O\vec{y}_0,\theta)}$ de rotation d'angle θ autour de $O\vec{y}_0$ est $R_{(O\vec{y}_0,\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$

2.2.1.2 Matrice de rotation composée :

Soit deux rotations successives, de φ autour de $\vec{z}_0$ puis de θ autour de $\vec{x}_1$ (Figure 2-2)

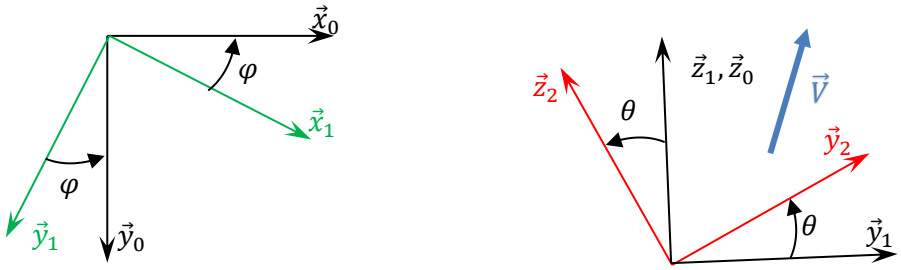


Figure 2-2 : 2 *rotations successives*

$$\vec{V}_{R_2} = V_x\vec{x}_2 + V_y\vec{y}_2 + V_z\vec{z}_2$$

$$\vec{V}_{R_1} = \left[{}^1R_2 \right]\vec{V}_{R_2}$$

$$\vec{V}_{R_0} = \left[{}^0R_1 \right]\vec{V}_{R_1} = \left[{}^0R_1 \right]\left[{}^1R_2 \right]\vec{V}_{R_2} = \left[{}^0R_2 \right]\vec{V}_{R_2}$$

${}^0R_2$ (*on omet les crochets pour simplifier l'écriture*) est la matrice de rotation du repère R_2 par rapport au repère R_0. Elle est égale à

$${}^0R_2 = R_{(O\vec{z}_0,\varphi)}.R_{(O\vec{x}_1,\theta)} = {}^0R_1.\ {}^1R_2 = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\varphi & -cos\theta\ sin\varphi & sin\theta\ sin\varphi \\ sin\varphi & cos\theta\ cos\varphi & -sin\theta\ cos\varphi \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Ceci nous permet de conclure que pour n rotations successives par rapport aux nouveaux axes, la matrice ${}^0R_n$ de rotation du repère terminal par rapport au repère fixe est égale à

$${}^0R_n = {}^0R_1.\ {}^1R_2 \ldots {}^{n-1}R_n$$

${}^0R_n$ est le produit des matrices de rotations de la première à la dernière.

2.2.1.3 Application aux angles d'Euler

Les angles d'Euler (Figure 2-3) décrivent une orientation quelconque d'un solide par 3 rotations successives :

- la première rotation est la précession ψ autour de $O\vec{z}_0$ (précession : mouvement de l'axe d'un corps en rotation sous l'effet d'un couple ⊥ à cet axe)
- la deuxième rotation est la nutation θ autour de $O\vec{x}_1$ (nutation : léger balancement de l'axe de rotation de la terre autour d'un axe moyen)
- la troisième rotation est la rotation propre φ autour de $O\vec{z}_2$

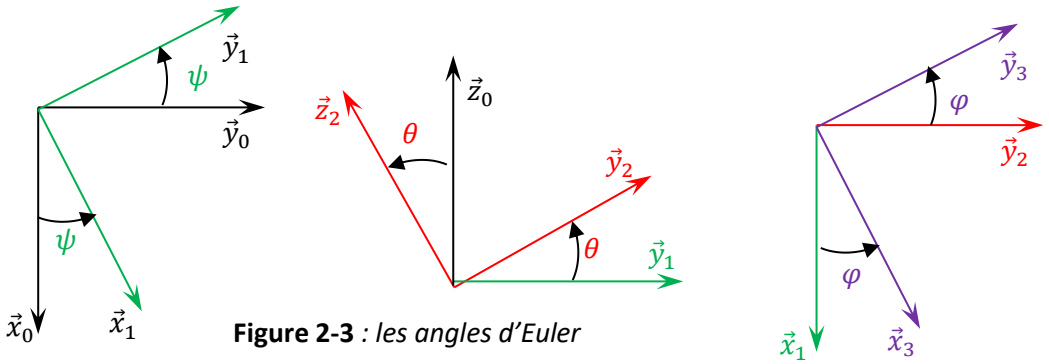


Figure 2-3 *: les angles d'Euler*

La matrice ${}^0R_3$ relative à ces trois rotations sera ${}^0R_3 = R_{(O\vec{z}_0,\psi)}.R_{(O\vec{x}_1,\theta)}.R_{(O\vec{z}_2,\varphi)} = {}^0R_1.\ {}^1R_2.\ {}^2R_3$

On obtient :

$$ {}^0R_3 = \begin{bmatrix} cos\psi\ cos\varphi - sin\psi\ cos\theta\ sin\varphi & -cos\psi\ sin\varphi - sin\psi\ cos\theta\ cos\varphi & sin\psi\ sin\theta \\ sin\psi\ cos\varphi + cos\psi\ cos\theta\ sin\varphi & -sin\psi\ sin\varphi + cos\psi\ cos\theta\ cos\varphi & -cos\psi\ sin\theta \\ sin\theta\ sin\varphi & sin\theta\ cos\varphi & cos\theta \end{bmatrix} $$

2.2.1.4 Détermination des angles et des axes de rotation à partir de la matrice de rotation

2.2.1.4.1 Détermination des angles d'Euler

Soit ${}^0R_n = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$. La matrice Q des 3 rotations d'Euler est

$$ Q = \begin{bmatrix} cos\psi\ cos\varphi - sin\psi\ cos\theta\ sin\varphi & -cos\psi\ sin\varphi - sin\psi\ cos\theta\ cos\varphi & sin\psi\ sin\theta \\ sin\psi\ cos\varphi + cos\psi\ cos\theta\ sin\varphi & -sin\psi\ sin\varphi + cos\psi\ cos\theta\ cos\varphi & -cos\psi\ sin\theta \\ sin\theta\ sin\varphi & sin\theta\ cos\varphi & cos\theta \end{bmatrix} $$

Nous pouvons déduire par identification que

- L'angle φ $\quad tan\varphi = \frac{r_{31}}{r_{32}}$

  On déduit $\varphi = \tan^{-1}\frac{r_{31}}{r_{32}}$, on obtient deux solutions φ_1 et $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$

- L'angle θ $\quad sin\theta = r_{31}sin\varphi + r_{32}cos\varphi$ et $\quad cos\theta = r_{33}$

  On déduit $\theta = atan2(r_{33}, r_{31}sin\varphi + r_{32}cos\varphi)$

- L'angle ψ

$$ cos\psi = r_{11}cos\varphi - r_{12}sin\varphi $$

$$sin\psi = r_{21}cos\varphi - r_{22}sin\varphi$$

On déduit $\psi = atan2(r_{11}cos\varphi - r_{12}sin\varphi\ , r_{21}cos\varphi - r_{22}sin\varphi)$

2.2.1.4.2 Détermination de l'angle et l'axe de rotation à partir de la matrice de rotation

Pour toute rotation dans l'espace, nous pouvons trouver une rotation équivalente d'un angle θ autour d'un axe $\vec{v}$ (Figure 2-4). Pour pouvoir trouver cette rotation équivalente, calculons en premier lieu sa matrice de rotation.

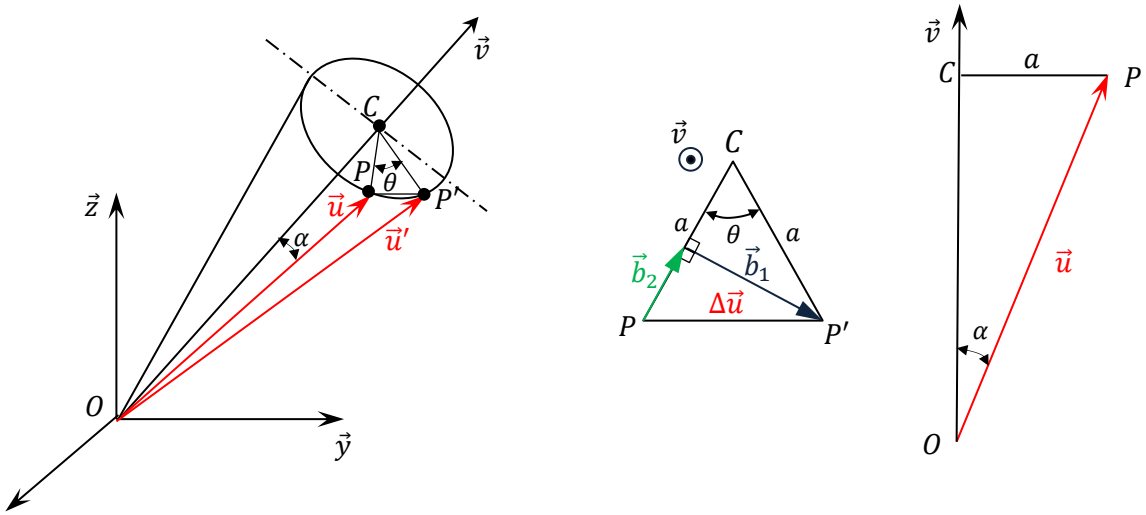


Figure 2-4 : *rotation d'un vecteur autour d'un autre*

Soit le vecteur $\vec{u}'$ le vecteur obtenu après rotation du vecteur $\vec{u}$, d'un angle θ autour du vecteur unitaire $\vec{v}$.

Nous pouvons écrire : $\vec{u}' = \vec{u} + \overrightarrow{PP'}$ =$\vec{u} + \Delta\vec{u}$

$\Delta\vec{u}$ peut s'écrire comme la somme des deux vecteurs : $\Delta\vec{u} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$

$\vec{b}_1$ est perpendiculaire au plan OCP et donc porté par $(\vec{v} \wedge \vec{u})$. Nous avons

$$b_1 = a\ sin\theta = (\|\vec{u}\| sin\alpha) sin\theta$$

Or $\|\vec{u}\| sin\alpha = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| sin\alpha = \|\vec{v} \wedge \vec{u}\| = a$, d'où

$$\vec{b}_1 = a\ sin\theta\ \frac{\vec{v} \wedge \vec{u}}{\|\vec{v} \wedge \vec{u}\|} = sin\theta\ (\vec{v} \wedge \vec{u})$$

D'autre part la norme du vecteur $\vec{b}_2$ est égale à

$$b_2 = a(1 - cos\theta)$$

Ce vecteur est à la fois perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{b}_1$, et donc porté par le vecteur unitaire

$$\frac{\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})}{a}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\vec{b}_2 = (1 - \ cos\theta)\big(\vec{v} \wedge \ (\vec{v} \wedge \vec{u})\big)$$

Revenons à l'expression de $\vec{u}'$, qui s'écrit

$$\vec{u}' = \vec{u} + \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \vec{u} + sin\theta \ (\vec{v} \wedge \vec{u}) + (1 - \ cos\theta)\big(\vec{v} \wedge \ (\vec{v} \wedge \vec{u})\big)$$

Cette dernière formule est appelée formule de Rodrigues, elle s'exprime sous forme matricielle par

$$\vec{u}' = [I]\vec{u} + sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \vec{u} + (1 - cos\theta) \begin{bmatrix} -v_3^2 - v_2^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & -v_3^2 - v_1^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & -v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix} \vec{u}$$

Ou encore

$$\vec{u}' = R_{(\vec{v},\theta)} \, \vec{u}$$

Avec $R_{(\vec{v},\theta)}$ égale à

$$R_{(\vec{v},\theta)} = \left([I] + sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - cos\theta) \begin{bmatrix} -v_3^2 - v_2^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & -v_3^2 - v_1^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & -v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix} \right)$$

Voyons comment trouver maintenant le vecteur $\vec{v}$ et l'angle θ à partir de la matrice $[A]$.

Soit $[A] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

La trace de A est $tr[A] = r_{11} + r_{22} + r_{33}$

Dans la formule de Rodrigues nous avons

$$tr[I] = 3$$

$$tr \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$tr \begin{bmatrix} -v_3^2 - v_2^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & -v_3^2 - v_1^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & -v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix} = -2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = -2$$

Ce qui signifie que

$$tr \ [A] = 3 - 2(1 - cos\theta) = 1 + 2cos\theta$$

Et par suite

$$\theta = \pm arc\cos\frac{tr[A] - 1}{2}$$

D'où le vecteur $\vec{v}$ et l'angle θ sont définis seulement à un signe près. Déterminons maintenant le vecteur $\vec{v}$.

Toute matrice $[A]$ peut se transformer en une partie symétrique $[A^{sym}]$ et une partie antisymétrique $\left[A^{anti}\right]$ tel que

$$[A] = [A^{sym}] + \left[A^{anti}\right]$$

Avec

$$[A^{sym}] = \frac{1}{2}([A] + [A]^T)$$

$$[A^{anti}] = \frac{1}{2}([A] - [A]^T)$$

Les matrices $[A]$ et $[A]^{-1} = [A]^T$ correspondantes aux rotations $R_{(\vec{v},\theta)}$ et $R_{(-\vec{v},-\theta)}$ sont transposées. Par conséquent, elles ont les mêmes parties symétriques car

$$[A^{sym}] = \frac{1}{2}([A] + [A]^T) = \frac{1}{2}(([A]^T)^T + [A]^T) = \frac{1}{2}(([A]^{-1})^T + [A]^{-1})$$

En contrepartie, $R_{(\vec{v},\theta)}$ et $R_{(-\vec{v},-\theta)}$ ont des matrices antisymétriques opposées car

$$\frac{1}{2}([A] - [A]^T) = \frac{1}{2}(([A]^T)^T - [A]^T) = \frac{1}{2}(([A]^{-1})^T - [A]^{-1}) = -\frac{1}{2}([A]^{-1} - ([A]^{-1})^T)$$

Donc pour déterminer le signe du vecteur $\vec{v}$ avec l'angle θ fixé ou vice-versa, on peut regarder la partie antisymétrique de la matrice de rotation.

