REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES À TEMPS CONTINU

Prof: Mr ECH-CHHIBAT

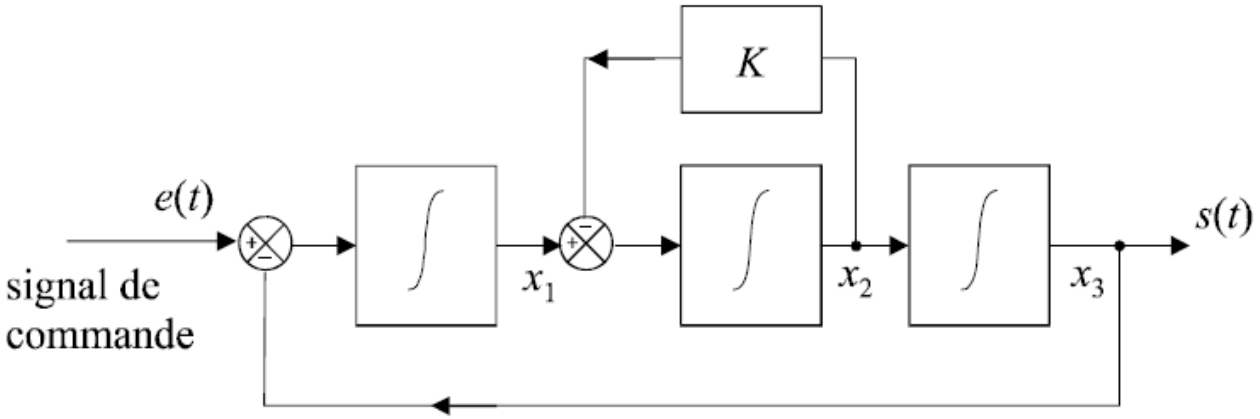
DÉFINITIONS

Toutes les méthodes étudiées jusqu'à présent, que ce soit pour les systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret restent valables et efficaces jusqu'à ce que ces systèmes atteignent une complexité telle que l'on ne puisse plus se satisfaire de l'unique relation entrée - sortie pour les commander correctement. De même, ces modèles deviennent difficiles à mettre en œuvre lorsque les systèmes étudiés possèdent plusieurs entrées et plusieurs sorties. La représentation d'état des systèmes est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret et qui possède en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

ÉTAT D'UN SYSTÈME ET VARIABLES D'ÉTAT

le système ci-dessous est composé d'une cascade d'éléments, et la commande automatique d'un tel système peut très bien aller beaucoup plus loin que la seule ambition de réguler le signal de sortie.

Un certain nombre de signaux internes *x1, x2 et x3* au système apparaissent sur le schéma. *Ces* différents signaux sont commandés par l'intermédiaire du seul signal d'entrée *e. On dit que l'ensemble de ces trois* signaux forment l'*état du système.* Les variables internes choisies sont appelées variables d'état du système.



ÉTAT D'UN SYSTÈME ET VARIABLES D'ÉTAT

L'état d'un système est en général représenté par un *vecteur d'état que l'on note, en ce qui concerne* notre exemple :

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Dans le cas le plus général où *n variables d'états sont identifiées dans le système, on aura:*

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Remarque :
la représentation d'état d'un système n'est pas unique et dépend, notamment, des variables d'état choisies.

MODÉLISATION DU FONCTIONNEMENT DU SYSTÈME:

Lorsqu'un système est modélisé sous la forme d'une représentation d'état, on montre qu'il est possible d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée à ce même instant et en fonction de son « passé », autrement dit, de son état précédent.

$$\underline{\dot{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (\underline{\mathbf{B}})\, e(t)$$

La matrice de commande [A] est une matrice carrée, dans notre cas de dimension 3 × 3 ; (B) est un vecteur colonne.

MODÉLISATION DU FONCTIONNEMENT DU SYSTÈME:

À partir du schéma bloc précédent, on peut facilement calculer la dérivée de chaque variable d'état et déterminer la matrice [A] et le vecteur (B) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e - s = e - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - Kx_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e(t)$$

Pour être complet, il convient d'exprimer le signal de sortie en fonction du vecteur d'état.

Comme s = x3, on écrit : $s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{\mathbf{x}}$

CAS GÉNÉRAL

Dans le cas général, le système peut avoir plusieurs entrées et plusieurs sorties. Soit n le nombre de variables d'état, m le nombre d'entrées et p le nombre de sorties.

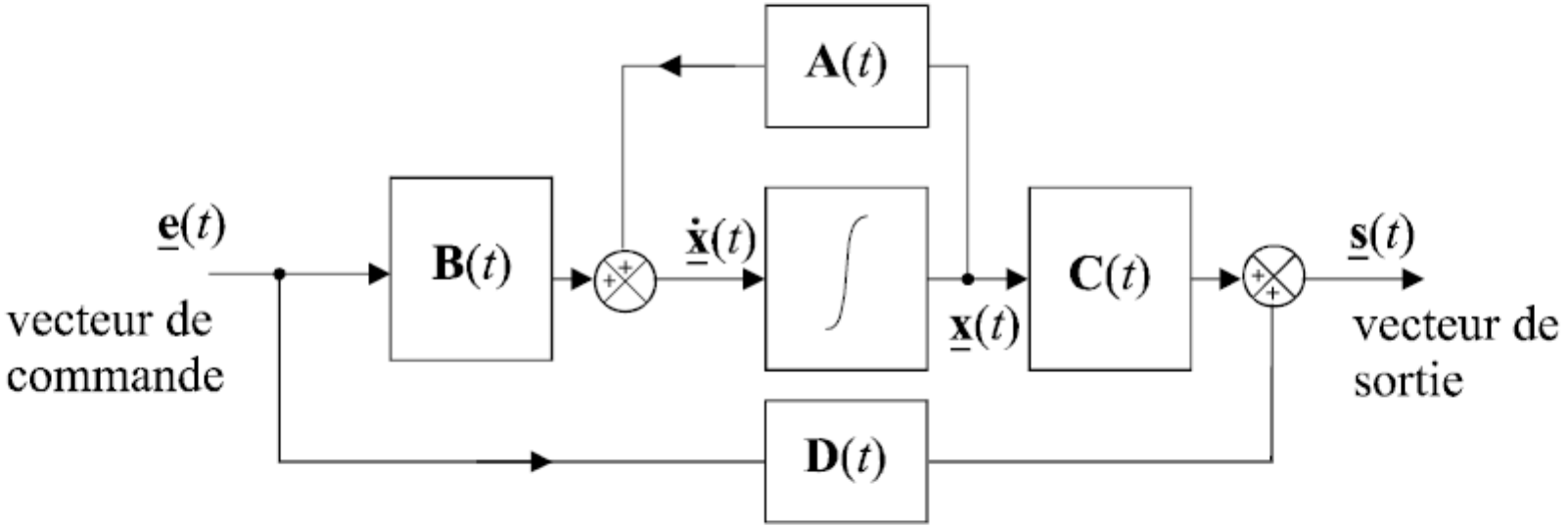
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}(t)]\,\underline{x}(t) + [\mathbf{B}(t)]\,\underline{e}(t) & \text{: Equation de commande} \\ \underline{s}(t) = [\mathbf{C}(t)]\,\underline{x}(t) + [\mathbf{D}(t)]\,\underline{e}(t) & \text{: Equation d'observation} \end{cases}$$

La matrice de commande [A(t)] est une matrice n×n.

[B(t)] est une matrice n × m et [C(t)] est une matrice p × n.

Il faut aussi tenir compte d'une possible relation directe entre entrées et sorties. La matrice [D(t)], de dimensions m×p représente ce lien. les coefficients des différentes matrices peuvent être variables dans le temps.