D'après la relation de Rodrigues nous pouvons constater que la partie antisymétrique de $R_{(\vec{v},\theta)}$ est bien $sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$ car les deux autres parties sont symétriques. Nous pouvons écrire que

$$\frac{1}{2}([A] - [A]^T) = sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons ainsi déduire par identification que

$$sin\theta \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Finalement

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Exemple :

Soit la matrice $[A] = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$

On calcule θ : $\theta = \pm arc\ cos\frac{tr[A]-1}{2} = \pm arc\cos 0 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$

$$[A^{anti}] = \frac{1}{2}([A] - [A]^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous choisissons $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow sin\theta = -1$, le vecteur $\vec{v}$ correspondant sera $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$

2.3 Déplacement rigide, Matrice homogène :

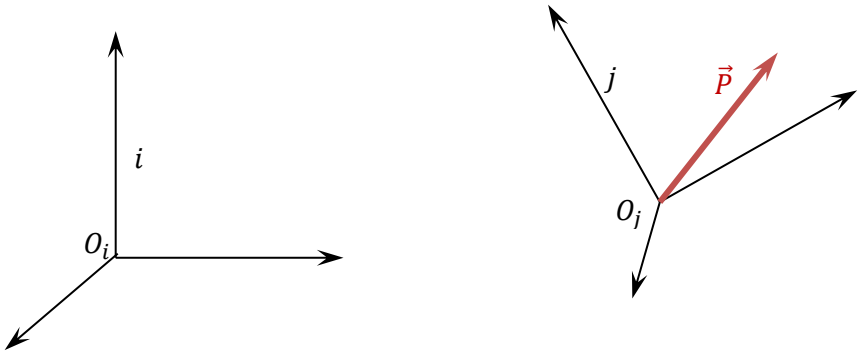


Figure 2-5 : *déplacement rigide d'un vecteur*

Les coordonnées du vecteur $\vec{P}$ dans le repère fixe i sont définies par $\vec{P}_i = \overrightarrow{O_iO_j} + {}^iR_j.\vec{P}_j$ ou encore

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}$$

Cette opération d'addition et de multiplication peut être rassemblée en une seule multiplication matricielle comme suit

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & a \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & b \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice de dimension 4 est dite matrice homogène. Elle est notée ${}^iT_j$ et est composée de 4 parties ${}^iT_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & \overrightarrow{O_iO_j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Comme exemples nous pouvons noter les deux cas particuliers suivants :

- Cas de rotation simple ${}^iT_j = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Cas de translation simple ${}^{i}T_{j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.4 Composition des transformations homogènes :

Soit les trois transformations homogènes de la Figure 2-6

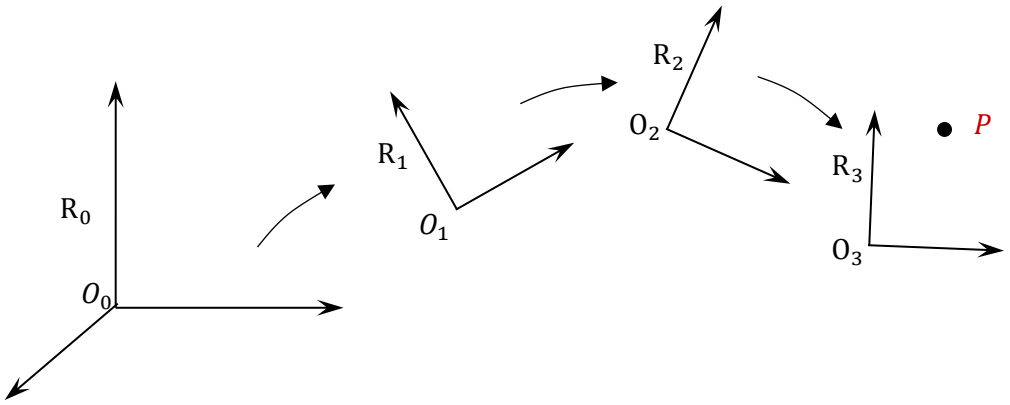


Figure 2-6 : *3 transformations homogènes successives*

On note $\overrightarrow{\boldsymbol{O_i P}}_{\overline{R_i}} = \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}}$

$$\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O_2 O_3}} + {}^{2}R_3 \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^{2}T_3 \right] \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{3}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{1}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O_1 O_2}} + {}^{1}R_2 \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{2}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{1}} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^{1}T_2 \right] \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^{1}T_2 \right] \left[{}^{2}T_3 \right] \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{3}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{O_0 O_1}} + {}^{0}R_1 \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{1}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{0}} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^{0}T_1 \right] \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{1}} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^{0}T_1 \right] \left[{}^{1}T_2 \right] \left[{}^{2}T_3 \right] \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{3}} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^{0}T_3 \right] \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{3}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice homogène de n transformations successives est le produit des matrices homogènes en commençant par la première jusqu'à la $n^{ième}$: $\left[{}^{0}T_n \right] = \left[{}^{0}T_1 \right] \left[{}^{1}T_2 \right] \ldots \left[{}^{n-1}T_n \right]$

2.4.1 Exemples d'application :

Exemple 1 : Trouver La matrice homogène relative aux transformations : $R_{(O\vec{z}_0,\alpha)}.R_{(O\vec{x}_1,\varphi)}.Tr_{(a,b,c)}$

$${}^{0}T_3 = \left[{}^{0}T_1 \right] \left[{}^{1}T_2 \right] \left[{}^{2}T_3 \right] = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ {}^{0}T_{3} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha\ cos\varphi & sin\alpha\ sin\varphi & a\ cos\alpha - b\ sin\alpha\ cos\varphi + c\ sin\alpha\ sin\varphi \\ sin\alpha & cos\alpha\ cos\varphi & -cos\alpha\ sin\varphi & a\ sin\alpha - b\ cos\alpha\ cos\varphi - c\ cos\alpha\ sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi & b\ sin\varphi + c\ cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Exemple 2 : Trouver La matrice homogène relative aux transformations suivantes réalisées dans le repère fixe $Tr_{(r,0,0)}R_{(O\vec{z}_0,\alpha)}.Tr_{(0,0,d)}$

$$ {}^{0}T_{3} = [\,{}^{0}T_{1}][\,{}^{1}T_{2}][\,{}^{2}T_{3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & r\ cos\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & r\ sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Exemple3 : Trouver La matrice homogène relative aux transformations $R_{(O\vec{z}_0,\alpha)}.Tr_{(r,0,0)}$

$$ {}^{0}T_{2} = [\,{}^{0}T_{1}][\,{}^{1}T_{2}] = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & r\ cos\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & r\ sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Exemple 4 : Trouver La matrice homogène relative aux transformations $Tr_{(r,0,0)}.R_{(O\vec{z}_0,\alpha)}$.

$$ {}^{0}T_{2} = [\,{}^{0}T_{1}][\,{}^{1}T_{2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 & r \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

2.5 Paramétrage de Denavit-Hartenberg :

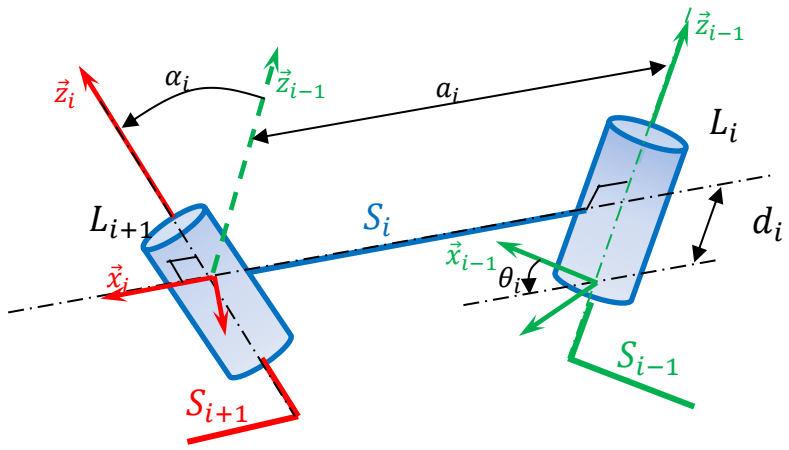


Figure 2-7 : *Paramétrage de Denavit-Hartenberg*

Le paramétrage de Denavit- Hartenberg (D-H) décrit les transformations rigides pour l'obtention du repère R_i lié au solide S_i à partir du repère R_{i-1} lié au solide S_{i-1}.

2.5.1 Définition des axes

- L'axe $\vec{z}_i$ est l'axe de la liaison L_{i+1}
- L'axe $\vec{x}_i$ est l'axe normale à $\vec{z}_{i-1}$ et orienté de $\vec{z}_{i-1}$ vers $\vec{z}_i$
- L'origine de R_i est le point d'intersection de l'axe $\vec{z}_i$ avec l'axe $\vec{x}_i$
- $\vec{y}_i = \vec{z}_i \wedge \vec{x}_i$

2.5.2 Paramètres de D-H

Ils décrivent la transformation rigide de R_{i-1} vers R_i. Ces paramètres sont :

- Rotation $R_{(\vec{z}_{i-1},\theta_i)}$: θ_i angle entre $\vec{x}_{i-1}$ et $\vec{x}_i$ autour de $\vec{z}_{i-1}$. C'est l'angle entre deux éléments consécutifs de la chaîne ouverte (**Figure 2-8**)
- Translation $Tr_{(\vec{z}_{i-1},d_i)}$
- Translation $Tr_{(\vec{x}_i,a_i)}$: a est la distance entre les 2 axes de liaisons L_i et L_{i+1} (Figure 2-9)
- Rotation $R_{(\vec{x}_i,\alpha_i)}$

θ_i, d_i, a_i et α_i sont les paramètres de D-H. Parmi ces 4 paramètres, il y a 3 fixes et 1 variable :

- pour une liaison rotoïde θ_i variable ;
- pour une liaison prismatique d_i variable.

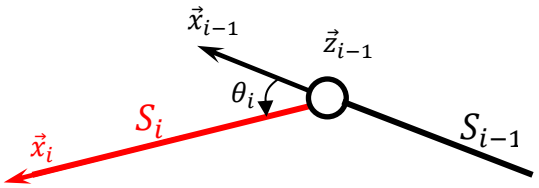


Figure 2-8 *: angle* $\boldsymbol{\theta_i}$

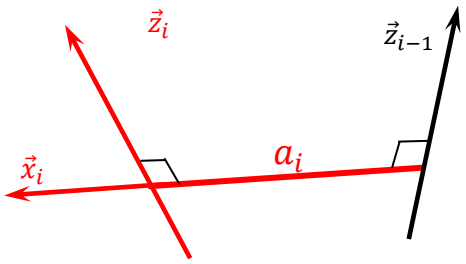


Figure 2-9 *: distance* $\boldsymbol{a_i}$

La matrice homogène représentant la transformation rigide entre R_{i-1} et R_i est :

$$ {}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i\, cos\alpha_i & sin\theta_i\, sin\alpha_i & a_i\, cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i\, cos\alpha_i & -cos\theta_i\, sin\alpha_i & a_i\, sin\theta_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

2.5.3 Cas particuliers

$\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$ sont parallèles ($\alpha_i = 0\ ou\ \pi$)

Il existe une infinité de normales communes.

Pour simplifier, on place O_i tel que $d_i = 0$

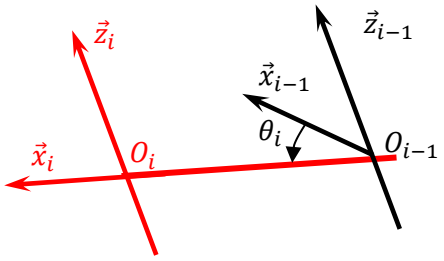


Figure 2-10 : cas particulier $\vec{z}_i \,//\, \vec{z}_{i-1}$

$\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$ sont concourants

O_i est à l'intersection des axes $\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$ et $a_i = 0$

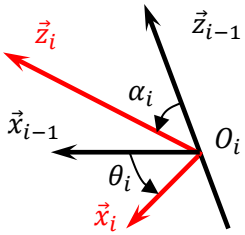


Figure 2-11 : cas particulier $\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$ concourants

2.6 Modèle géométrique direct des robots sériels

Le Modèle Géométrique Direct (MGD)est l'ensemble des relations qui expriment la pose de l'OT dans l'espace opérationnel en fonction des paramètres articulaires : $\mathbf{X} = f(\mathbf{q})$

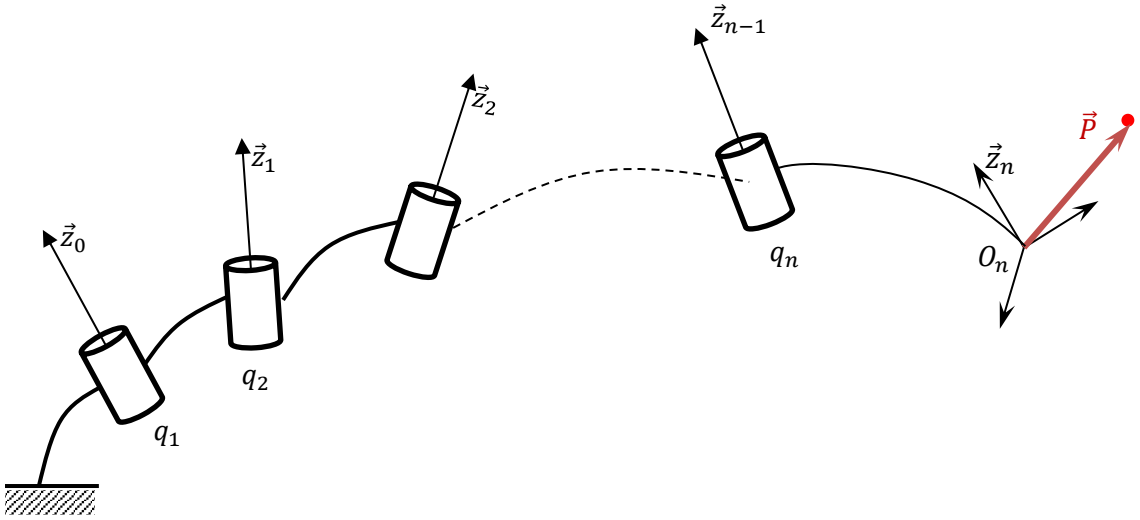


Figure 2-12 : *Paramétrage d'un robot sériel*

Le MGD est obtenu en procédant à une série de transformations rigides en passant successivement par tous les éléments intermédiaires du robot. Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{O_nP}} = \vec{\boldsymbol{P}}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{O_0P}} = \vec{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ alors

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^0T_n \right] \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix} = \left[{}^0T_1 \right]\left[{}^1T_2 \right] \dots \left[{}^{n-1}T_n \right] \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices $\left[{}^{i-1}T_i \right]$ sont obtenues en utilisant le paramétrage de DH.

2.6.1 Exemple 1 :

Soit le manipulateur PRR ci-contre.

Nous allons calculer la matrice homogène de l'organe terminal par rapport à la base. Nous allons par la suite écrire le MGD de ce manipulateur.

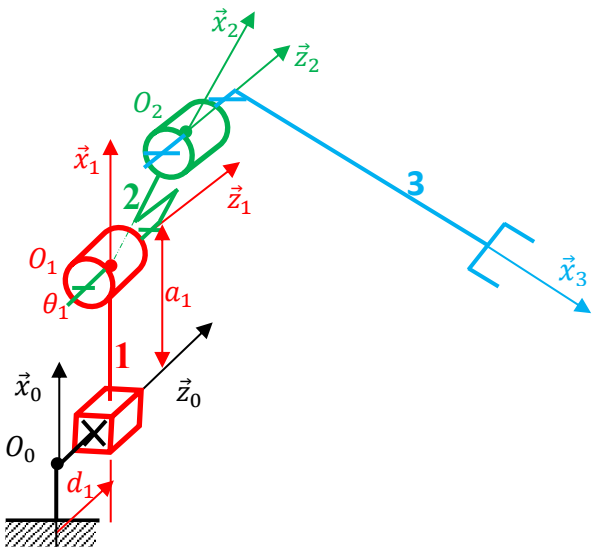


Figure 2-13 : Manipulateur PRR

	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	d_1	a_1	0
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0

$$\left[{}^0T_3 \right] = \left[{}^0T_1 \right]\left[{}^1T_2 \right]\left[{}^2T_3 \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 & a_2cos\theta_2 \\ sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 & a_2sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta_3 & -sin\theta_3 & 0 & a_3cos\theta_3 \\ sin\theta_3 & cos\theta_3 & 0 & a_3sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\theta_2+\theta_3) & -sin(\theta_2+\theta_3) & 0 & a_3cos(\theta_2+\theta_3)+a_2cos\theta_2+a_1 \\ sin(\theta_2+\theta_3) & cos(\theta_2+\theta_3) & 0 & a_3sin(\theta_2+\theta_3)+a_2sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

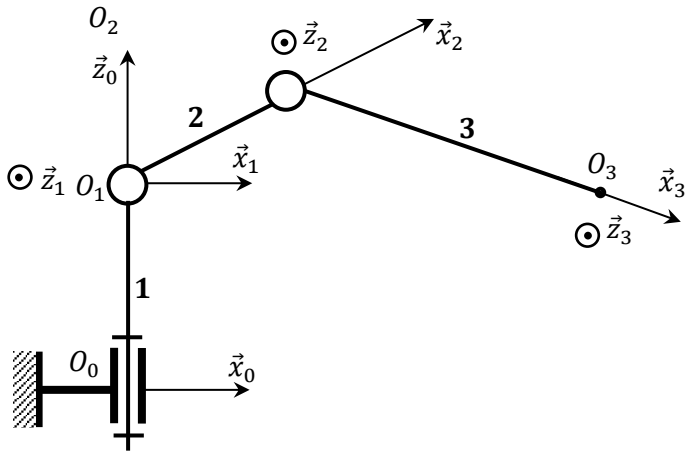
La position de l'OT est définie par $\begin{bmatrix}\overrightarrow{O_0O_3}\\1\end{bmatrix} = \left[{}^0T_3\right].\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_3cos(\theta_2+\theta_3)+a_2cos\theta_2+a_1\\a_3sin(\theta_2+\theta_3)+a_2sin\theta_2\\d_1\\1\end{bmatrix}$

L'orientation de l'OT est définie par $\vec{\gamma}_3 = \theta_2\,\vec{z}_1 + \theta_3\,\vec{z}_2 = (\theta_2+\theta_3)\,\vec{z}_0$

Finalement on obtient le MGD :

$$\begin{bmatrix}\overrightarrow{O_0O_3}\\\vec{\gamma}_3\end{bmatrix} = = \begin{bmatrix}a_3cos(\theta_2+\theta_3)+a_2cos\theta_2+a_1\\a_3sin(\theta_2+\theta_3)+a_2sin\theta_2\\d_1\\0\\0\\(\theta_2+\theta_3)\end{bmatrix}$$

2.6.2 Exemple 2 :



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_2	d_1	0	$\frac{\pi}{2}$
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0

$$\left[{}^0T_3\right] = \left[{}^0T_1\right]\left[{}^1T_2\right]\left[{}^2T_3\right] = \begin{bmatrix}C_1&0&S_1&0\\S_1&0&-C_1&0\\0&1&0&d_1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_2&-S_2&0&a_2C_2\\S_2&C_2&0&a_2S_2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_3&-S_3&0&a_3C_3\\S_3&C_3&0&a_3\theta_3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}C_1C_{23}&-C_1S_{23}&S_1&a_3S_1C_{23}+a_2C_1C_2\\S_1C_{23}&-S_1S_{23}&-C_1&a_3S_1C_{23}+a_2S_1C_2\\S_{23}&C_{23}&0&a_3S_{23}+a_2C_2+d_1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{O_0O_3} \\ \vec{\gamma}_3 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} a_3S_1C_{23} + a_2C_1C_2 \\ a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2 \\ a_3S_{23} + a_2C_2 + d_1 \\ (\theta_2 + \theta_3)S_1 \\ -(\theta_2 + \theta_3)C_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Remarque :

Le MGD peut être exprimé par la forme précédente ou par la matrice homogène ${}^0T_n$. Dans ce cas la rotation de l'OT est exprimée par ${}^0R_n$. Sinon, nous pouvons toujours s'adapter à la forme de l'orientation opérationnelle qui convient à l'utilisateur. Par exemple, si l'orientation opérationnelle est définie par les angles d'Euler, nous pouvons les exprimer en fonction des variables articulaires en procédant par identification des éléments des deux matrices ${}^0R_n$ et celle des angles d'Euler (voir le paragraphe 2.2.1.4.1 pour la détermination des angles d'Euler à partir de la matrice de rotation).

2.7 Modèle géométrique inverse MGI

Le MGI permet d'exprimer les variables articulaires en fonction des variables opérationnelles :

$$\mathbf{q} = f(\mathbf{X})$$

2.7.1 Méthode de Paul

Considérons un robot sériel à n degrés de liberté dont la matrice de passage homogène a pour expression

$$\left[{}^0T_n \right] = \left[{}^0T_1 \right]\left[{}^1T_2 \right] \dots \left[{}^{n-1}T_n \right]$$

Soit la pose de l'OT, définie dans l'espace opérationnel par la matrice $[A_0] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Le problème du MGI est de trouver les variables articulaires en fonction des variables opérationnelles à partir de la relation

$$[A_0] = \left[{}^0T_n \right]$$

Paul (1981) a proposé de pré-multiplier successivement les 2 membres de l'équation précédente par $\left[{}^jT_{j-1} \right]$ pour j variant de 1 à $n-1$. Nous aurons les étapes suivantes :

1ère étape : On multiplie de part et d'autre par $\left[{}^1T_0 \right]$ pour obtenir $q_1 = f(q_2, q_3 \dots q_n)$

$$\left[{}^1T_0 \right][A_0] = [A_1] = \left[{}^1T_0 \right]\left[{}^0T_1 \right]\left[{}^1T_2 \right] \dots \left[{}^{n-1}T_n \right]$$

On obtient

$$[A_1] = \left[{}^1T_2 \right] \dots \left[{}^{n-1}T_n \right]$$

Le membre à gauche est fonction de q_1 seulement alors que celui de droite est fonction de $q_2, q_3 \dots q_n$. q_1 est obtenu par identification entre les éléments des deux matrices.

2ème étape : On multiplie de part et d'autre la relation obtenue dans la première étape par $\left[{}^{2}T_{1} \right]$, on obtient

$$\left[{}^{2}T_{1} \right][A_1] = [A_2] = \left[{}^{2}T_{3} \right] \dots \left[{}^{n-1}T_{n} \right]$$

Nous aurons $q_2 = f(q_3 \dots q_n)$. On procède de la même façon que pour q_2.

Jème étape : On multiplie de part et d'autre la relation obtenue dans l'étape *j-1* par $\left[{}^{j}T_{j-1} \right]$, on obtient

$$\left[{}^{j}T_{j-1} \right]\left[A_{j-1}\right] = \left[A_j\right] = \left[{}^{j}T_{j+1} \right] \dots \left[{}^{n-1}T_{n} \right]$$

Nous aurons $q_j = f\left(q_{j+1} \dots q_n\right)$.

On poursuit jusqu'à la $(n-1)^{ième}$ étape où l'on obtient

$$\left[{}^{n-1}T_{n-2} \right][A_{n-2}] = [A_{n-1}] = \left[{}^{n-1}T_{n} \right]$$

De même par identification on détermine q_{n-1} et q_n.

En appliquant cette méthode pour un robot à 6 ddl on obtient :

$$[A_0] = \left[{}^{0}T_{1} \right]\left[{}^{1}T_{2} \right]\left[{}^{2}T_{3} \right]\left[{}^{3}T_{4} \right]\left[{}^{4}T_{5} \right]\left[{}^{5}T_{6} \right]$$

$$[A_1] = \left[{}^{1}T_{0} \right][A_0] = \left[{}^{1}T_{2} \right]\left[{}^{2}T_{3} \right]\left[{}^{3}T_{4} \right]\left[{}^{4}T_{5} \right]\left[{}^{5}T_{6} \right] \rightarrow q_1$$

$$[A_2] = \left[{}^{2}T_{1} \right][A_1] = \left[{}^{2}T_{3} \right]\left[{}^{3}T_{4} \right]\left[{}^{4}T_{5} \right]\left[{}^{5}T_{6} \right] \rightarrow q_2$$

$$[A_3] = \left[{}^{3}T_{2} \right][A_2] = \left[{}^{3}T_{4} \right]\left[{}^{4}T_{5} \right]\left[{}^{5}T_{6} \right] \rightarrow q_3$$

$$[A_4] = \left[{}^{4}T_{3} \right][A_3] = \left[{}^{4}T_{5} \right]\left[{}^{5}T_{6} \right] \rightarrow q_4$$

$$[A_5] = \left[{}^{5}T_{4} \right][A_4] = \left[{}^{5}T_{6} \right] \rightarrow q_5 \text{ et } q_6$$

2.7.2 Application au robot RRR de la paragraphe 2.6.2

Soit la pose demandée définie par la matrice $[A_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.707 \\ 1 & 0 & 0 & 2.707 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Soit les dimensions $a_3 = a_2 = d_1 = 1\ m$

Nous avons à assurer

$$[A_0] = \left[{}^{0}T_{3} \right]$$

La première étape est de multiplier l'égalité précédente de part et d'autre par $\left[{}^{1}T_{0} \right]$ avec

$$\left[{}^{0}T_{1} \right] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_1] = \left[{}^{1}T_{0} \right][A_0] = \left[{}^{2}T_{3} \right]$$

$$[A_1] = [\,{}^1T_0][A_0] = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.707 \\ 1 & 0 & 0 & 2.707 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -S_1 & C_1 & 0.707\,S_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.707 \\ 0 & C_1 & S_1 & -0.707C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\,{}^2T_3] = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & C_{23}+C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_{23+}S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient l'égalité matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & -S_1 & C_1 & 0.707\,S_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.707 \\ 0 & C_1 & S_1 & -0.707C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{23} & -S_{23} & 0 & C_{23}+C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & S_{23+}S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'égalité des éléments (3,2) et des éléments (3,3) nous donnent $C_1 = 0$ et $S_1 = 1$ ce qui correspond à $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

L'égalité des éléments (1,4) et des éléments (2,4) nous donnent

$$C_{23}+C_2 = 0.707\,S_1 = 0.707$$

$$S_{23+}S_2 = 1.707$$

Mais d'après l'égalité des éléments (2,1) et des éléments (1,1) on a $S_{23} = 1$ et $C_{23} = 0$, on en déduit que

$$\theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant ce résultat nous trouvons $C_2 = 0.707$ et $S_2 = 0.707$, ce qui correspond à $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ et par suite $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$.

2.7.3 Cas d'un robot à 6 dll comportant un poignet sphérique :

Lorsque le poignet du robot est sphérique, les origines O_4, O_5 et O_6 sont confondus. Dans ce cas c'est le porteur qui pilote la position de l'OT

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{O_0O_6} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_0O_5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{O_0O_4} \\ 1 \end{bmatrix} = [\,{}^0T_1][\,{}^1T_2][\,{}^2T_3][\,{}^3T_4]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cette dernière relation nous donne $\overrightarrow{O_0O_6} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f(q_1, q_2, q_3)$ dans le repère de base R_0.les coordonnées x, y, z étant données, on applique alors le processus itératif de Paul pour déterminer les 3 premiers variables articulaires.

(COIFFET, 2008) (SÉGUY, 2002)

$$[\,{}^1T_0]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\,{}^1T_2][\,{}^2T_3][\,{}^3T_4]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow q_1 = f(q_2, q_3)$$

$$\left[{}^{2}T_{1}\right]\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\\1\end{bmatrix}=\left[{}^{2}T_{3}\right]\left[{}^{3}T_{4}\right]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\rightarrow q_2$$

$$\left[{}^{3}T_{2}\right]\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\y_3\\z_3\\1\end{bmatrix}=\left[{}^{3}T_{4}\right]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\rightarrow q_3$$

L'orientation de l'OT est obtenue par

$$\left[{}^{0}R_{6}\right]=\left[{}^{0}R_{3}\right]\left[{}^{3}R_{4}\right]\left[{}^{4}R_{5}\right]\left[{}^{5}R_{6}\right]=[R]=\begin{bmatrix}s_x & n_x & a_x\\ s_y & n_y & a_y\\ s_z & n_z & a_z\end{bmatrix}$$

Où la matrice $[R]$ est donnée.