REPRÉSENTATION SCHÉMATIQUE D'UNE MODÉLISATION D'ÉTAT



Si ces coefficients sont constants, le système est dit invariant et on a:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{x}(t) + [\mathbf{B}]\,\underline{e}(t) \\ \underline{s}(t) = [\mathbf{C}]\,\underline{x}(t) + [\mathbf{D}]\,\underline{e}(t) \end{cases}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Dans la suite on considère les systèmes mono-entrée, mono-sortie invariants, [**A**] **est toujours de dimension *n*×*n*. *Cette fois, (B) est un vecteur colonne de dimension n, (C) est un vecteur*** ligne de dimension *n* et ***[D] devient un scalaire d :***

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t) \\ s(t) = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{\mathbf{x}}(t) + de(t) \end{cases}$$

Remarque : Il est rare que la sortie du système soit directement reliée à son entrée. On a donc très souvent $d = 0$.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Résoudre les équations d'état consiste à déterminer l'expression du vecteur d'état **x(*t) en fonction du temps,*** autrement dit à déterminer les expressions temporelles des *n variables d'état, connaissant le système (c'est*à-dire connaissant **[A], (B) et (C)) et connaissant l'entrée *e(t) qui lui est appliquée.***

Étude préalable

Si on avait affaire à un système décrit par une simple équation différentielle et non par un système différentiel, l'équation d'état se résumerait à :

$$x' = ax + be(t)$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

La solution d'une telle équation différentielle est connue et a pour expression : ai

$$x(t) = \mathrm{e}^{at}\, x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)}\, be(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

On reconnaît bien sûr dans cette expression la somme de la solution de l'équation correspondant au régime libre (ou autonome), soit $e^{at}x(0)$ *et de la solution correspondant au régime forcé (ou commandé).*

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Généralisation au système vectoriel

Considérons le système différentiel représentant les équations d'état :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t)$$

On obtient, par généralisation du résultat précédent :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{e}^{[\mathbf{A}]t}\,\underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{[\mathbf{A}](t-\tau)}\,(\underline{\mathbf{B}})\,e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Dans cette écriture, $\mathrm{e}^{[\mathbf{A}]t}$ représente une matrice exponentielle que l'on note en général $\mathbf{\Phi}(t)$ et que l'on appelle matrice de transition du système.

Si on connaît l'état du système à un instant t_1 différent de 0, on peut calculer son état à un instant t quelconque :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{e}^{[\mathbf{A}](t-t_1)}\,\underline{\mathbf{x}}(t_1) + \int_{t_1}^t \mathrm{e}^{[\mathbf{A}](t-\tau)}\,(\underline{\mathbf{B}})\,e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Calcul de la matrice de transition:

L'opération la plus délicate, dans la résolution des équations d'état, consiste à calculer la matrice de transition.

De nombreuses méthodes existent. Nous nous contenterons de présenter ici les plus classiques.

a. Utilisation de la transformation de Laplace:

Appliquons la transformation de Laplace au système d'équations différentielles de la représentation d'état :

$$X'(t) = [A]\,x(t) + (B)\,e(t) \Rightarrow$$

$$pX(p) - x(0) = [A]X(p) + (B)E(p)$$

soit : $(pI - [A])X(p) = x(0) + (B)\,E(p)$

d'où : $X(p) = (pI - [A])^{-1}\,x(0) + (pI - [A])^{-1}\,(B)\,E(p)$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{e}^{[\mathbf{A}]t}\,\underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{[\mathbf{A}](t-\tau)}\,(\underline{\mathbf{B}})\,e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

la matrice de transition $\mathrm{e}^{[\mathbf{A}]t}$ possède pour transformée de Laplace la matrice $(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}$. Transformons l'expression de $(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}$:

$$(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} = \frac{1}{p}\left(\mathbf{I} - \frac{[\mathbf{A}]}{p}\right)^{-1} = \left(\frac{\mathbf{I}}{p} + \frac{[\mathbf{A}]}{p^2} + \frac{[\mathbf{A}]^2}{p^3} + \cdots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{p^{n+1}} + \cdots\right)$$

En appliquant la transformation de Laplace inverse, on obtient :

$$\mathrm{e}^{[\mathbf{A}]t} = \left(\mathbf{I} + [\mathbf{A}]\,t + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{n!}t^n + \cdots\right)$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Application:

On peut utiliser directement l'expression du développement de Taylor à condition que la matrice de commande soit nilpotente.

Considérons par exemple la matrice de commande : $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On a : $$[\mathbf{A}]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent : $$[\mathbf{A}]^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \forall n \geqslant 2$$

On a donc :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \left(\mathbf{I} + [\mathbf{A}]\, t + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!} t^2 + \cdots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{n!} t^n + \cdots \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

b. Méthode de diagonalisation de la matrice de transition:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Cette constatation nous conduit naturellement à imaginer une méthode relativement facile pour calculer $e^{[A]t}$ ***: il suffit de diagonaliser la matrice [A].***

Les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice sont définis par :

$$[\mathbf{A}]\left(\underline{\mathbf{v}}_i\right) = \lambda_i \left(\underline{\mathbf{v}}_i\right)$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Les vecteurs non nuls $(\underline{\mathbf{v}}_i)$ sont les vecteurs propres de $[\mathbf{A}]$; les λ_i sont ses valeurs propres. Ces grandeurs sont très faciles à déterminer, étant donné que les λ_i sont les racines de l'équation caractéristique de la matrice $[\mathbf{A}]$ définie par :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = 0$$

Si on appelle $[\mathbf{\Delta}]$ la matrice diagonale formée des valeurs propres de la matrice $[\mathbf{A}]$ et $[\mathbf{T}]$ la matrice modale formée de ses vecteurs propres, on a :

$$[\mathbf{\Delta}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \\ \\ \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{v}}_n \\ \\ \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions :

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{T}]\,[\mathbf{\Delta}]\,[\mathbf{T}]^{-1}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Il est alors facile de vérifier que :

$$[\mathbf{A}]^n = \left([\mathbf{T}]\,[\boldsymbol{\Delta}]\,[\mathbf{T}]^{-1}\right) \times \left([\mathbf{T}]\,[\boldsymbol{\Delta}]\,[\mathbf{T}]^{-1}\right) \times \cdots \times \left([\mathbf{T}]\,[\boldsymbol{\Delta}]\,[\mathbf{T}]^{-1}\right) = [\mathbf{T}]\,[\boldsymbol{\Delta}]^n\,[\mathbf{T}]^{-1}$$

Comme :
$$e^{[\mathbf{A}]t} = I + [\mathbf{A}]\,t + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{n!}t^n + \cdots$$

on a :
$$e^{[\mathbf{A}]t} = [\mathbf{T}]\left(I + [\boldsymbol{\Delta}]\,t + \frac{[\boldsymbol{\Delta}]^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{[\boldsymbol{\Delta}]^n}{n!}t^n + \cdots\right)[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]\,e^{[\boldsymbol{\Delta}]t}\,[\mathbf{T}]^{-1}$$

Par conséquent :
$$e^{[\mathbf{A}]t} = [\mathbf{T}]\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}[\mathbf{T}]^{-1}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

f. Exemple

Considérons la matrice de commande $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Calculer la matrice de transition en utilisant, dans un premier temps, la méthode de diagonalisation. Puis vérifier avec la méthode de Cayley-Hamilton

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Solution:

Les valeurs propres de cette matrices sont solutions de son équation caractéristique :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & -2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}\lambda+2 & 2\\ 1 & \lambda+3\end{bmatrix} = 0$$

soit :
$$(\lambda+2)(\lambda+3) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

d'où :
$$\lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = -4$$

Calculons le premier vecteur propre :

$$\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}-2x - 2y = -x\\ -x - 3y = -y\end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -2y$$

Remarque : Ne soyons pas surpris de ce résultat : il existe une infinité de vecteurs propres, tous colinéaires, associés à une valeur propre.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Solution suite:

Prenons par exemple : $\underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le second vecteur propre se calcule tout aussi facilement :

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -4x \\ -x - 3y = -4y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Prenons par exemple : $\underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc : $[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Solution suite:

$$[\mathbf{T}]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{T}]}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{\Delta}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} & e^{-4t} \\ e^{-t} & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

c. Méthode de Cayley-Hamilton

Considérons une matrice [**A**] **et son équation caractéristique :**

$$\det(\lambda \mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

On a toujours : $$[\mathbf{A}]^n + a_{n-1}[\mathbf{A}]^{n-1} + \cdots + a_1[\mathbf{A}] + a_0\mathbf{I} = 0$$

On peut donc écrire :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = f_{n-1}(t)[\mathbf{A}]^{n-1} + f_{n-2}(t)[\mathbf{A}]^{n-2} + \cdots + f_1(t)[\mathbf{A}] + f_0(t)\mathbf{I}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

La recherche des fonctions *fi(t) ne pose aucune difficulté : les valeurs propres de la matrice [**A**] **vérifiant*** obligatoirement cette équation, on construit un système de *n équations où les n fonctions fi(t) sont les* inconnues et la résolution de ce système permet de déterminer $e^{[A]t}$.