En multipliant de part et d'autre par $\left[{}^{3}R_{0}\right]$ on obtient

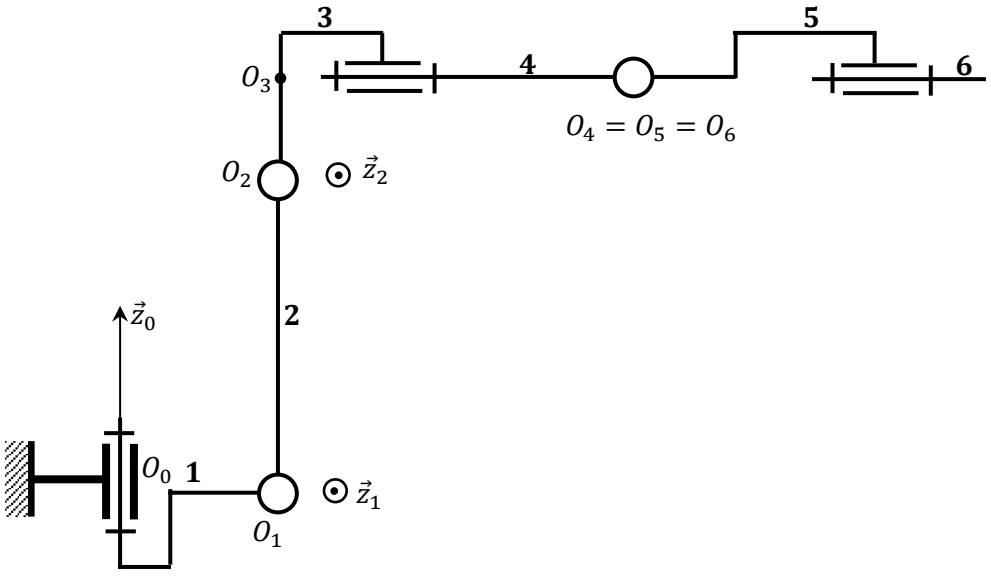
$$\left[{}^{3}R_{0}\right][R]=[R_3]=\left[{}^{3}R_{4}\right]\left[{}^{4}R_{5}\right]\left[{}^{5}R_{6}\right]$$

On applique alors la méthode de Paul

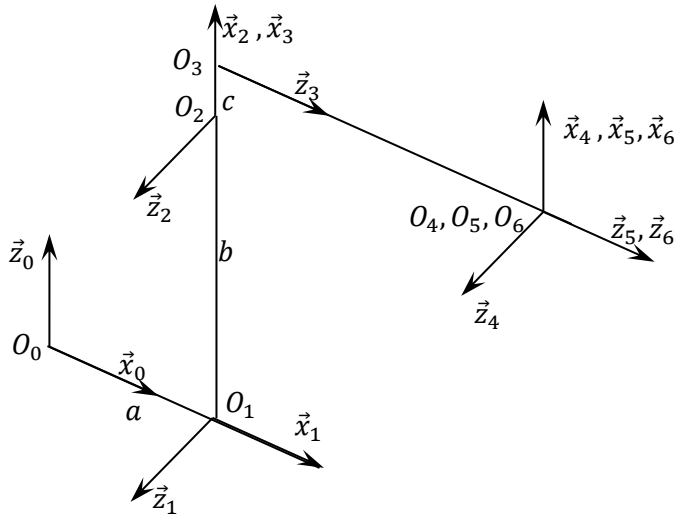
$$\left[{}^{4}R_{3}\right][R_3]=[R_4]=\left[{}^{4}R_{5}\right]\left[{}^{5}R_{6}\right]\rightarrow q_4$$

$$\left[{}^{5}R_{4}\right][R_4]=\left[{}^{5}R_{6}\right]\rightarrow q_5 \text{ et } q_6$$

2.7.4 Application : Robot Fanuc S430-6R-Poignet sphérique



	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	a	$\frac{\pi}{2}$
2	$q_2+\frac{\pi}{2}$	0	b	0



3	q_3	0	c	$\frac{\pi}{2}$
4	q_4	d	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	q_5	0	0	$\frac{\pi}{2}$
6	q_6	0	0	0

$$[{}^0T_1] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a.c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a.s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [{}^1T_2] = \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -b.s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & b.c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [{}^2T_3] = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & c.c_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 & c.s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[{}^3T_4] = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [{}^4T_5] = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [{}^5T_6] = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le MGD est défini par

$$[A_0] = [{}^0T_6]$$

Où $[A_0]$ est la matrice homogène de l'OT du robot dans l'espace opérationnel. Elle est définie par

$$[A_0] = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Plus explicitement le MGD s'écrit :

$s_x = c_1[s_6 s_4 s_{23} - c_6(s_5 c_{23} + c_5 c_4 s_{23})] + s_1(s_6 c_4 + c_6 c_5 s_4)$

$s_y = s_1[s_6 s_4 s_{23} - c_6(s_5 c_{23} + c_5 c_4 s_{23})] + c_1(s_6 c_4 + c_6 c_5 s_4)$

$s_z = c_6(c_5 c_4 c_{23} - s_5 s_{23}) - s_6 s_4 c_{23}$

$n_x = c_1[c_6 s_4 s_{23} + s_6(c_4 s_1 + s_4 c_1 s_{23})] - s_1(s_6 c_5 s_4 - c_6 c_4)$

$n_y = s_1[c_6 s_4 s_{23} + s_6(s_5 c_{23} + c_5 c_4 s_{23})] + c(s_6 c_5 s_4 - c_6 c_4)$

$n_z = -s_6(c_5 c_4 c_{23} - s_5 s_{23}) - c_6 s_4 c_{23}$

$a_x = c_1(c_5 c_{23} - s_5 c_4 s_{23}) + s_5 s_4 s_1$

$a_y = s(c_5 c_{23} - s_5 c_4 s_{23}) - s_5 s_4 c_1$

$a_z = c_5 s_{23} + s_5 c_4 c_{23}$

$x = c_1(a + d\ c_{23} - b\ s_2 - c\ s_{23})$

$y = s_1(a + d\ s_{23} - b\ c_2 - c\ s_{23})$

$z = d\ s_{23} - b\ c_2 + c\ c_{23}$

Calcul du MGI

Nous supposons pour ce calcul que $[A_0]$ est donnée. Comme on a expliqué avant nous allons calculer dans la première étape q_1, q_2 et q_3 à partir du vecteur $\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$ puisque $\overrightarrow{O_0O_6}$=$\overrightarrow{O_0O_4}$

Nous avons $$X = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = [\ {}^0T_1][\ {}^1T_2][\ {}^2T_3][\ {}^3T_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Etape 1 : Calcul de q_1

$$[\ {}^1T_0]\, X = X_1 = [\ {}^1T_2][\ {}^2T_3][\ {}^3T_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = X_1 = \begin{bmatrix} c_1P_x + s_1P_y - a \\ P_z \\ s_1P_x - c_1P_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\ c_{23} - b\ s_2 - c\ s_{23} \\ d\ s_{23} + b\ c_2 + c\ c_{23} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On choisit la troisième ligne :

$s_1P_x - c_1P_y = 0 \Rightarrow tg\ q_1 = \frac{P_y}{P_x}$

alors si $x \neq 0$ on obtient deux valeurs pour q_1 : $q_1^1 = arctg\frac{P_y}{P_x}$ et $q_1^2 = q_1^1 + \pi$

- Etape 2 : Calcul de q_2 et q_3

$$[\ {}^2T_1]\, X_1 = [\ {}^2T_3][\ {}^3T_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_2 & c_2 & 0 & -b \\ -c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\ c_3 + ds_3 \\ c\ s_3 - dc_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -s_2x_1 + c_2y_1 - b = c\ c_3 + ds_3 \\ -c_2x_1 - s_2y_1 = c\ s_3 - ds_3 \\ z_1 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Posons $\cos\alpha_1 = \frac{d}{\sqrt{C^2+d^2}}$ et $\sin\alpha_1 = \frac{c}{\sqrt{C^2+d^2}}$

Les deux premières lignes deviennent

$$\begin{aligned} -s_2x_1 + c_2y_1 - b &= \sin(q_3 + \alpha_1)\ \sqrt{C^2 + d^2} \\ c_2x_1 + s_2y_1 &= \cos(q_3 + \alpha_1)\ \sqrt{C^2 + d^2} \end{aligned}$$

Elevons ces deux lignes au carré et les sommons

$$c^2 + d^2 = [(y_1 c_2 - s_2 x_1) - b]^2 + (c_2 x_1 + s_2 y_1)^2 \Rightarrow y_1 c_2 - s_2 x_1 = \frac{-c^2 - d^2 + (y_1^2 + x_1^2) + b^2}{2b} = \lambda$$

Posons $\cos\alpha_2 = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}$ et $\sin\alpha_2 = \frac{x_1}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}$

On obtient $\cos\alpha\, c_2 - \sin\alpha_2\, s_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}} \Rightarrow c(q_2 + \alpha_2) = \frac{\lambda}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}$

Si $-1 \leq \frac{\lambda}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}} \leq 1$ alors$q_2 = \pm arc\cos\frac{\lambda}{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}} - \alpha_2$

On revient aux deux équations de départ pour déduire

$$\begin{cases} \sin(q_3 + \alpha_1) = \dfrac{-s_2 x_1 + c_2 y_1 - b}{\sqrt{C^2 + d^2}} \\ \cos(q_3 + \alpha_1) = \dfrac{-c_2 x_1 - s_2 y_1}{\sqrt{C^2 + d^2}} \end{cases} \Rightarrow q_3 = arctan2(s_3, c_3) - \alpha_1$$

La matrice homogène $\left[{}^0T_3\right]$ est donc désormais connue. On a la relation $\left[{}^3R_0\right]\left[{}^0R_6\right] = \left[{}^3R_6\right]$où $\left[{}^3R_6\right]$ ne dépend que de q_4, q_5 et q_6. Soit $R = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$ la sous-matrice de rotation dans $[A_0]$, alors $\left[{}^3R_0\right][R] = \left[{}^3R_6\right] \Rightarrow [R_3] = \left[{}^3R_4\right]\left[{}^4R_5\right]\left[{}^5R_6\right]$. On multiplie de part et d'autre par $\left[{}^4R_3\right]$pour obtenir q_4 puis par $\left[{}^5R_4\right]$ pour obtenir q_5 et q_6.

Cinématique des robots sériels

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons déterminer le modèle cinématique d'un robot sériel. C'est-à-dire la relation entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires.

3.2 Modèle cinématique direct MCD

3.2.1 Matrice jacobienne

Nous avons vu que le MGD d'un manipulateur peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \tag{3-1}$$

En dérivant par rapport au temps

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \frac{\boldsymbol{df}(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{dq}}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3-2}$$

Où une ligne i s'écrit

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{\partial f_i}}{\boldsymbol{\partial} q_j}\dot{q}_j \tag{3-3}$$

Sous forme matricielle, nous pouvons écrire

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3-4}$$

La matrice $\boldsymbol{J}$ est appelée la matrice jacobienne du robot avec un élément

$$J_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{f_i}}{\partial q_j} \tag{3-5}$$

3.2.2 Exemple

Reprenons le robot PRR de la Figure 2-13. Nous avons trouvé que la matrice homogène de l'OT est

$${}^{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{T_3} = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_3c_{23} + a_2c_2 + a_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_3s_{23} + a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-6}$$

Nous déduisons

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_3\, s_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right) - a_2 s_2 \dot{\theta}_2\\ a_3\, c_{23}\left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right) + a_2 c_2 \dot{\theta}_2\\ \dot{d}_1\end{bmatrix} \quad \textbf{(3-7)}$$

D'autre part, la vitesse de rotation de l'OT est la somme des vitesses de rotation de toutes les articulations

$${}^0\vec{\omega}_3 = \dot{\theta}_2\vec{z}_1 + \dot{\theta}_3\vec{z}_2 = \left(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3\right)\vec{z}_0 \quad \textbf{(3-8)}$$

Ce qui nous donne le MCD du robot PRR

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\\ \omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -a_3\, s_{23} - a_2\, s_2 & -a_3\, s_{23}\\ 0 & a_3\, c_{23} + a_2\, c_2 & a_3\, c_{23}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{d}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix} \quad \textbf{(3-9)}$$

Nous pouvons également obtenir le MCD sans passer par le MGD.

3.2.3 Méthode explicite directe :

Nous pouvons obtenir le MCD en utilisant les règles de la cinématique des solides rigides. Puisque le MCD calcule les vitesses de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires, la méthode explicite directe examine la contribution des vitesses de chaque articulation sur celles de l'OT. Pour cela il suffit de considérer que le solide i est solidaire de l'OT et que l'articulation $\mathcal{L}_i$ est entre le solide i et la base.