Soit :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = f_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} + \cdots + f_1(t)\lambda_1 + f_0(t) \\ e^{\lambda_2 t} = f_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} + \cdots + f_1(t)\lambda_2 + f_0(t) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} = f_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} + \cdots + f_1(t)\lambda_n + f_0(t) \end{cases}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Vérifions le résultat de l'exemple précèdent au moyen de la méthode de Cayley-Hamilton.

$$e^{[A]t} = f_1(t)\,[\mathbf{A}] + f_0(t)\mathbf{I} = f_1(t)\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + f_0(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = e^{-t} = -f_1(t) + f_0(t) \\ e^{\lambda_2 t} = e^{-4t} = -4f_1(t) + f_0(t) \end{cases}$$

d'où :

$$e^{-t} - e^{-4t} = 3f_1(t) \quad \Rightarrow \quad f_1(t) = \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3}$$

et :

$$f_0(t) = f_1(t) + e^{-t} = \frac{4\,e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3}$$

On a donc :

$$e^{[A]t} = \left(\frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3}\right)\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + \left(\frac{4\,e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$e^{[A]t} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

CALCUL DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME EN FONCTION D'UN SIGNAL DE COMMANDE

Nous avons déjà montré que : $$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{e}^{[\mathbf{A}]t}\,\underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{[\mathbf{A}](t-\tau)}\,(\underline{\mathbf{B}})\,e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

La connaissance de la matrice de transition permet de calculer directement le vecteur d'état du système à partir de cette expression. Il y a bien évidemment autant de calculs à effectuer qu'il y a de variables d'état.

Considérons l'exemple précédent: $$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t)$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } (\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Supposons que ce système soit sollicité par un échelon unitaire, *e(t) = 1, et que son état initial est défini* par :

$$\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CALCUL DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME EN FONCTION D'UN SIGNAL DE COMMANDE

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{e}^{[A]t}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} & -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} \\ -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \right\} \mathrm{d}\tau$$

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \left[\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)}\right] \mathrm{d}\tau \\ \int_0^t \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4(t-\tau)}\right] \mathrm{d}\tau \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \left[2\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-4(t-\tau)}\right] \mathrm{d}\tau \\ \int_0^t \left[-\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-4(t-\tau)}\right] \mathrm{d}\tau \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(7 + e^{-4t} - 8e^{-t}\right) \\ -\frac{5}{4} + \frac{e^{-4t}}{4} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Exercices

1- Calcul de la matrice de transition d'un système d'ordre 2

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer l'expression de la matrice de transition de ce système.

2- **Détermination de l'état d'un système en réponse à un échelon unité**

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t) \quad \text{avec} \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système se trouve dans l'état $\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ce système étant soumis à une entrée en échelon unité, déterminer à tout instant t l'expression $\mathbf{x}(t)$ de son vecteur d'état.

On pourra remarquer que la matrice de commande est nilpotente et choisir la méthode de calcul direct de la matrice de transition.

Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert

Soit un système d'espace d'état

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$

$$y = C\,x + D\,u$$

La conversion de ce système vers la fonction de transfert peut être obtenue en lui appliquant la transformée de Laplace aux deux côtés. (En supposant les conditions initiales sont nulles) :

$$s\,X(s) = A\,X(s) + B\,U(s)$$

$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$$

ou sous la forme

$$s\,X(s) - A\,X(s) = B\,U(s)$$

$$Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s)$$

Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert

On trouve $X(s)$ telle que :

$$X(s) = (s\,I - A\,)^{-1} B\,U(s)$$

Si on remplace $X(s)$ dans l'équation de sortie $Y(s)$ on trouve :

$$Y(s) = [C(s\,I - A\,)^{-1} B + D]\,U(s)$$

La fonction de transfert $G(s)$ du système étant :

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(s\,I - A\,)^{-1} B + D]}$$

Exemple:

Soit un système donné par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Passage de l'espace d'état vers la fonction de transfert

Exemple:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}}{(s+2)(s-3)}$$

$$[\boldsymbol{C}(s\,I - A\,)^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}}{(s+2)(s-3)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0$$

$$\frac{\begin{bmatrix} s+2 & s-2 \end{bmatrix}}{(s+2)\ (s-3)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{s^2 - s - 6} = \boldsymbol{G(s)}$$

On peut utiliser la fonction préétablie de Matlab (**ss2tf**), on obtient :

Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état

En se basant sur la méthode des variables de phase, on peut convertir une fonction de transfert a une représentation d'état.
Soit le système représenté par la fonction de transfert G(p)

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{\sum_0^m b_i S^i}{S_n + \sum_0^{n-1} a_i S^i}$$ avec m<= n

Si on écrit U(s) et Y(s) sous la forme différentielle on aura:

$$\frac{d^n r}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dr}{dt} + a_0 = u$$

$$b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 r = y$$

Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état

Si on pose:

$$x_1 = r \qquad \dot{x}_1 = \frac{dr}{dt}$$

$$x_2 = \frac{dr}{dt} \qquad \dot{x}_2 = \frac{d^2r}{dt^2}$$

$$\vdots \qquad \Rightarrow \qquad \vdots$$

$$x_n = \frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}} \qquad \dot{x}_n = \frac{d^n r}{dt^n}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 \ldots - a_{n-1} x_n + u$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 \ldots + b_m x_m$$

Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état

La forme matricielle de la représentation d'état est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état

Exercice 1:

Soit un système possédant la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

On peut trouver toutes les représentations d'état possibles pour la même fonction de transfert avec les mêmes étapes précédente.

En utilisant la fonction préétablie de Matlab (**tf2ss**), on obtient la représentation d'état. Matlab par défaut ne donne qu'une seule représentation.

Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état

$$G(s) = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

On a $(s^3+9s^2+26s+24)C(s) = 24R(s)$. En forme différentielle, si les conditions initiales sont nulles :

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r$$

Les variables d'état sont :

$$x_1 = c$$
$$x_2 = \dot{c}$$
$$x_3 = \ddot{c}$$

Les équations d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r$$
$$y = c = x_1$$

En forme de matrices :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Passage de la fonction de transfert vers l'espace d'état

Exercice 2:

Soit un système possédant la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 6}$$

Trouver toutes les représentations d'état possibles pour la même fonction de transfert avec les mêmes étapes précédente.

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

Définitions

a) Commandabilité vers 0:

Un système est dit commandable à l'instant *t1 s'il est possible de déterminer un signal d'entrée e(t) sur* l'intervalle *[t1, t2] de manière à amener le système de l'état* ***x(t1) = x1 vers l'état x(t2) = 0.***
Si un système est commandable quel que soit *t1, il est dit complètement commandable.*

b) Accessibilité:

Un système est dit accessible à l'état **x2 s'il est possible de déterminer un signal d'entrée *e(t) sur l'intervalle*** *[t1, t2] de manière à amener le système d'un état* ***x(t1) = x1 vers l'état x(t2) = x2.***
Si un système est accessible quel que soit **x2, il est dit complètement accessible.**

Un système est complètement commandable s'il est possible, quel que soit l'intervalle *[t1, t2] et quelque* soit l'état **x2, de déterminer un signal de commande *e(t) sur [t1, t2] qui amène le système de n'importe*** quel état ***x(t1) = x1 vers l'état voulu x(t2) = x2.***

Remarque : La notion de commandabilité ne porte que sur l'état du système et non sur sa sortie.

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

Critère de Kalman

Il existe de nombreux critères de commandabilité ou de non-commandabilité. Le critère de Kalman est l'un des plus couramment utilisés.
Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs:

$$(B)\ ,\ [A]\ (B)\ ,\ [A]^2\ (B)\ ,\ \ldots\ ,\ [A]^{n-1}\ (B)$$ ***sont linéairement indépendants.***

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice de commandabilité par la matrice formée des *n vecteurs colonnes*

$$(B)\ ,\ [A]\ (B)\ ,\ [A]^2\ (B)\ ,\ \ldots\ ,\ [A]^{n-1}\ (B)\ :$$

$$[C]_{([A](B))} = (B)\ [A]\ (B)\ [A]^2\ (B)\ \ldots\ [A]^{n-1}\ (B)$$

La paire [A] , ***(B) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité*** est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

Exemple:

Reprenons l'exemple du système régi par les équations d'état suivantes :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t)$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } (\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\underline{\mathbf{B}}))} = [(\underline{\mathbf{B}}) \quad [\mathbf{A}]\,(\underline{\mathbf{B}})]$$

$$[\mathbf{A}]\,(\underline{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

Exemple suite:

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathrm{A}](\underline{\mathrm{B}}))} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est bien de rang 2, étant donné que son déterminant n'est pas nul :

$$\det [\mathbf{C}]_{([\mathrm{A}](\underline{\mathrm{B}}))} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

Le système est donc complètement commandable.

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

Calcul de la commande d'un système:

a) Principe de la construction de Kalman:

L'objectif consiste ici à calculer le signal de commande (ou d'entrée) du système, avec pour objectif de l'amener de l'état initial **x(0) à l'instant *t = 0* à *un état déterminé x(t) à un instant t quelconque. Si le*** système est complètement commandable (ou accessible), le calcul de cette commande est possible :

On a :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{e}^{[\mathrm{A}]t}\,\underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{[\mathrm{A}](t-\tau)}\,(\underline{\mathbf{B}})\,e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

ou encore :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) - \mathrm{e}^{[\mathrm{A}]t}\,\underline{\mathbf{x}}(0) = \int_0^t \mathrm{e}^{[\mathrm{A}](t-\tau)}\,(\underline{\mathbf{B}})\,e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

Il s'agit donc de calculer l'expression de e***(t) sur l'intervalle [0, t] pour atteindre cet objectif.***

Kalman a montré que le signal de commande e***(t) pouvait être construit à partir de l'expression suivante :***

$$e(\tau) = (\underline{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}}\, \mathrm{e}^{[\mathrm{A}]^{\mathrm{T}}(t-\tau)}\, [\mathbf{W}]^{-1} \left[\underline{\mathbf{x}}(t) - \mathrm{e}^{[\mathrm{A}]t}\, \underline{\mathbf{x}}(0)\right]$$

La matrice [W] étant définie par :

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t \mathrm{e}^{[\mathrm{A}]\tau}\, (\underline{\mathbf{B}})\, (\underline{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}}\, \mathrm{e}^{[\mathrm{A}]^{\mathrm{T}}\tau}\, \mathrm{d}\tau$$

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

b) Exemple:

On souhaite amener le système défini par :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t)$$

avec : $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $(\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d'un état initial : $\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

à l'état final : $\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $t = 0{,}5$ s

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

b) Exemple suite:

Comme [A] est une matrice diagonale, sa transposée lui est égale.

On a donc : $$e^{[A]\tau} = e^{[A]^T\tau} = \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix}$$

d'où : $$[W] = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

Soit, tous calculs faits, par exemple avec Mathematica :

$$[W] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(e^{-4t} - 1) & \frac{2}{3}(e^{-3t} - 1) \\ \frac{2}{3}(e^{-3t} - 1) & -2(e^{-2t} - 1) \end{bmatrix}$$

Par conséquent : $$[W]^{-1} = \frac{1}{\det[W]} \begin{bmatrix} -2(e^{-2t} - 1) & -\frac{2}{3}(e^{-3t} - 1) \\ -\frac{2}{3}(e^{-3t} - 1) & -\frac{1}{4}(e^{-4t} - 1) \end{bmatrix}$$

Pour $t = 0{,}5$ s, on a : $$\det[W] = \begin{vmatrix} 0{,}216 & -0{,}518 \\ -0{,}518 & 1{,}264 \end{vmatrix} = 0{,}0047$$

COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

b) Exemple suite:

et :

$$[\mathbf{W}]^{-1} = \begin{bmatrix} 269 & 110 \\ 110 & 46 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$e(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2(0,5-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-(0,5-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 269 & 110 \\ 110 & 46 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 208e^{-2(0,5-\tau)} - 164e^{-(0,5-\tau)}$$

On peut sans peine vérifier que ce signal de commande amène bien le système dans l'état désiré au bout d'un temps $t = 0,5$ s :

$$\underline{\mathbf{x}}(0,5) = \int_0^{0,5} \begin{bmatrix} e^{-2(0,5-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-(0,5-\tau)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e(\tau) d\tau \approx \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

En représentation d'état, il nous importe d'être capable de connaître à chaque instant, l'état du système, autrement dit de pouvoir déterminer le vecteur d'état **x(*t*)**. ***Certaines variables d'état sont très faciles à mesurer. Un capteur placé*** au bon endroit, à l'intérieur du système, peut nous donner accès à l'information recherchée. Dans ce cas, on dit que la variable d'état considérée est mesurable. Dans d'autres cas, cette investigation directe n'est pas possible. La grandeur est alors dite non mesurable.

En revanche, elle peut, tout en étant non mesurable, influencer la sortie *s(t) du système. Il est alors possible,* à partir de la mesure de la sortie, de déduire la grandeur considérée. On dit que celle-ci est observable.

OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

Définition:

Un système est dit observable à un instant *t1, si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur* un intervalle de temps *[t1, t2] permet de calculer l'état du système à l'instant t1.*

Si un système est observable quel que soit l'instant *t1, il est dit complètement observable.*

OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

Critère d'observabilité

On considère un système défini par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t) \\ s(t) = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{\mathbf{x}}(t) + \mathrm{d}\cdot e(t) \end{cases}$$

Ce système est complètement observable si et seulement si les vecteurs lignes:

$$(\mathbf{C})\,,\ (C)\,[A]\,,(\mathbf{C})\,[\mathbf{A}]^2\,,\ \ldots\,,\ (C)\,[A]^{n-1}$$

sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des *n vecteurs lignes:*

$$(C)\,,\ (C)\,[A]\,,\ (C)\,[A]^2\,,\ \cdots,\ (C)\,[A]^{n-1}\ :$$

OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

$$[\underline{\mathbf{O}}]_{([\mathbf{A}](\underline{\mathbf{C}}))} = \begin{bmatrix} (\underline{\mathbf{C}}) \\ (\underline{\mathbf{C}})\,[\mathbf{A}] \\ (\underline{\mathbf{C}})\,[\mathbf{A}]^2 \\ \vdots \\ (\underline{\mathbf{C}})\,[\mathbf{A}]^{n-1} \end{bmatrix}$$

La paire [**A**] , ***(C) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière,*** autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

Cas des systèmes non observables

Si la matrice d'observabilité est de rang $r < n$, *le système n'est pas complètement observable. On montre* que dans ce cas, il est possible de trouver une matrice de changement de base [**T**] **telle que :**

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}\right] = [\mathbf{T}]\,[\mathbf{A}]\,[\mathbf{T}]^{-1}, \left(\underline{\tilde{\mathbf{C}}}\right) = (\underline{\mathbf{C}})\,[\mathbf{T}]$$

avec :

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}\right] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \text{ et } \left(\underline{\tilde{\mathbf{C}}}\right) = \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\mathbf{C}}}_1 & \underline{\mathbf{0}} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \underline{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}(t) = \left[\tilde{\mathbf{A}}\right] \underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \left(\underline{\tilde{\mathbf{B}}}\right) e(t) \\ s(t) = \left(\underline{\tilde{\mathbf{C}}}\right) \underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{cases}$$

OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

Remarque : Le vecteur d'état subit bien évidemment le même changement de base : $\underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{T}]\,\underline{\mathbf{x}}(t)$.

Dans cette matrice $\left[\tilde{\mathbf{A}}\right]$ apparaît une sous-matrice $r \times r \left[\tilde{\mathbf{A}}_{11}\right]$ de rang r qui correspond à un sous-système qui lui, est complètement observable. Dans le vecteur $\left(\underline{\tilde{\mathbf{C}}}\right)$ apparaît un sous-vecteur possédant r composantes. On dit que le sous système défini par la paire $\left[\tilde{\mathbf{A}}_{11}\right], \left(\underline{\tilde{\mathbf{C}}}_1\right)$ est un sous-système complètement observable du système défini par la paire $[\mathbf{A}], (\underline{\mathbf{C}})$. Les r premières variables d'état sont les variables d'état observables du système. Les autres variables d'état ne sont pas observables.

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

Représentation d'état à partir de la fonction de transfert

Comme nous l'avons déjà mentionné, la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Dans les lignes qui suivent, nous présentons plusieurs types de représentation d'état que l'on peut obtenir à partir d'une fonction de transfert $G(p)$. *Le choix de la représentation peut dépendre de la forme disponible de la* fonction de transfert ou du type d'étude que l'on souhaite réaliser à partir du modèle. Rappelons encore que la représentation d'état d'un système n'est pas unique et que les propriétés du système ne sont en aucun cas liées à la forme choisie.