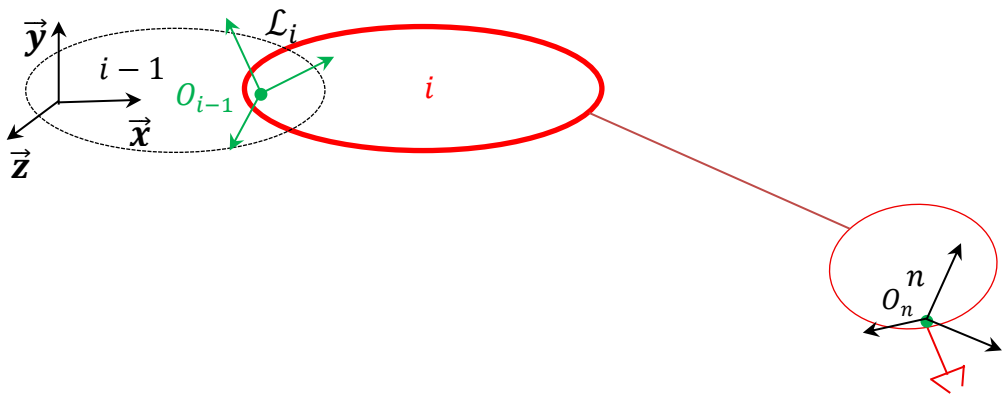


Figure 3-1

- **Cas où l'articulation $\mathcal{L}_i$ est rotoïde :**

Au point O_{i-1}, les vitesses du solide i par rapport au solide i-1 s'écrivent :

$\vec{\omega}_{i/i-1} = \dot{\theta}_i\vec{z}_{i-1}$ et $\vec{V}_{O_{i-1}\epsilon i/i-1} = \vec{0}$

Au point O_n, ces vitesses deviennent en considérant que le point O_{i-1} appartient au solide n,

$\vec{\omega}_{ni/0} = \dot{\theta}_i\vec{z}_{i-1}$ et $\vec{V}_{O_n\epsilon n/0} = \dot{\theta}_i\vec{z}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_n} = \dot{\theta}_i\vec{z}_{i-1} \wedge \left(\overrightarrow{O_0O_n} - \overrightarrow{O_0O_{i-1}}\right)$

La contribution de l'articulation i aux vitesses de l'OT nous donnera la colonne i dans la matrice jacobienne $\boldsymbol{J}$ suivant :

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dots & \overset{colonne\ i}{\overset{\downarrow}{\vec{z}_{i-1} \wedge \left(\overrightarrow{O_0O_n} - \overrightarrow{O_0O_{i-1}}\right)}} & \dots \\ \dots & \vec{z}_{i-1} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \dot{\theta}_i \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

- **Cas où l'articulation $\mathcal{L}_i$ est prismatique :**

$\vec{\omega}_{ni/0} = \vec{0}$ et $\vec{V}_{O_n \epsilon n/0} = \dot{d}_i \vec{z}_{i-1}$

Ce qui nous donne la colonne i suivante dans la jacobienne

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dots & \overset{colonne\ i}{\overset{\downarrow}{\vec{z}_{i-1}}} & \dots \\ \dots & \vec{0} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \dot{d}_i \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Application au robot PRR (Figure 2-13) :

Articulation 1 : prismatique $\vec{\omega}_{1/0} = \vec{0}$ et $\vec{V}_{O_1 \epsilon 1/0} = \dot{d}_1 \vec{z}_0$ on obtient la colonne 1 de la jacobienne

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 & \dots \\ \vec{0} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Articulation 2 : rotoïde

$\vec{\omega}_{2/1} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_1$ et $\vec{V}_{O_1 \epsilon 2/1} = \vec{0}$,

au point O_3 on aura $\vec{V}_{O_3 \epsilon 2/0} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_1 \wedge \left(\overrightarrow{O_0O_3} - \overrightarrow{O_0O_1}\right) = \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_3\, c_{23} + a_2 c_2 \\ a_3\, s_{23} + a_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

On obtient la colonne 2 de $\boldsymbol{J}$

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3\, s_{23} - a_2 s_2 & \dots \\ 0 & a_3\, c_{23} + a_2 c_2 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Articulation 3 : rotoïde

$\vec{\omega}_{3/2} = \dot{\theta}_3 \vec{z}_2$ et $\vec{V}_{O_2 \epsilon 3/1} = \vec{0}$,

au point O_3 on aura $\vec{V}_{O_3 \epsilon 3/0} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 \wedge \left(\overrightarrow{O_0O_3} - \overrightarrow{O_0O_2}\right) = \dot{\theta}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_3\, c_{23} \\ a_3\, s_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$

Avec cette 3ème colonne calculée on obtient le système cinématique total

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3\, s_{23} - a_2 s_2 & -a_3\, s_{23} \\ 0 & a_3\, c_{23} + a_2 c_2 & a_3\, c_{23} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

3.2.4 Méthode récurrente

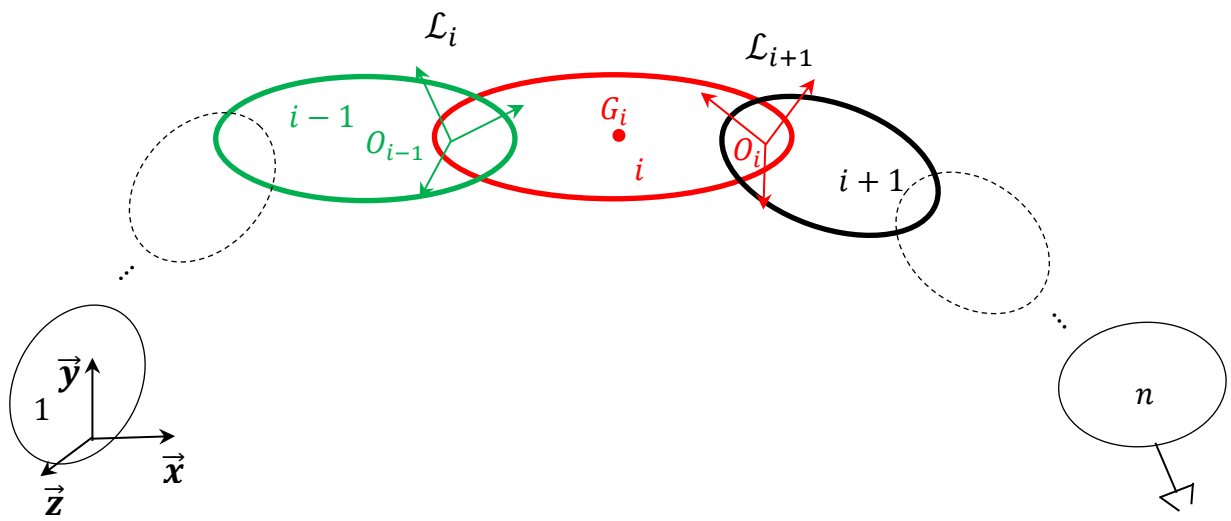


Figure 3-2 : robot à $\boldsymbol{n}$ axes

Cette méthode permet le calcul des vitesse linéaires des centres des articulations et des vitesses de rotation des éléments de robot en commençant par l'OT jusqu'à l'élément (1) d'où l'appellation.

Pour l'élément i du robot nous pouvons écrire

$$\vec{\omega}_i = {}^{i-1}\vec{\omega}_i + {}^{0}\vec{\omega}_{i-1} \qquad \textbf{(3-10)}$$

La vitesse de l'origine O_i est égale à

$$\vec{V}_{O_i\,\epsilon i/0} = \vec{V}_{O_i \epsilon i/i-1} + \vec{V}_{O_i \epsilon i-1/0} \qquad \textbf{(3-11)}$$

Notons $\vec{V}_{O_i \epsilon i/0} = \vec{V}_i$ et développons cette dernière équation, nous obtenons

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{O_{i-1} \epsilon i/i-1} + {}^{i-1}\vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{O_{\iota-1}O_\iota} + \vec{V}_{O_{i-1}\epsilon\, i-1/0} + {}^{0}\vec{\omega}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{\iota-1}O_\iota} \qquad \textbf{(3-12)}$$

Ce qui donne finalement

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{i-1} + \vec{V}_{O_{i-1} \epsilon i/i-1} + {}^{0}\vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{O_{\iota-1}O_\iota} \qquad \textbf{(3-13)}$$

Pour une liaison $\mathcal{L}_i$ rotoïde nous obtenons

$$\vec{\omega}_i = \dot{\theta}_i \vec{z}_{i-1} + {}^{0}\vec{\omega}_{i-1} \qquad \textbf{(3-14)}$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{i-1} + \left(\dot{\theta}_i \vec{z}_{i-1} + {}^{0}\vec{\omega}_{i-1}\right) \wedge \overrightarrow{O_{\iota-1}O_\iota} \qquad \textbf{(3-15)}$$

Et pour une liaison $\mathcal{L}_i$ prismatique nous obtenons

$$\vec{\omega}_i = {}^{0}\vec{\omega}_{i-1} \qquad \textbf{(3-16)}$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{i-1} + \dot{d}_i\vec{z}_{i-1} + {}^0\vec{\omega}_{i-1} \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \quad \textbf{(3-17)}$$

3.2.5 Application au robot PRR (Figure 2-13) :

- $n = 3$

La liaison $\mathcal{L}_3$ est rotoïde, nous appliquons les relations (3-14)et (3-15). Nous obtenons

$${}^0\vec{\omega}_3 = \dot{\theta}_3\vec{z}_2 + {}^0\vec{\omega}_2$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + \left(\dot{\theta}_3\vec{z}_2 + {}^0\vec{\omega}_2\right) \wedge \overrightarrow{O_2O_3}$$

Ou

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + \left(\dot{\theta}_3\vec{z}_2 + {}^0\vec{\omega}_2\right) \wedge a_3\vec{x}_3$$

- $n = 2$

  La liaison $\mathcal{L}_2$ est rotoïde, nous obtenons

  $${}^0\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}_2\vec{z}_1 + {}^0\vec{\omega}_1$$

  $$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \left(\dot{\theta}_2\vec{z}_1 + {}^0\vec{\omega}_1\right) \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$$

  Ou encore

  $$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \left(\dot{\theta}_2\vec{z}_1 + {}^0\vec{\omega}_1\right) \wedge a_2\vec{x}_2$$

- $n = 1$

  La liaison $\mathcal{L}_3$ est prismatique, nous appliquons les relations (3-16) et (3-17). Nous obtenons

  $${}^0\vec{\omega}_1 = \vec{0}$$

  $$\vec{V}_1 = \dot{d}_1\vec{z}_0$$

En intégrant les résultats trouvés nous obtenons

$${}^0\vec{\omega}_3 = \dot{\theta}_2\vec{z}_1 + \dot{\theta}_3\vec{z}_2 = \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)\vec{z}_0$$

$$\vec{V}_3 = \dot{d}_1\vec{z}_0 + \dot{\theta}_2\vec{z}_1 \wedge a_2\vec{x}_2 + \left(\dot{\theta}_3\vec{z}_2 + \dot{\theta}_2\vec{z}_1\right) \wedge a_3\vec{x}_3$$

$$\vec{V}_3 = \dot{d}_1\vec{z}_0 + a_2\dot{\theta}_2\vec{y}_2 + a_3\left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)\vec{y}_3$$

Les composantes des axes $\vec{y}_2$et $\vec{y}_3$, on les obtienne à partir des matrices homogènes ${}^0\boldsymbol{T}_2$ et ${}^0\boldsymbol{T}_3$ respectivement (§2.6.1).

$\vec{y}_2 = [-s_2 \quad c_2 \quad 0]^T$ et $\vec{y}_3 = [-s_{23} \quad c_{23} \quad 0]^T$

Finalement nous obtenons

$${}^0\vec{\omega}_3 = \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right)\vec{z}_0$$

$$\vec{V}_3 = \begin{bmatrix} -a_2 s_2 \dot{\theta}_2 - a_3 s_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2) \\ a_2 c_2 \dot{\theta}_2 + a_3\, c_{23}\,(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{d}_1 \end{bmatrix}$$

Nous le système linéaire exprimé par la relation (3-9).

3.3 Modèle cinématique inverse (MCI)

Le MCI est l'expression des vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{q}}$ en fonction des vitesses opérationnelles $\dot{\boldsymbol{X}}$. Dans le paragraphe précédent nous avons vu que le MCD s'écrit

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \textbf{(3-18)}$$

Avec $\dot{\boldsymbol{X}}$ de dimension n, $\dot{\boldsymbol{q}}$ de dimension m, et $\boldsymbol{J}$ de dimensions (n, m)

On distingue trois cas pour la détermination du MCI : cas $n = m$, cas $n < m$ et cas $n > m$

3.3.1 Cas où $n = m$

Nous avons autant d'articulations (de ddl) que la dimension de l'espace opérationnel. Dans ce cas la matrice $\boldsymbol{J}$ est carrée, le MCI s'exprime par

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{X}} \qquad \textbf{(3-19)}$$

Avec $\boldsymbol{J}^{-1}$ égale à

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \frac{[\boldsymbol{com}(\boldsymbol{J})]^{\boldsymbol{T}}}{\boldsymbol{Dét}(\boldsymbol{J})} \qquad \textbf{(3-20)}$$

A part les configurations où $\boldsymbol{Dét}(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}$, qu'on étudierait plus loin, il est possible à chaque fois de calculer le MCI.

3.3.2 Cas où $n > m$

Il existe moins de liaisons dans le manipulateur que nécessaire pour avoir tous les mouvements désirés dans l'espace opérationnel. Donc la solution exacte n'est pas garantie et on ne peut que s'approcher de la réalisation de la tâche désirée. Le robot est dit sous-déterminé. La solution souvent utilisée dans ces est celle de la matrice pseudo-inverse de $\boldsymbol{J}$.

Multiplions l'équation (3-18)de part et d'autre par $\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}$ nous obtenons

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \textbf{(3-21)}$$

$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{J}$ est une matrice carrée de dimension n, ce qui permet de déduire

$$\dot{\boldsymbol{q}} = [\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{J}]^{-1}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{X}} \qquad \textbf{(3-22)}$$

Ou encore

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{+}\dot{\boldsymbol{X}} \tag{3-23}$$

Où $\boldsymbol{J}^{+}$ est la matrice pseudo-inverse à gauche de $\boldsymbol{J}$, car nous avons

$$\boldsymbol{J}^{+}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I_n} \tag{3-24}$$

Avec $\boldsymbol{I_n}$ matrice identité de dimension n.

Comme nous l'avons mentionné plus haut la relation (3-23), ne peut pas donner une solution exacte.