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

a) Représentation modale

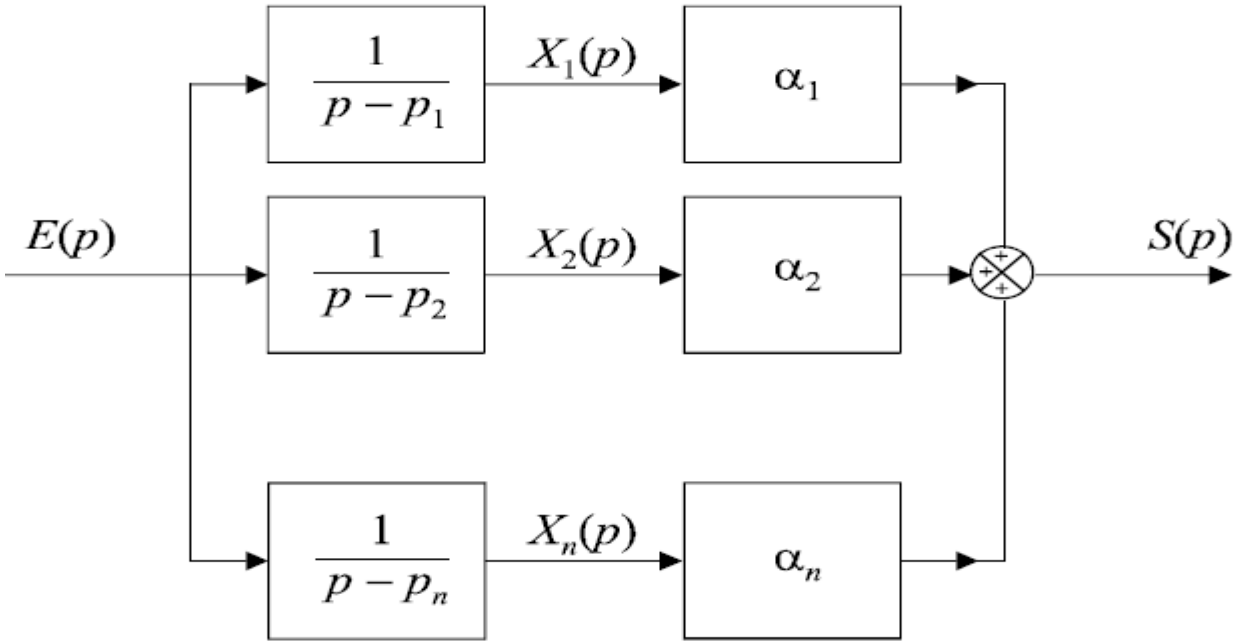
Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien à la représentation d'un système dont la fonction de transfert est placée sous la forme d'une somme. Soit *G(p) sa* fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{p - p_n}$$

Remarque : On dit alors que la fonction de transfert est strictement propre.

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

Cette écriture fait apparaître la somme de n fonctions de transfert et peut être matérialisée par le schéma:



RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

En appelant *Xi(p) la sortie du ième bloc élémentaire, on a :*

$$X_i(p) = \frac{\alpha_i}{p - p_i} E(p) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_i = p_i x_i + e$$

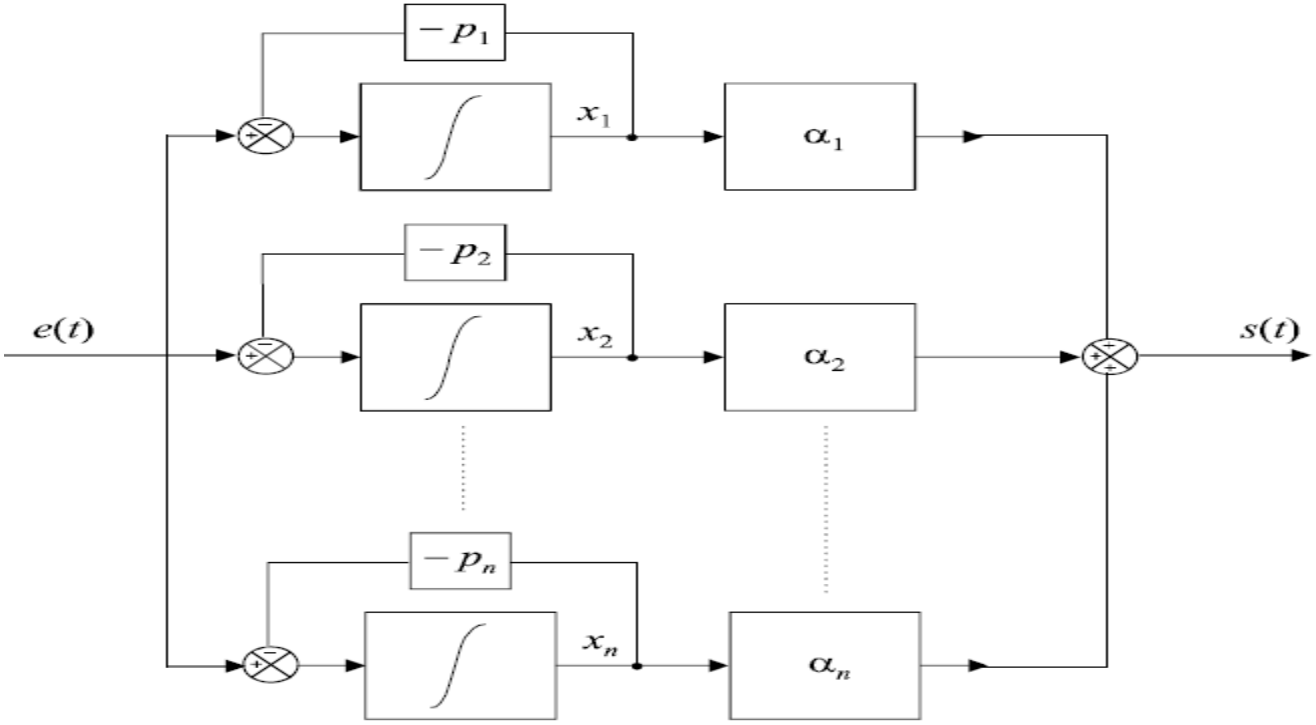
$$s(t) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

$$\begin{cases} \underline{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

La matrice de commande [**A**] **est diagonale et ses valeurs propres sont les pôles de la fonction de transfert.**

La traduction directe des équations d'état conduit à la représentation schématique suivantes.



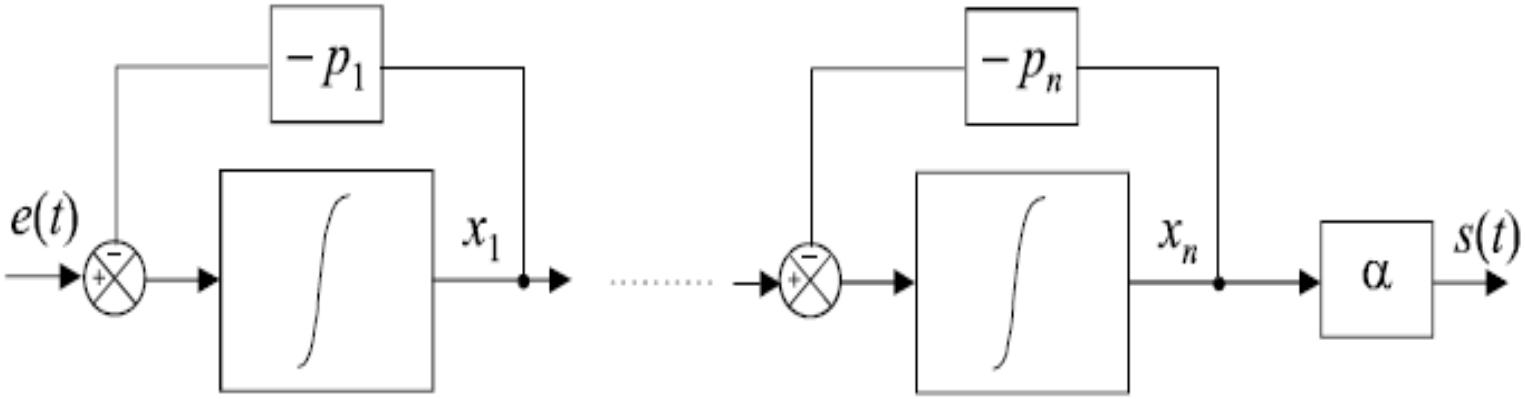
RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

b) Représentation série

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha}{(p - p_1)(p - p_2) \times \cdots \times (p - p_n)}$$

Cette écriture fait apparaître le produit de *n fonctions de transfert et peut être matérialisée par la mise en* cascade de *n blocs élémentaires.*

La figure suivante propose une représentation d'état cohérente avec cette forme en cascade de la fonction de transfert



RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

Dans ce cas, on a :

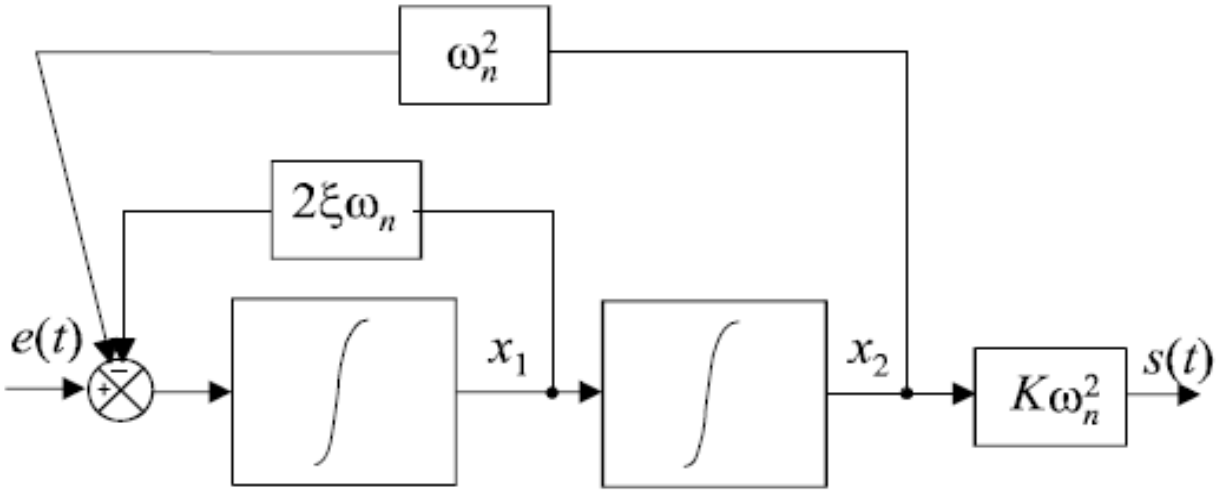
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + e \\ \dot{x}_2 = p_2 x_2 + x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n + x_{n-1} \\ s(t) = \alpha x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & p_n \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

Remarque : Une fonction de transfert G(p) peut possèder des pôles complexes conjugués, autrement dit il peut exister des termes non décomposables du type :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Dans ce cas, on utilise la représentation d'état suivante:



RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

c) Représentation compagne commandable

On suppose ici que la fonction de transfert n'est pas factorisée.

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \text{ avec } m < n$$

Choisissons *an = 1 (ce qui revient à diviser le numérateur et le dénominateur par an) et divisons le numérateur* et le dénominateur par p^n. *On obtient :*

$$G(p) = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \cdots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \cdots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

:

$$S(p) = \left[\frac{E(p)}{D(p)}\right] \times N(p) = Y(p)N(p)$$

$$Y(p) = \frac{E(p)}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \cdots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

$$Y(p) = E(p) - \left[a_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{p}\right)^n\right] Y(p)$$

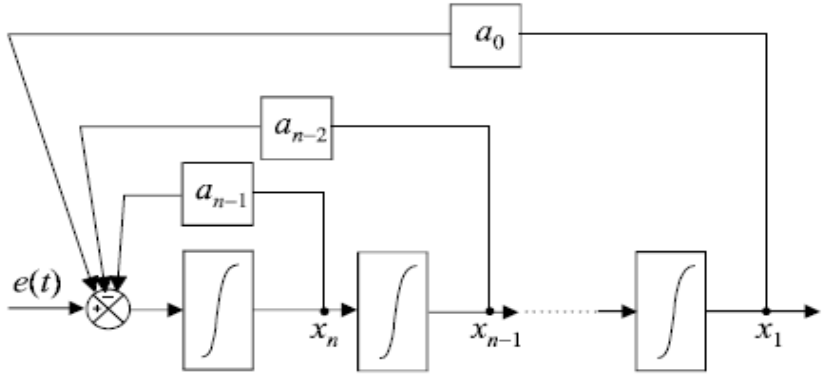
$$X_n(p) = \frac{Y(p)}{p}, X_{n-1}(p) = \frac{Y(p)}{p^2}, \ldots, X_1(p) = \frac{Y(p)}{p^n},$$

$$Y(p) = E(p) - \left[a_{n-1}X_n(p) + \cdots + a_1 X_2(p) + a_0 X_1(p)\right]$$

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

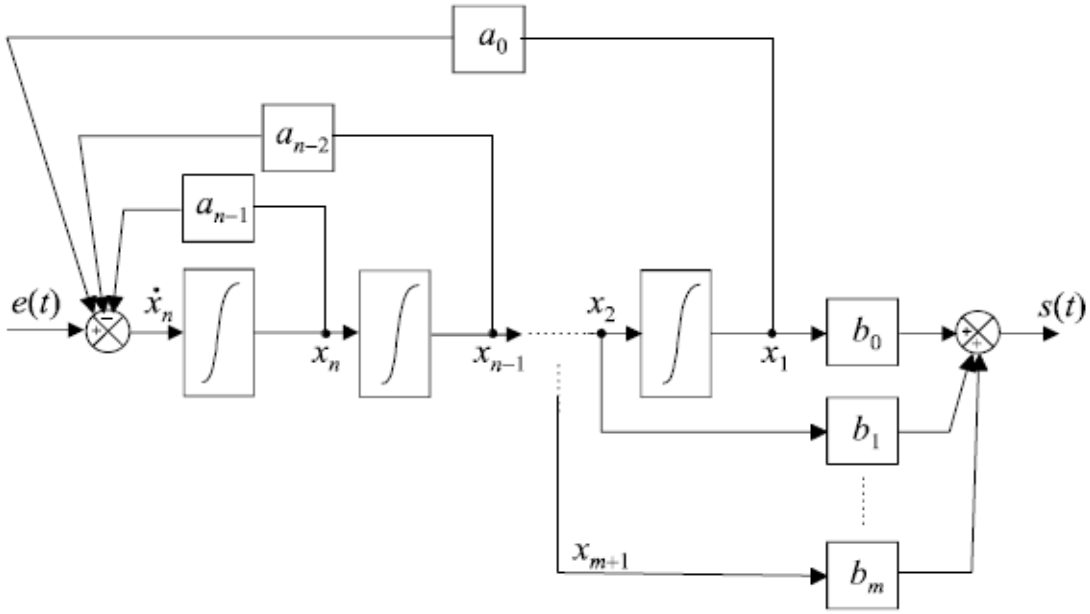
On peut alors choisir les *xi comme composantes du vecteur d'état et proposer la représentation suivante:*

Cette représentation est bien évidemment incomplète puisqu'il y manque la reconstruction du signal de sortie.



$$S(p) = \left[b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \cdots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}\right] Y(p)$$

$$S(p) = b_m X_{m+1}(p) + b_{m-1} X_m(p) + \cdots + b_1 X_2(p) + b_0 X_1(p)$$



RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + e(t) \\ s(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + a_m x_{m+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne car la matrice de commande du système contient, en une seule ligne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert.

Elle est dite commandable car, bien que seule la variable *xn soit directement affectée par le signal d'entrée, toutes les* variables d'état s'en trouvent influencées par intégrations successives.

Si un système est complètement commandable, alors on peut le mettre sous forme compagne commandable.

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

d) Représentation compagne observable

Plus simple à appréhender, la représentation compagne observable peut être mise en évidence à partir de la forme de *G(p) déjà transformée dans le paragraphe précédent:*

$$G(p) = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \cdots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \cdots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

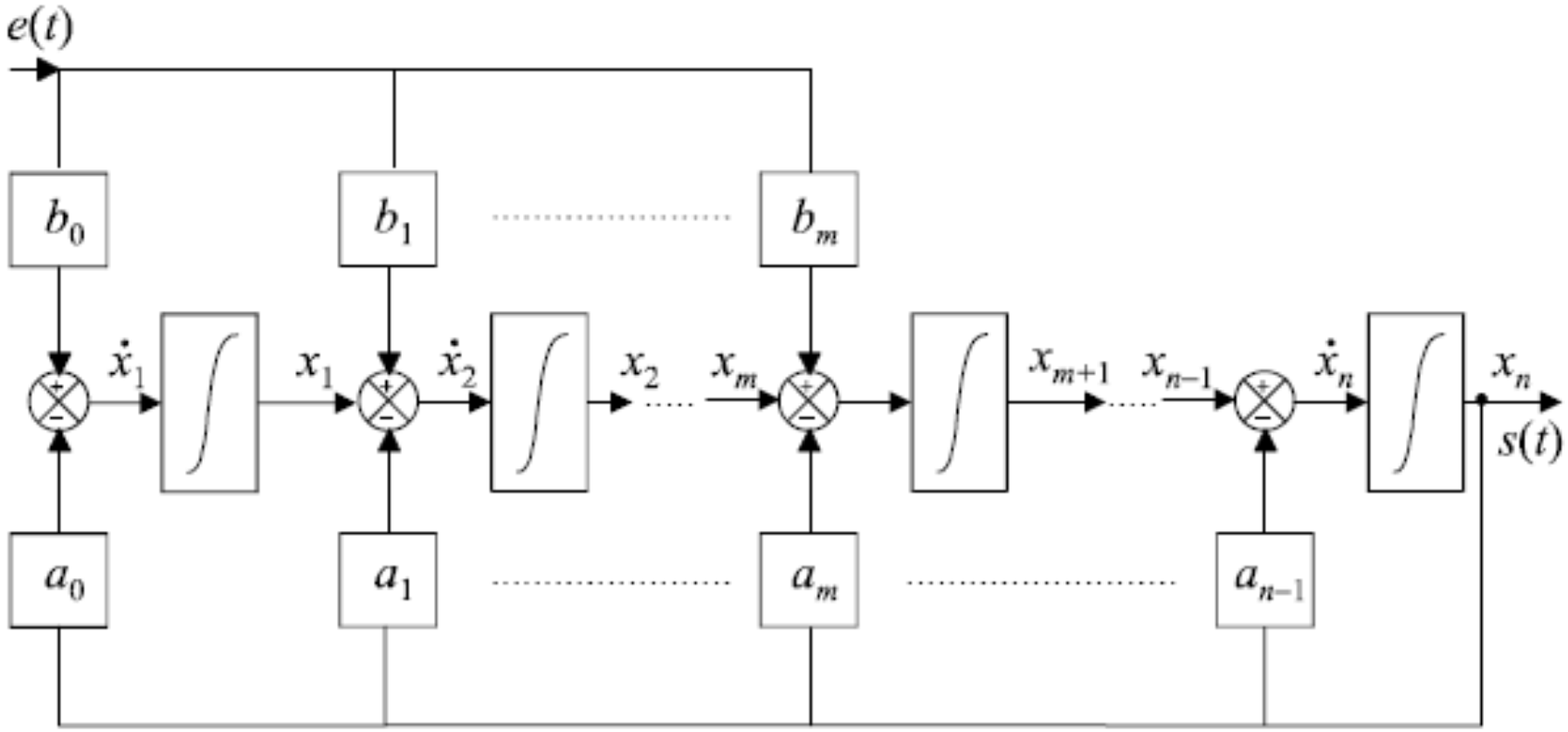
On peut alors écrire :