En effet, le calcul permet une erreur égale à

$$\boldsymbol{e} = \left\|\dot{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}\right\| \tag{3-25}$$

3.3.2.1 Exemple

Reprenons le robot PRR. La matrice pseudo-inverse est

$$\boldsymbol{J}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a_3^2(s_{23}c_3 - s_2) - s_2}{L} & \dfrac{a_3^2(-c_{23}c_3 + c_2) - s_2}{L} & 0 & \dfrac{-a_3c_3}{L} \\ \dfrac{As_2 - Bs_{23}}{L} & \dfrac{-Ac_2 + Bc_{23}}{L} & 0 & \dfrac{a_2 + a_3c_3}{L} \end{bmatrix} \tag{3-26}$$

Avec

$A = a_3^2 + a_2a_3c_2 + 1$, $B = a_2a_3 + a_3^2c_3$ et $L = a_3^2(1 - c_3^2) + 1$

Pour $\theta_2 = 30°, \theta_3 = 45°, a_2 = a_3 = 0.5\ m$ et $\dot{\boldsymbol{X}} = [0.5 \quad 0.5 \quad 1 \quad -1.7]^{\boldsymbol{T}}$ nous obtenons

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -0.73 & -0.48 \\ 0 & 0.7 & 0.13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{J^T J}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.86 & -3.31 \\ 0 & -3.31 & 4.63 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{J}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.51 & 1.55 & 0 & -0.45 \\ 0.21 & -1.7 & 0 & 1.32 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne le résultat suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.28 \\ -3 \end{bmatrix}$$

En recalculant $\dot{\boldsymbol{X}}$, nous trouvons

$$\dot{\boldsymbol{X}} = [0.5 \quad 0.49 \quad 1 \quad -1.72]^{\boldsymbol{T}}$$

Nous enregistrons, dans la configuration de calcul, une erreur égale à

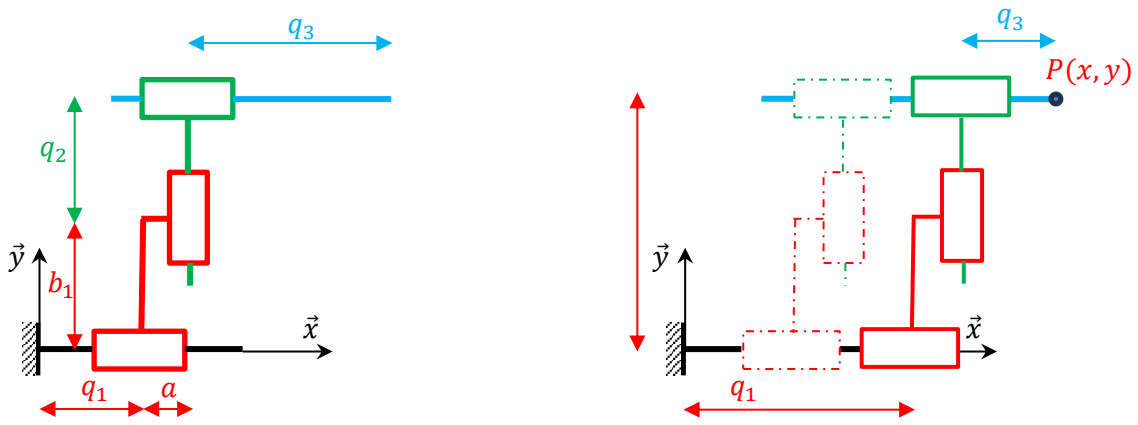
$$\boldsymbol{e} = \left\|\dot{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}\right\| = 1.38.10^{-8}$$

Remarques :

- L'erreur enregistré n'est pas constante, mais elle dépend de la configuration de calcul.
- Les éléments de $\boldsymbol{J}^{+}$ ne sont pas souvent homogènes, à l'instar de l'élément $\boldsymbol{J}^{+}(2,1)$ (relation(3-26)) dans lequel on somme une distance à une quantité sans dimensions. Numériquement, cette méthode est valable mais physiquement nous ne pouvons pas interpréter les éléments de $\boldsymbol{J}^{+}$.

3.3.3 Cas où $n < m$

Le ddl du robot est supérieur à la dimension de l'espace opérationnel. Il y a plus d'articulations dans le



(a) (b)

robot qu'il le faut, le robot est dit redondant. Il existe une infinité de solution pour atteindre une seule configuration. Le robot peut même avoir des déplacements non nuls de quelques articulations alors que l'OT ne bouge pas (Figure 3-3 et Figure 3-4 (b)). Ceci est expliqué par un noyau non vide du système homogène

$$\boldsymbol{J\,\dot{q} = 0} \tag{3-27}$$

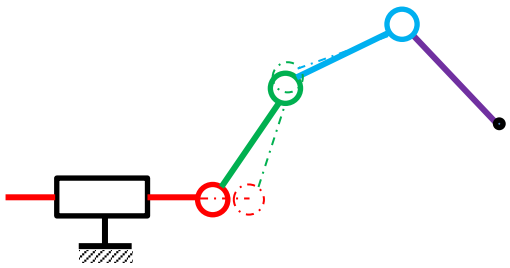


Figure 3-3 : robot redondant

Bien entendu, il n'est pas possible de calculer le modèle inverse puisque la matrice J n'est pas carrée. Cependant la résolution de ce problème est différente de celle du robot sous-déterminé.

3.3.3.1 Méthode de partitionnement des variables articulaires

Nous pouvons appliquer un partitionnement de variable pour obtenir la forme suivante

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J_p\dot{q}_p + J_h\dot{q}_h} \tag{3-28}$$

Où $\boldsymbol{J_p}$ est carrée de rang n, $\dot{\boldsymbol{X}}$ est rectangulaire de dimensions $(n, m-n)$. Dans ces conditions, nous pouvons calculer $\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{p}}$ en fonction de $\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{h}}$ et de $\dot{\boldsymbol{X}}$. Les valeurs de $\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{h}}$ doivent être choisies selon une stratégie donnée, par exemple pour contourner des obstacles. On peut également les annuler.

Prenons par exemple le translateur plan PPP de la Figure 3-4

Figure 3-4 : Translateur plan PPP

$$\begin{cases} x = q_1 + a + q_3 \\ y = b_1 + q_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{q}_1 + \dot{q}_3 \\ \dot{y} = \dot{q}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons avoir le partitionnement suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3$$

Nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_3$$

Pour $\dot{x} = \dot{y} = 1$ et $\dot{q}_3 = 0$ nous trouvons $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 1$

3.3.3.2 Méthode de pseudo-inverse

Cette méthode est basée sur l'utilisation de toutes les articulations dans un but de minimiser la norme du vecteur $\dot{\boldsymbol{q}}$. Le problème s'exprime par

$$\begin{gathered} \text{Minimiser } \{\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{q}}\} \\ \text{Avec la contrainte } \dot{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \end{gathered} \qquad \textbf{(3-29)}$$

Ce problème peut se réduire au problème sans contrainte suivant

$$\text{Minimiser } \left\{\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\left(\dot{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}\right)\right\} \qquad \textbf{(3-30)}$$

La stationnarité est obtenue pour

$$2\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(3-31)}$$

On en déduit

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} \qquad \textbf{(3-32)}$$

En introduisant cette expression dans l'équation (3-29), on obtient l'expression de $\boldsymbol{\lambda}$

$$\boldsymbol{\lambda} = 2[\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}]^{-\boldsymbol{1}}\dot{\boldsymbol{X}} \qquad \textbf{(3-33)}$$

En introduisant l'expression de $\boldsymbol{\lambda}$ dans l'équation (3-32), on obtient

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{T}}]^{-\boldsymbol{1}}\dot{\boldsymbol{X}} \qquad \textbf{(3-34)}$$

Ou encore

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{+}\dot{\boldsymbol{X}} \qquad \textbf{(3-35)}$$

Où $\boldsymbol{J}^{+}$ est la matrice pseudo-inverse à droite car

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{J}^{+} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m}} \qquad \textbf{(3-36)}$$

Avec $\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m}}$ est la matrice identité de dimension m.

Pour le translateur plan

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{JJ^T} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{[JJ^T]^{-1}} = \frac{\left[com\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^T\right]}{2} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J^T[JJ^T]^{-1}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 1\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

Le modèle cinématique inverse s'écrit $\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 1\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$

et pour $\dot{x} = \dot{y} = 1$ et nous trouvons $\dot{q}_1 = \dot{q}_3 = \frac{1}{2}$ et $\dot{q}_2 = 1$.

3.4 Singularités

3.4.1 Définition

Les singularités correspondent à des configurations où la jacobienne devient singulière $(dét(J) = 0)$. Dans une telle configuration, le manipulateur perd au moins une liberté, c'est-à-dire son mouvement devient impossible selon au moins une direction. A proximité des singularités les vitesses articulaires, calculées à partir des vitesses opérationnelles, deviennent trop grandes.

3.4.2 Exemple robot plan RR

Soit le robot plan RR de la Figure 3-5

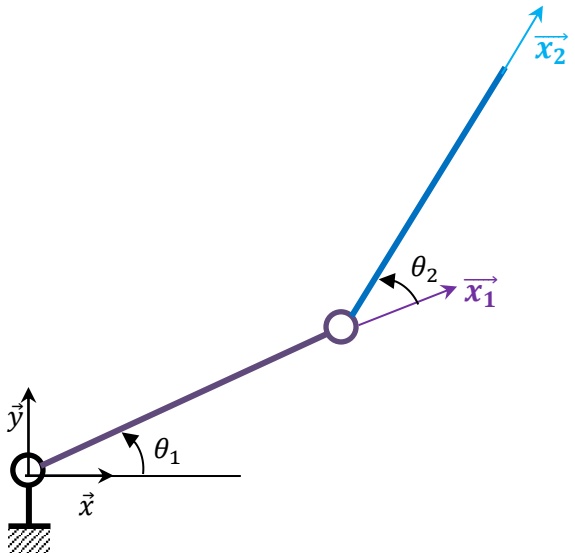


Figure 3-5 : robot plan RR

Le MGD s'écrit $\begin{cases}x = l_1c_1 + l_2c_{12}\\ y = l_1s_1 + l_2s_{12}\end{cases}$

Le MCD s'écrit

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12}\\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

Le $d\acute{e}t(J) = l_1 l_2 s_2$, s'annule lorsque $\theta_2 = 0, \pi$

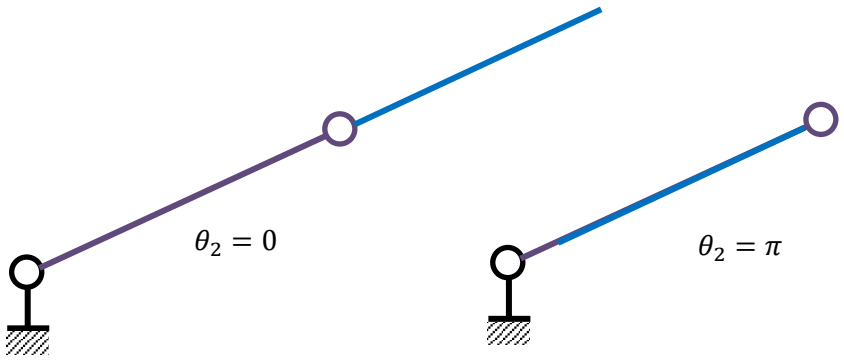


Figure 3-6 : positions singulières du robot RR

Pour $\theta_2 = 0$

$$\begin{matrix}\dot{x} = [-(l_1 + l_2)\dot{\theta}_1 - l_2\dot{\theta}_2]s_1\\ \dot{y} = [\ \ (l_1 + l_2)\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2]c_1\end{matrix} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -tg\theta_1$$

On obtient la même chose pour $\theta_2 = \pi$. $\dot{x}$ et $\dot{y}$ ne sont plus indépendantes. Ces deux positions singulières (Figure 3-6) correspondent aux frontières de l'espace de travail (extension maximum et minimum). Dans ces deux positions il n'est plus possible de calculer $\dot{\theta}_1$et $\dot{\theta}_2$ en fonction de $\dot{x}$ et $\dot{y}$. La commande en vitesses opérationnelles n'est plus possible. Le MCI s'écrit

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 s_2}\begin{bmatrix}l_2 c_{12} & l_2 s_{12}\\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

Aux alentours des positions singulières s_2 va tendre vers zéro ce qui amène à des vitesses articulaires nulles ou qui tendent vers l'infini.

3.4.3 Exemple d'un robot 6R :

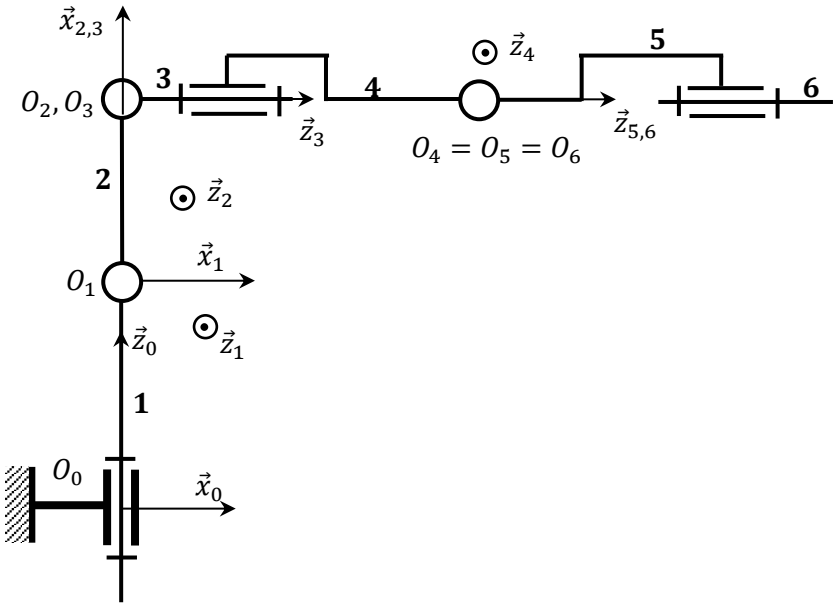


Figure 3-7 : robot 6R

Le poignet sphérique de la Figure 3-7 , est dans une position singulière puisque q_4 et q_6 ont le même axe de rotation.

La vitesse de rotation de l'OT par rapport au solide (3) s'écrit : $\vec{\omega}_{6/3} = \dot{q}_4\,\vec{z}_3 + \dot{q}_5\,\vec{z}_4 + \dot{q}_6\,\vec{z}_5$

On a dans cette configuration $\vec{z}_5 = \vec{z}_3$ et $\vec{z}_4 = \vec{y}_3$ alors : $\vec{\omega}_{6/3}$ devient $\vec{\omega}_{6/3} = (\dot{q}_4 + \dot{q}_5)\,\vec{z}_3 + \dot{q}_6\,\vec{y}_3$

En écriture matricielle cette équation s'écrit

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_4\\ \dot{q}_5\\ \dot{q}_6\end{bmatrix}$$

Le déterminant de ce système est bien nul et la rotation autour de $\vec{x}_3$ est éliminée.