$$S(p) = -\left[a_{n-1} p^{-1} + \cdots + a_0 p^{-n}\right] S(p) + \left[b_m p^{m-n} + \cdots + b_0 p^{-n}\right] E(p)$$

soit :
$$S(p) = -\left[a_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \cdots + a_0\left(\frac{1}{p}\right)^n\right] S(p) + \left[b_m\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m} + \cdots + b_0\left(\frac{1}{p}\right)^n\right] E(p)$$

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

On peut alors proposer la représentation d'état suivante:



RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0 x_n + b_0 e(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_n + b_1 e(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{m+1} = x_m - a_m x_n + b_m e(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} x_n \\ s(t) = x_n \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

Calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état:

Si on applique la transformation de Laplace aux équations d'état, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{x}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t) \\ s(t) = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{x}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\underline{\mathbf{X}}(p) - \underline{x}(0) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{X}}(p) + (\underline{\mathbf{B}})\,E(p) \\ S(p) = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{\mathbf{X}}(p) \end{cases}$$

On a donc : $$p\underline{\mathbf{X}}(p) - [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{X}}(p) = \underline{x}(0) + (\underline{\mathbf{B}})\,E(p)$$

soit : $$(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])\,\underline{\mathbf{X}}(p) = \underline{x}(0) + (\underline{\mathbf{B}})\,E(p)$$

ou encore : $$\underline{\mathbf{X}}(p) = (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}\,\underline{x}(0) + (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}\,(\underline{\mathbf{B}})\,E(p)$$

On tire alors l'expression de $S(p)$:

$$S(p) = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{\mathbf{X}}(p) = (\underline{\mathbf{C}})\,(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}\,\underline{x}(0) + (\underline{\mathbf{C}})\,(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}\,(\underline{\mathbf{B}})\,E(p)$$

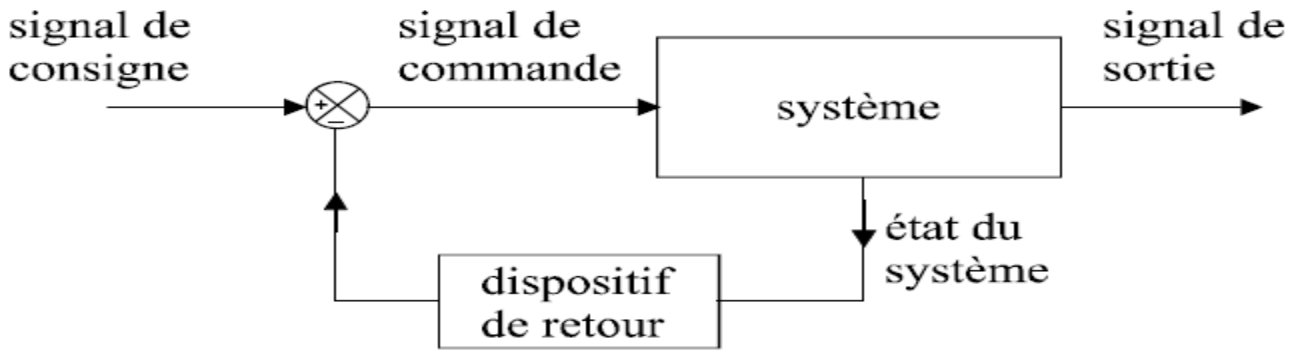
La fonction de transfert du système est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = (\underline{\mathbf{C}})\,(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}\,(\underline{\mathbf{B}})$$

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

PRINCIPE GÉNÉRAL DE LA COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système. La figure suivante présente une représentation schématique de ce concept.



COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

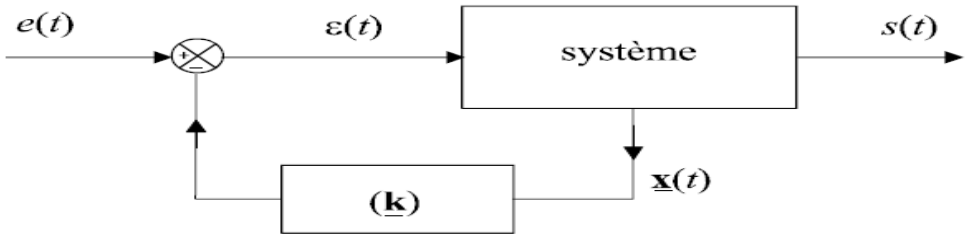
Vecteur de gain:

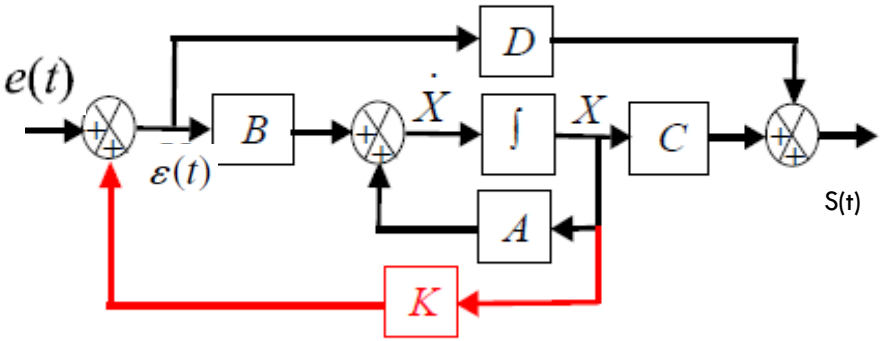
Le vecteur d'état étant supposé connu, le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de n signaux x1(t),...,xn(t), on le multiplie par un vecteur ligne (k) appelé vecteur de gain pour pouvoir effectuer cette soustraction.

On a alors : $(\underline{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$

$$\varepsilon(t) = e(t) - (\underline{\mathbf{k}})(\underline{\mathbf{x}}) = e(t) - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(t) = e(t) - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \cdots - k_n x_n$$





COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Fonction de transfert en boucle fermée:

On peut calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système à partir de la représentation d'état.

Supposons que le système, en boucle ouverte, soit régi par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,\varepsilon(t) \\ s(t) = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,\{e(t) - (\underline{\mathbf{k}})\,\underline{\mathbf{x}}(t)\}$$

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \{[\mathbf{A}] - (\underline{\mathbf{B}})\,(\underline{\mathbf{k}})\}\,\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}})\,e(t)$$

Appliquons la transformée de Laplace aux équations d'état :

$$\begin{cases} p\underline{\mathbf{X}}(p) = \{[\mathbf{A}] - (\underline{\mathbf{B}})\,(\underline{\mathbf{k}})\}\,\underline{\mathbf{X}}(p) + (\underline{\mathbf{B}})\,E(p) \\ S(p) = (\underline{\mathbf{C}})\,\underline{\mathbf{X}}(p) \end{cases}$$

$$\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})\,(\underline{\mathbf{k}})\}\,\underline{\mathbf{X}}(p) = (\underline{\mathbf{B}})\,E(p)$$

$$\underline{\mathbf{X}}(p) = \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})\,(\underline{\mathbf{k}})\}^{-1}\,(\underline{\mathbf{B}})\,E(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = (\underline{\mathbf{C}})\,\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})\,(\underline{\mathbf{k}})\}^{-1}\,(\underline{\mathbf{B}})$$

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Détermination du vecteur d'état

La commande par retour d'état suppose que l'on connaisse parfaitement le système, mais surtout, que l'on puisse accéder au vecteur d'état. Trois cas peuvent se présenter :

- tous les signaux internes composant le vecteur d'état sont accessibles à la mesure; dans ce cas, les variables d'état sont mesurables et des capteurs judicieusement placés permettent d'accéder aux informations nécessaires au retour d'état ;

- toutes les variables d'état ne sont pas mesurables mais le système est complètement observable ; il est alors possible de reconstruire le vecteur d'état à un instant donné à partir de la connaissance du signal de sortie et du signal d'entrée du système sur un intervalle de temps précédent ; on utilise pour ce faire, un observateur d'état ;

- le système n'est pas complètement observable ; il est alors nécessaire d'estimer le vecteur d'état au moyen d'un estimateur d'état.