Dynamique des robots sériels

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons déterminer les efforts nécessaires pour la commande. Nous allons voir 2 modèles de calcul :

- le modèle quasi-statique où on néglige les forces d'inertie et de pesanteur ;
- le modèle dynamique complet qu'on allons déterminer avec deux méthodes, méthode de Newton-Euler et la méthode de Lagrange

4.2 Modèle quasi-statique :

4.2.1 Système linéaire statique

A partir du MCD

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{4-1}$$

On déduit la relation entre les déplacements virtuels opérationnels et les déplacements virtuels articulaires

$$\boldsymbol{\delta X} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{\delta q} \tag{4-2}$$

Chaque articulation est commandée par un moteur rotatif ou linéaire. Chaque moteur exerce un couple ou une force τ_i. Pour l'ensemble des articulations nous avons

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_n]^{\boldsymbol{T}} \tag{4-3}$$

Si on note $\boldsymbol{F}$ le vecteur de dimension 6 des forces et des moments extérieurs exercés sur l'OT, le principe de D'Alembert s'écrit en négligeant les masses et les frottements

$$\boldsymbol{F^T \delta X} = \boldsymbol{\tau^T \delta q} \tag{4-4}$$

En remplaçant $\boldsymbol{\delta X}$ par son expression dans la relation (4-2) on obtient le modèle quasi-statique de calcul des efforts moteurs

$$\boldsymbol{J^T F} = \boldsymbol{\tau} \tag{4-5}$$

Si les masses doivent être considérées alors il suffit d'ajouter les travaux virtuels des poids à la formule (4-4) qui devient

$$\boldsymbol{F^T \delta X} = \boldsymbol{\tau^T \delta q} + \boldsymbol{P^T \delta G} \tag{4-6}$$

Où $\boldsymbol{P}$ est le vecteur des poids des éléments et $\boldsymbol{\delta G}$ les déplacements virtuels des centres de gravité correspondants. On montre que $\boldsymbol{P\delta G} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{\delta q}$ (voir cours de mécanique analytique). V étant l'énergie potentielle des poids.

La formule (4-6) devient

$$\boldsymbol{F^T \delta X = \tau^T \delta q - \frac{\partial V}{\partial q}\, \delta q} \qquad \textbf{(4-7)}$$

Le modèle quasi-statique en considérant les masses des éléments s'écrit

$$\boldsymbol{\tau = J^T F + \frac{\partial V}{\partial q}} \qquad \textbf{(4-8)}$$

4.2.2 Exemple

Considérons le robot RR plan de la Figure 4-3. Le MCD de ce robot a été calculé dans le paragraphe 3.4.2 du chapitre précédent. Nous avons trouvé que $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$

Le modèle quasi-statique en négligeant les masses des éléments s'écrit donc

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4-9)}$$

Si on considère le poids des éléments on utilise la relation (4-8).

L'énergie potentielle du robot s'écrit $V = \frac{1}{2} mgl(3S_1 + 3S_{12})$

Les forces généralisées dues au poids s'écrivent :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} mgl(3C_1 + C_{12})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \frac{3}{2} mgl C_{12}$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} mgl(3\, C_1 + C_{12}) \\ \frac{3}{2} mgl C_{12} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4-10)}$$

4.3 Modèle dynamique

4.3.1 Méthode de Newton-Euler

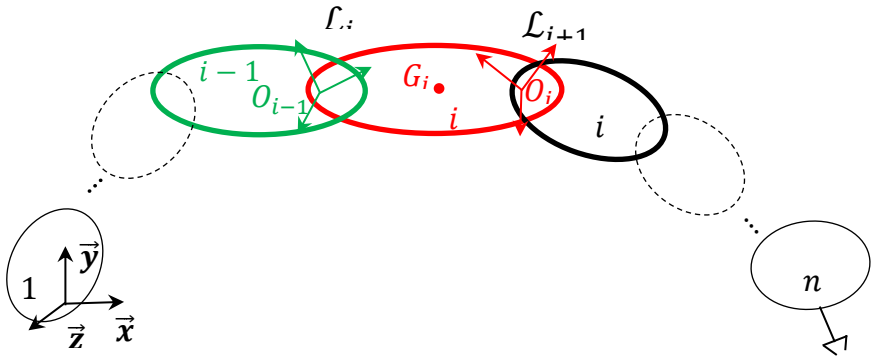


Figure 4-1 : chaîne de solides d'un robot n axes

Soit

G_i : centre de gravité du solide i

I_i : matrice d'inertie de l'élément i en G_i

$\vec{F}_i, \vec{M}_i$: forces et moments appliqués sur (i) par le solide $i-1$

$\vec{F}_{i+1}, \vec{M}_{i+1}$: forces et moments appliqués sur (i) par le solide $i+1$

Le P.F.D appliqué au solide i s'écrit au point G_i et dans le repère $\mathcal{R}_i$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m_i\vec{V}_{G_i}) = \vec{F}_i - {}^{i}R_{i+1}\vec{F}_{i+1} + m_i\vec{g} \\ \dfrac{d}{dt}(I_i\vec{\omega}_i) = \vec{M}_i - {}^{i}R_{i+1}\vec{M}_{i+1} + \overrightarrow{G_iO_{i-1}} \wedge \vec{F}_i - \overrightarrow{G_iO_i} \wedge {}^{i}R_{i+1}\vec{F}_{i+1} \end{cases} \quad \textbf{(4-11)}$$

Ou encore

$$\begin{cases} m_i\vec{V}_{G_i} = \vec{F}_i - {}^{i}R_{i+1}\vec{F}_{i+1} + m_i\vec{g} \\ I_i\vec{\omega}_i + \vec{\omega}_i \wedge I_i\vec{\omega}_i = \vec{M}_i - {}^{i}R_{i+1}\vec{M}_{i+1} + \overrightarrow{G_iO_{i-1}} \wedge \vec{F}_i - \overrightarrow{G_iO_i} \wedge {}^{i}R_{i+1}\vec{F}_{i+1} \end{cases} \quad \textbf{(4-12)}$$

Les vitesses et les accélérations dans le cas de deux liaisons rotoïde et prismatique sont données

Rotoïde	$\vec{\omega}_i = \dot{\theta}_i\vec{z}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1}$ $\vec{\dot{\omega}}_i = \ddot{\theta}_i\vec{z}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \wedge \dot{\theta}_i\vec{z}_{i-1} + \vec{\dot{\omega}}_{i-1}$ $\vec{V}_i = \vec{V}_{i-1} + \vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i}$ $\vec{\dot{V}}_i = \vec{\dot{V}}_{i-1} + \vec{\dot{\omega}}_i \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i} + \vec{\omega}_i \wedge \left(\vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i}\right)$ Avec $\overrightarrow{O_{i-1}O_i} = d_i\vec{z}_{i-1} + a_i\vec{x}_i$
Prismatique	$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1}$ $\vec{\dot{\omega}}_i = \vec{\dot{\omega}}_{i-1}$ $\vec{V}_i = \vec{V}_{i-1} + \dot{d}_i\vec{z}_{i-1} + \vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i}$ $\vec{\dot{V}}_i = \vec{\dot{V}}_{i-1} + \ddot{d}_i\vec{z}_{i-1} + 2\,\vec{\omega}_i \wedge \dot{d}_i\vec{z}_{i-1} + \vec{\dot{\omega}}_i \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i} + \vec{\omega}_i \wedge \left(\vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i}\right)$ Le terme $2\,\vec{\omega}_i \wedge \dot{d}_i\vec{z}_{i-1}$ est dû à la dérivée de $\vec{z}_{i-1}$ et à la dérivée de $\overrightarrow{O_{i-1}O_i}$, par rapport au temps.

La démarche des calculs est la suivante :

- On commence par l'OT, c-à-dire $i = n$

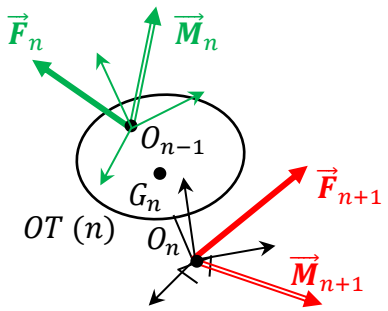


Figure 4-2 : Equilibre de l'OT

$\vec{F}_{n+1}$ et $\vec{M}_{n+1}$ sont les forces et moments extérieurs appliqués sur l'OT. On calcule $\vec{F}_n$ et $\vec{M}_n$ en utilisant les équations (4-12). Le couple moteur ou la force motrice de la liaison $\mathcal{L}_n$ sont calculés de la façon suivante

$$\tau_n = {}^{n-1}R_n\vec{M}_n.\vec{z}_{n-1} \text{ pour } \mathcal{L}_n\text{rotoïde}$$
$$\tau_n = {}^{n-1}R_n\vec{F}_n.\vec{z}_{n-1} \text{ pour } \mathcal{L}_n\text{prismatique} \qquad \textbf{(4-13)}$$

- La procédure continue de la même façon pour $i = n-1$ et ainsi de suite jusqu'à $i = 1$.

Cette méthode est assez longue mais elle a l'avantage de calculer les actions des liaisons nécessaires pour le dimensionnement.

4.3.2 Méthode de Lagrange :

Nous considérons le robot libre de toute contrainte sur les trajectoires. Dans ce cas les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i + Q_i \qquad i = 1,..,n \qquad \textbf{(4-14)}$$

L est le Lagrangien du robot égale à

$$L = T - V \qquad \textbf{(4-15)}$$

T et V étant respectivement, les énergies, cinétique et potentielle, du robot.

Certes, cette méthode est plus rapide pour le calcul des efforts moteurs mais elle ne permet pas le calcul des actions de liaisons.

Q_i est la force généralisée due aux forces extérieures appliquées sur l'OT.

4.4 Exemple : Robot RR

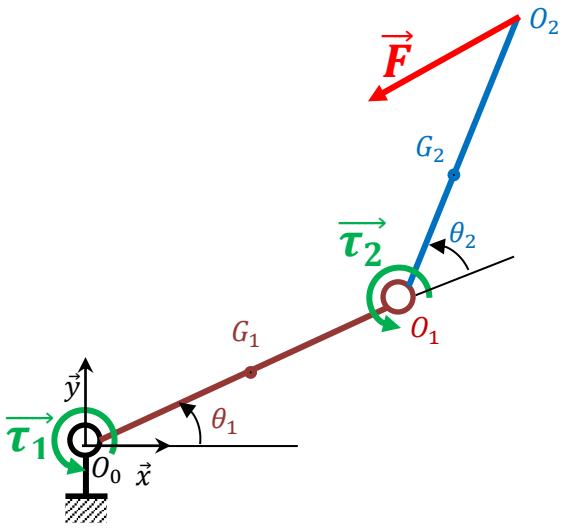


Figure 4-3 : Robot RR

Soit, de nouveau, le robot RR du paragraphe 4.2.2. Considérons cette fois qu'il n'est soumis qu'aux couples moteurs et les poids des deux éléments. Les autres caractéristiques sont

$$l = l_1 = l_2$$

$$m = m_1 = m_2$$

$$I = I_1 = I_2 = \frac{ml^2}{12}$$

Traitons le modèle dynamique par les deux méthodes, Newton-Euler et Lagrange.

4.4.1 *Méthode de Newton-Euler*

Les matrices de rotation sont

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$${}^0\vec{\omega}_2 = {}^0\vec{\omega}_1 + {}^1\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}_1\vec{z}_0 + \dot{\theta}_2\vec{z}_0 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{z}_0$$

$${}^0\vec{\omega}_2 = (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{z}_0$$

$${}^0\vec{V}_2 = l\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + l(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2$$

$${}^0\vec{V}_{G_2} = l\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + l(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{z}_0 \wedge -\frac{l}{2}\vec{x}_2$$

$${}^0\vec{V}_{G_2} = l\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2$$

$${}^0\vec{V}_2 = l\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l\dot{\theta}_1^2\vec{x}_1 + l(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - l(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)\vec{x}_2$$

$$\vec{a}(G_2) = l\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l\dot{\theta}_1^2\vec{x}_1 + \frac{l}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2$$

$$\vec{a}(G_2) = l\ddot{\theta}_1(S_2\vec{x}_2 + C_2\vec{y}_2) - l\dot{\theta}_1^2(C_2\vec{x}_2 - S_2\vec{y}_2) + \frac{l}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2$$

$$\vec{a}(G_2) = \left[lS_2\ddot{\theta}_1 - l\,C_2\dot{\theta}_1^2 - \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\right]\vec{x}_2 + \left[lC_2\ddot{\theta}_1 + l\,S_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\right]\vec{y}_2$$

La force $\vec{F}_2$ exercée par le solide 1 sur le solide 2 est

$$\vec{F}_2 = m\,\vec{a}(G_2) - m\vec{g} + {}^2R_0\,\vec{F}$$

$$\vec{F}_2 = \left(\left[lS_2\ddot{\theta}_1 - l\,C_2\dot{\theta}_1^2 - \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\right]m\right)\vec{x}_2 + \left[lC_2\ddot{\theta}_1 + l\,S_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{l}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\right]m\vec{y}_2 + mg(S_{12}\vec{x}_2 + C_{12}\vec{y}_2) + (C_{12}Fx + S_{12}Fy)\vec{x}_2 + (-S_{12}Fx + C_{12}Fy)\vec{y}_2$$

$$\vec{F}_2 = \left[mlS_2\ddot{\theta}_1 - ml\,C_2\dot{\theta}_1^2 - m\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + mgS_{12} + C_{12}Fx + S_{12}Fy\right]\vec{x}_2 + \left[mlC_2\ddot{\theta}_1 + ml\,S_2\dot{\theta}_1^2 + m\frac{l}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mgC_{12} - S_{12}Fx + C_{12}Fy\right]\vec{y}_2$$