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

COMMANDABILITÉ EN MODES EN TEMPS CONTINU

Nous supposons ici que le vecteur d'état est connu. L'expression de la fonction de transfert en boucle fermée nous permet d'effectuer un calcul de ses pôles.

$$\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})(\underline{\mathbf{k}})\}^{-1} = \frac{a\,dj\,\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})(\underline{\mathbf{k}})\}}{\det\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})(\underline{\mathbf{k}})\}}$$

$$H(p) = (\underline{\mathbf{C}})\frac{a\,dj\,\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})(\underline{\mathbf{k}})\}}{\det\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})(\underline{\mathbf{k}})\}}(\underline{\mathbf{B}})$$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont donc les racines de l'équation caractéristique det $\{pI - [A] + (\underline{B})(\underline{k})\} = 0$, ***c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice*** $[A] - (\underline{B})(\underline{k})$. ***La possibilité de*** choisir le vecteur de gain ($\underline{k}$) **de manière à positionner ces pôles sur des valeurs voulues, donc de conférer** au système en boucle fermée les performances que l'on souhaite lui assigner, s'appelle la commandabilité en modes du système.

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Critère de commandabilité en modes:

Un système est commandable en modes en boucle fermée s'il est complètement commandable en boucle ouverte.
Pour savoir s'il est possible d'assurer la commandabilité en modes du système en boucle fermée, il suffira donc de calculer la matrice de commandabilité :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\underline{\mathbf{B}}))} = \left[(\underline{\mathbf{B}}) \quad [\mathbf{A}](\underline{\mathbf{B}}) \quad [\mathbf{A}]^2(\underline{\mathbf{B}}) \quad \cdots \quad [\mathbf{A}]^{n-1}(\underline{\mathbf{B}})\right]$$

et de vérifier si elle est de rang *n autrement dit si son déterminant est non nul*.

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Cas des systèmes non commandables:

Dans le cas où le système n'est pas complètement commandable, nous avons vu, au chapitre 14, que les
équations d'état pouvaient se mettre, grâce à un changement de base approprié, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left[\tilde{\mathbf{A}}\right] \tilde{\mathbf{x}}(t) + \left(\tilde{\mathbf{B}}\right) e(t) \\ s(t) = \left(\tilde{\mathbf{C}}\right) \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

$\left[\tilde{\mathbf{A}}_{11}\right], \left(\tilde{\mathbf{B}}_1\right)$ étant complètement commandable.

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}\right] = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \text{ et } \left(\tilde{\mathbf{B}}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{B}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$$

lations : $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left[\tilde{\mathbf{A}}\right] \tilde{\mathbf{x}}(t) + \left(\tilde{\mathbf{B}}\right) \left\{ e(t) - \left(\tilde{\mathbf{k}}\right) \tilde{\mathbf{x}}(t) \right\}$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{B}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \left\{ e(t) - \left(\tilde{\mathbf{k}}\right) \tilde{\mathbf{x}}(t) \right\}$$

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Scindons les vecteurs $\underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$ et $\left(\underline{\tilde{\mathbf{k}}}\right)$ en deux sous-vecteurs.

On a :

$$\begin{pmatrix} \underline{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}_1 \\ \underline{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \underline{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \left\{ e(t) - \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\mathbf{k}}}_1 & \underline{\tilde{\mathbf{k}}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \underline{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} \right\}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \underline{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}_1 \\ \underline{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \underline{\tilde{\mathbf{B}}}_1 \underline{\tilde{\mathbf{k}}}_1} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12} - \underline{\tilde{\mathbf{B}}}_1 \underline{\tilde{\mathbf{k}}}_2} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \underline{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{\underline{\tilde{\mathbf{B}}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} e(t)$$

Un système non complètement commandable est stable en boucle fermée si et seulement si les modes non commandables sont stables, autrement dit si les valeurs propres qui correspondent à ces modes sont à parties réelles négatives (*i.e. si les pôles correspondant sont à parties réelles négatives*).

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Exemple de placement des pôles pour un système commandable

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } (\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

complètement commandable voir précédent

On souhaite placer ce système dans une boucle à retour d'état avec un vecteur de gain (**k**) =(*k1, k2*), de manière à obtenir une marge de phase égale à 60◦ *et un temps de montée de 3 s. Ces deux performances correspondent à une* fonction de transfert du second ordre caractérisée par un facteur d'amortissement ***z = 0,6 et une pulsation*** propre $\mathbf{w_n}$ ***= 1 rad/s, autrement dit possédant un dénominateur D(p) tel que :***

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = p^2 + 1{,}2p + 1$$

Il ne nous reste plus alors qu'à identifier le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée avec *D(p) pour déterminer le vecteur de gain :*

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

$$\det\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\underline{\mathbf{B}})(\underline{\mathbf{k}})\} = p^2 + 1{,}2p + 1$$

$$\begin{vmatrix} p + 2 + k_1 & 2 + k_1 \\ 1 - 2k_2 & p + 3 - 2k_2 \end{vmatrix} = p^2 + 1{,}2p + 1$$

$$(p + 2 + k_1)(p + 3 - 2k_2) - (1 - 2k_2)(2 + k_1) = p^2 + 1{,}2p + 1$$

$$p^2 + (5 + k_1 - 2k_2)p + (4 + k_1) = p^2 + 1{,}2p + 1$$

$$\begin{cases} 4 + k_1 = 1 \\ 5 + k_1 - 2k_2 = 1{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 0{,}4 \end{cases}$$

Le vecteur de gain qui assure au système les performances voulues en boucle fermée est donc :

$$(\mathbf{k}) = (-3 \;\; 0{,}4)$$

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Exemple pour un système non commandable

Considérons le système défini par : $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ et $(\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\underline{\mathbf{B}}))} = [(\underline{\mathbf{B}}) \quad [\mathbf{A}]\,(\underline{\mathbf{B}})]$$

Or :
$$[\mathbf{A}]\,(\underline{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où :
$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\underline{\mathbf{B}}))} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det [\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\underline{\mathbf{B}}))} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Cette matrice est de rang 1, étant donné que son déterminant est nul. Le système n'est donc pas commandable. En revanche, il est possible d'effectuer un changement de base de manière à mettre en évidence un sous-système commandable. Pour un système d'ordre 2, il suffit de diagonaliser la matrice de commande pour faire apparaître cette forme. Calculons alors les valeurs propres du système :

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

soit : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 2$

Calculons le premier vecteur propre :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = x, \text{ soit : } \underline{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le second vecteur propre se calcule tout aussi facilement :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = 2x, \text{ soit } \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = 2x, \text{ soit } \underline{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc : $$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forme recherchée est donc : $$\begin{cases} \dot{\underline{\tilde{\mathbf{x}}}}(t) = \left[\tilde{\mathbf{A}}\right] \underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t) + \left(\underline{\tilde{\mathbf{B}}}\right) e(t) \\ s(t) = \left(\underline{\tilde{\mathbf{C}}}\right) \underline{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \end{cases}$$

avec : $$\left[\tilde{\mathbf{A}}\right] = [\mathbf{T}]\,[\mathbf{A}]\,[\mathbf{T}]^{-1} \text{ et } \left(\underline{\tilde{\mathbf{B}}}\right) = [\mathbf{T}]^{-1}\,(\underline{\mathbf{B}})$$

soit : $$\left[\tilde{\mathbf{A}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \left(\underline{\tilde{\mathbf{B}}}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous constatons effectivement que seul le premier mode *et est commandable. Le second ne peut pas l'être* et, comme ce mode est instable, il ne sera pas possible d'assurer la stabilité du système en boucle fermée à l'aide du retour d'état au travers d'un vecteur de gain quel qu'il soit.