La force $\vec{F}_2$ exercée par le solide 1 sur le solide 2 est

$$\vec{M}_2 = I_2\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge I_2\vec{\omega}_2 - \overrightarrow{G_2O_1} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{G_2O_2} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_2 = I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{z}_0 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{z}_0 \wedge I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{z}_0 + \frac{l}{2}\left[mlC_2\ddot{\theta}_1 + ml\,S_2\dot{\theta}_1^2 + m\frac{l}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mgC_{12} - S_{12}Fx + C_{12}Fy\right]\vec{z}_0 + \frac{l}{2}(-S_{12}Fx + C_{12}Fy)\vec{z}_0$$

$$M_2 = I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m\frac{l^2}{2}C_2\ddot{\theta}_1 + m\frac{l^2}{2}\,S_2\dot{\theta}_1^2 + m\frac{l^2}{4}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mg\frac{l}{2}C_{12} + l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy)$$

$$M_2 = \left(I_2 + m\frac{l^2}{2}C_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + m\frac{l^2}{2}\,S_2\dot{\theta}_1^2 + mg\frac{l}{2}C_{12} + l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy)$$

$$M_2 = \left(I_2 + \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right)\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m\frac{l^2}{4} + I_2\right)\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m\,l^2S_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mglC_{12} + l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy)$$

Le moment est uniquement sur $\vec{z}_0$ (problème plan), nous déduisons que le couple moteur de l'articulation (2) est

$$M_2 = \tau_2$$

$n = 1$

$${}^0\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}_1\vec{z}_0$$

$${}^0\vec{V}_1 = l\dot{\theta}_1\vec{y}_1$$

$$^0\vec{V}_{G_1} = {}^0\vec{V}_1 + \dot{\theta}_1\vec{z}_0 \wedge -\frac{l}{2}\vec{x}_1$$

$$^0\vec{V}_{G_1} = \frac{l}{2}\dot{\theta}_1\vec{y}_1$$

$$\vec{a}(G_1) = \frac{l}{2}\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - \frac{l}{2}\dot{\theta}_1^2\vec{x}_1$$

La force $\vec{F}_1$ exercée par le solide 0 sur le solide 1 est

$$\vec{F}_1 = m\,\vec{a}(G_1) + {}^1R_2\,\vec{F}_2 - m\vec{g}$$

$$\vec{F}_1 = m\left(\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - \frac{l}{2}\dot{\theta}_1^2\vec{x}_1\right) + \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{2X} \\ F_{2Y} \\ 0 \end{bmatrix} + mg\,\vec{y}_0$$

$$\vec{F}_1 = m\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - m\frac{l}{2}\dot{\theta}_1^2\vec{x}_1 + (C_2F_{2X} - S_2F_{2Y})\vec{x}_1 + (S_2F_{2X} + C_2F_{2Y})\vec{y}_1 + mg(S_1\vec{x}_1 + C_1\vec{y}_1)$$

$$\vec{F}_1 = \left[-m\frac{l}{2}\dot{\theta}_1^2 + C_2F_{2X} - S_2F_{2Y} + mgS_1\right]\vec{x}_1 + \left[m\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + S_2F_{2X} + C_2F_{2Y} + mgC_1\right]\vec{y}_1$$

La force $\vec{M}_1$ exercée par le solide 0 sur le solide 1 est

$$\vec{M}_1 = I_1\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge I_1\vec{\omega}_1 + {}^1R_2\,\vec{M}_2 - \overrightarrow{G_1O_0} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{G_1O_1} \wedge {}^1R_2\,\vec{F}_2$$

$$\vec{M}_1 = I_1\ddot{\theta}_1\vec{z}_0 + \vec{M}_2 + \frac{l}{2}\vec{x}_1 \wedge F_{1Y}\vec{y}_1 + \frac{l}{2}\vec{x}_1 \wedge (S_2F_{2X} + C_2F_{2Y})\vec{y}_1$$

$$M_1 = I_1\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{2}C_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + m\frac{l^2}{2}S_2\dot{\theta}_1^2 + mg\frac{l}{2}C_{12}$$
$$+ l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy) + \frac{l}{2}F_{1Y} + \frac{l}{2}(S_2F_{2X} + C_2F_{2Y})$$

$$M_1 = I_1\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{2}C_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + m\frac{l^2}{2}S_2\dot{\theta}_1^2 + mg\frac{l}{2}C_{12}$$
$$+ l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy) + \frac{l}{2}\left(m\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + S_2F_{2X} + C_2F_{2Y} + mgC_1\right)$$
$$+ \frac{l}{2}(S_2F_{2X} + C_2F_{2Y})$$

$$M_1 = I_1\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{2}C_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + m\frac{l^2}{2}S_2\dot{\theta}_1^2 + mg\frac{l}{2}C_{12}$$
$$- \frac{l}{2}\left(m\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + mgC_1\right) + l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy) + lS_2F_{2X} + lC_2F_{2Y}$$

$$M_1 = I_1\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{2}C_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + m\frac{l^2}{2}S_2\dot{\theta}_1^2 + mg\frac{l}{2}C_{12}$$
$$+ \frac{l}{2}\left(m\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + mgC_1\right) + l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy)$$
$$+ lS_2\left(mlS_2\ddot{\theta}_1 - ml\,C_2\dot{\theta}_1^2 - m\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + mgS_{12} + C_{12}Fx + S_{12}Fy\right)$$
$$+ lC_2\left(mlC_2\ddot{\theta}_1 + ml\,S_2\dot{\theta}_1^2 + m\frac{l}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + mgC_{12} - S_{12}Fx + C_{12}Fy\right)$$

$$M_1 = I_1\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{2}C_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + m\frac{l^2}{2}\,S_2\dot{\theta}_1^2 + mg\frac{l}{2}C_{12}$$
$$+ \frac{l}{2}\left(m\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + mgC_1\right) + ml^2{S_2}^2\ddot{\theta}_1 - ml^2\,S_2C_2\dot{\theta}_1^2 - m\frac{l^2}{2}S_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2$$
$$+ mglS_2S_{12} + ml^2{C_2}^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\,C_2S_2\dot{\theta}_1^2 + m\frac{l^2}{2}C_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + mglC_2C_{12}$$
$$+ l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy) + lS_2C_{12}Fx + lS_2S_{12}Fy - lC_2S_{12}Fx + lC_2C_{12}Fy$$

$$M_1 = I_1\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{2}C_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + m\frac{l^2}{2}\,S_2\dot{\theta}_1^2 + mg\frac{l}{2}C_{12}$$
$$+ \frac{l}{2}\left(m\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + mgC_1\right) + \,ml^2\ddot{\theta}_1 - m\frac{l^2}{2}S_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m\frac{l^2}{2}C_2\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)$$
$$+ \,mglC_1 + l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy) + l(S_2C_{12} - C_2S_{12})Fx$$
$$+ l(S_2S_{12} + C_2C_{12})Fy$$

$$M_1 = \left(I_1 + I_2 + ml^2C_2 + \frac{3}{2}ml^2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(I_2 + m\frac{l^2}{4} + m\frac{l^2}{2}C_2\right)\ddot{\theta}_2 - m\frac{l^2}{2}S_2{\dot{\theta}_2}^2$$
$$- 2m\frac{l^2}{2}S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + mg\frac{l}{2}(C_{12} + 3C_1) + l(-S_{12}Fx + C_{12}Fy) - lS_1Fx$$
$$+ lC_1Fy$$

$$M_1 = \left[ml^2\left(\frac{3}{2} + C_2\right) + I_1 + I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + I_2\right]\ddot{\theta}_2 - ml^2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}ml^2S_2{\dot{\theta}_2}^2$$
$$+ \frac{1}{2}mgl(3C_1 + C_{12}) - l(S_1 + S_{12})Fx + l(C_1 + C_{12})Fy$$

On en déduit comme pour l'articulation 2, le couple de l'articulation 1 est

$$M_1 = \tau_1$$

4.4.2 Méthode de Lagrange

Le modèle géométrique direct s'écrit :

$$x = l(C_1 + C_{12})$$
$$y = l(S_1 + S_{12})$$

Les déplacements virtuels du point O_2 s'écrivent

$$\delta x = -l(S_1 + S_{12})\delta\theta_1 - lS_{12}\delta\theta_2$$
$$\delta y = l(C_1 + C_{12})\delta\theta_1 + lC_{12}\delta\theta_2$$

Energie potentielle : $V = \frac{1}{2}mgl(3S_1 + S_{12})$

Le travail virtuel des couples moteurs : $\delta w_\tau = \tau_1\delta\theta_1 + \tau_2\delta\theta_2$

Le travail virtuel de la force extérieure : $\delta w_F = F_x\delta x + F_y\delta y$

$$\delta w_F = -lF_x[(S_1 + S_{12})\delta\theta_1 + S_{12}\delta\theta_2] + lF_y[(C_1 + C_{12})\delta\theta_1 + C_{12}\delta\theta_2]$$
$$\delta w_F = l\left[-(S_1 + S_{12})F_x + (C_1 + C_{12})F_y\right]\delta\theta_1 + l\left[-S_{12}F_x + C_{12}F_y\right]\delta\theta_2$$

Les forces généralisées s'écrivent :

$$Q_{\theta_1} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} + \tau_1 + {Q_{\theta_1}}^F = \tau_1 - \frac{1}{2}mgl(3C_1 + C_{12}) + l\left[-(S_1 + S_{12})F_x + (C_1 + C_{12})F_y\right]$$

$$Q_{\theta_2} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_2} + \tau_2 + {Q_{\theta_2}}^F = \tau_2 - \frac{1}{2}mglC_{12} + l\left[-S_{12}F_x + C_{12}F_y\right]$$

L'énergie cinétique

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m\ {}^0\vec{V}_{G_1}{}^2 + \frac{1}{2}I_1\ {}^0\vec{\omega}_1{}^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(m\frac{l^2}{4} + I_1\right)\dot{\theta}_1{}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\ {}^0\vec{V}_{G_2}{}^2 + \frac{1}{2}I_2\ {}^0\vec{\omega}_2{}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\ {}^0\vec{V}_{G_2}{}^2 + \frac{1}{2}I_2\ {}^0\vec{\omega}_2{}^2$$

$${}^0\vec{V}_{G_2} = l\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2$$

$${}^0\vec{V}_{G_2} = l\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + \frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(-S_2\vec{x}_1 + C_2\vec{y}_1)$$

$${}^0\vec{V}_{G_2} = -\frac{l}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)S_2\vec{x}_1 + l\left[\left(1 + \frac{1}{2}C_2\right)\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}C_2\dot{\theta}_2\right]\vec{y}_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2}ml^2\left[\left(\frac{5}{4} + C_2\right)\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2{}^2 + \left(\frac{1}{2} + C_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right] + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{5}{4} + C_2\right) + I_2\right]\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}ml^2 + I_2\right)\dot{\theta}_2{}^2 + \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

L'énergie cinétique totale s'écrit

$$T = \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{3}{2} + C_2\right) + I_1 + I_2\right]\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}ml^2 + I_2\right)\dot{\theta}_2{}^2 + \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \left[ml^2\left(\frac{3}{2} + C_2\right) + I_1 + I_2\right]\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = \left[ml^2\left(\frac{3}{2} + C_2\right) + I_1 + I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\ddot{\theta}_2 - ml^2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$-\frac{1}{2}ml^2S_2\dot{\theta}_2{}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \left(\frac{1}{4}ml^2 + I_2\right)\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{4}ml^2 + I_2\right)\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}ml^2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta_1}^2 - \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent

Equation 1 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = Q_{\theta_1}$$

$$\left[ml^2\left(\frac{3}{2} + C_2\right) + I_1 + I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\ddot{\theta}_2 - ml^2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$= \tau_1 - mgl\left(\frac{3}{2}C_1 + C_{12}\right) + l\left[-(S_1 + S_{12})F_x + (C_1 + C_{12})F_y\right]$$

Equation 2 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = Q_{\theta_2}$$

$$\frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{4}ml^2 + I_2\right)\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$
$$= \tau_2 - \frac{1}{2}mglC_{12} + l\left[-S_{12}F_x + C_{12}F_y\right]$$

Ou encore

$$\frac{1}{2}\left[ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + 2I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{4}ml^2 + I_2\right)\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$= \tau_2 - \frac{1}{2}mglC_{12} + l\left[-S_{12}F_x + C_{12}F_y\right]$$

On en déduit les expressions des couples moteur

$$\tau_1 = \left[ml^2\left(\frac{3}{2} + C_2\right) + I_1 + I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right) + I_2\right]\ddot{\theta}_2 - ml^2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$+ \frac{1}{2}mgl(3C_1 + C_{12}) + l\left[-(S_1 + S_{12})F_x + (C_1 + C_{12})F_y\right]$$

$$\tau_2 = \left[I_2 + \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{1}{2} + C_2\right)\right]\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{4}ml^2 + I_2\right)\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}ml^2 S_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mglC_{12}$$
$$+ l\left[-S_{12}F_x + C_{12}F_y\right]$$

On trouve bien les mêmes résultats par les deux méthodes, cependant la méthode de Newton-Euler bien que plus longue mais néanmoins elle nous a permis de calculer les forces de liaisons $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

(Zeghloul, 1994)

Bibliographie

Angels, G. (2003). *Fundamentals of robotic mechanical systems:Theory, Methods and Algorithmes,.* springer.

Asada, H. H. (2005). *Introduction to robotics.* Massachusetts Institute of Technology.

Bop, C. (2010). *Traité de robotique T1 et T2.* Ellipse.

COIFFET, P. (2008, Mars). Robots industriels : concepts, Définition et classification. *Technique de l'Ingénieur*(S 7 700), pp. 102-136.

Preumont, A. (2001). *Théorie générales des systèmes articulés. Introducition à la robotique.* Université libre de Bruxelles.

Romdhane, L. (2005). *Notes de cours: Introduction à la robotique.* Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir.

SÉGUY, N. (2002, juin). Système de commande d'un manipulateur. *Techniques de l'Ingénieurs*(S7 732).

Wissama Khalil, E. D. (2012). *Base de la modélisation et de la commande des robots-manipoulateurs de type série.*

Zeghloul, J. P. (1994). *ROBOTIQUE, Aspects fondamentaux.* Paris: MASSON.