Automatique Linéaire continue

Prof: ECH-CHHIBAT

Contenu du cours

Introduction- systèmes linéaires continus invariants
Transformée de Laplace
Fonction de transfert et schéma fonctionnel
Réponse temporelle des systèmes
Réponse harmonique des systèmes
Stabilité des systèmes
Précision des systèmes asservis
Correction des systèmes asservis

Introduction à l'automatique

Introduction à l'automatique:

- L'objectif de l'automatique est de remplacer l'homme dans la plupart des taches (taches répétitives, pénibles, dangereuses, trop précises, trop rapides)
- Il existe deux grands domaines en automatique:

  *Les systèmes logiques: ne traitent que des données logiques (0/1, vrai/faux, marche/arrêt,...). Ils utilisent les moyens offerts par l'électronique (circuits logiques) Ils sont classés en 2 branches :

  - Systèmes combinatoires : les sorties du système ne dépendent que des variables d'entrées.

  - Systèmes séquentiels : les sorties dépendent bien sûr de l'évolution des entrées mais aussi de l'état précédent des sorties.

  Exemples : Machine à laver, ascenseur, distributeur de boissons…

Introduction à l'automatique

*Les systèmes asservis: Un système asservi est un système qui prend en compte, durant son fonctionnement, l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conforme à une consigne. Cette branche de l'automatique se décompose en deux autres sous branches :

- Régulation : maintenir une variable déterminée, constante et égale à une valeur, dite de consigne, sans intervention humaine.

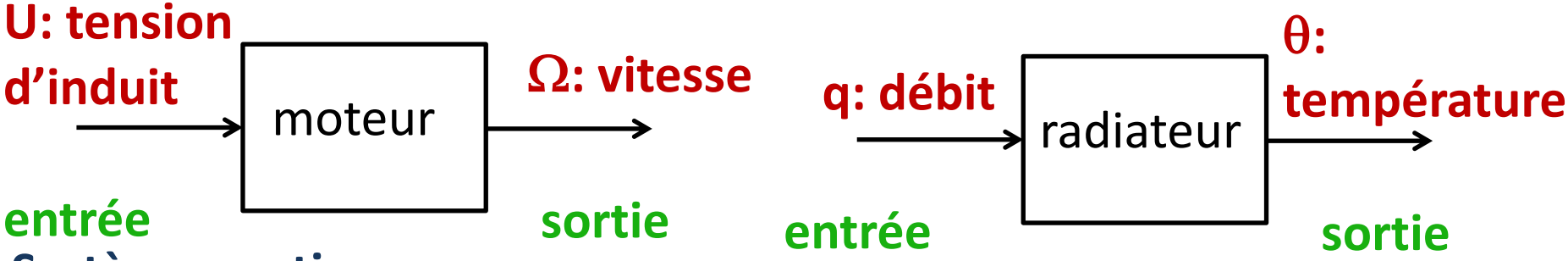
Exemple : Régulation de température d'une pièce.

- Asservissement: faire varier une grandeur déterminée suivant une loi imposée par un élément de comparaison.

Exemple : Régulation de la vitesse d'un moteur, Suivi de trajectoire d'un missile.

Notion de système:

- Un système est caractérisé par des entrées sur lesquelles nous pouvons agir et des sorties qui varient en conséquence. Il est représenté par un bloc contenant le nom du système.



Système continu:

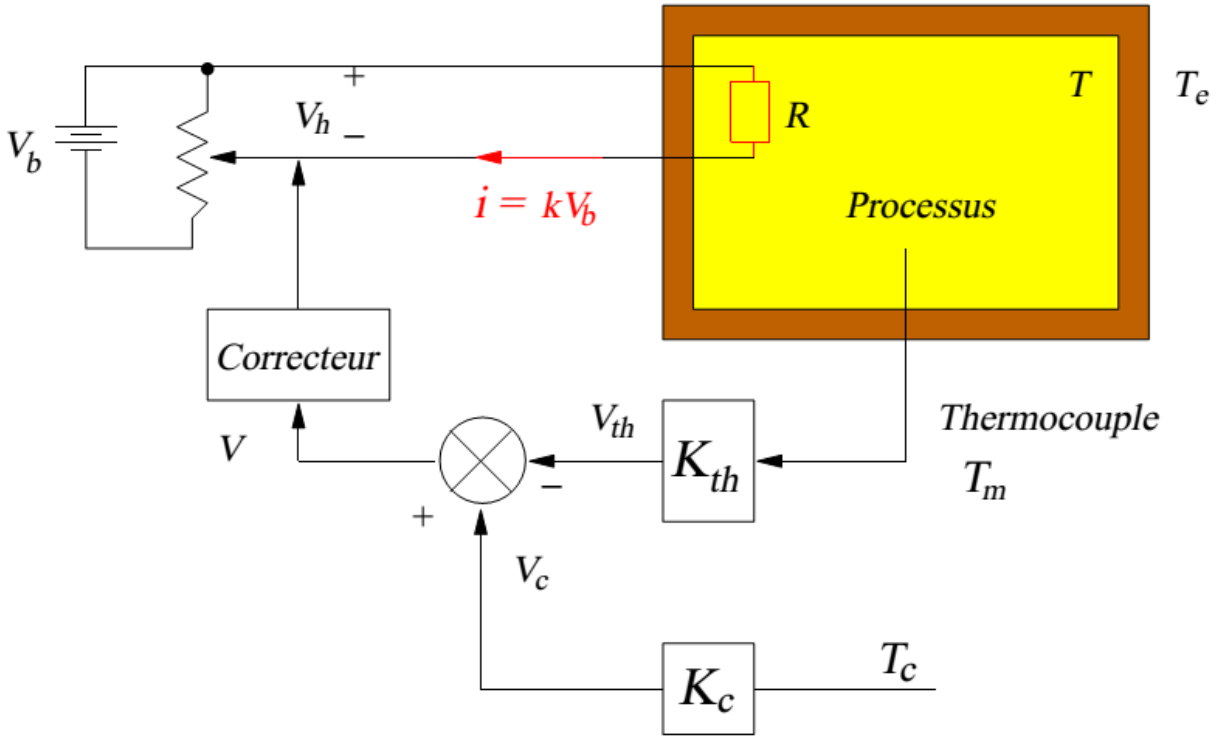
- Un système est continu lorsque toutes ces variables sont des fonctions continues du temps. On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets (ou échantillonnés).

Système invariant:

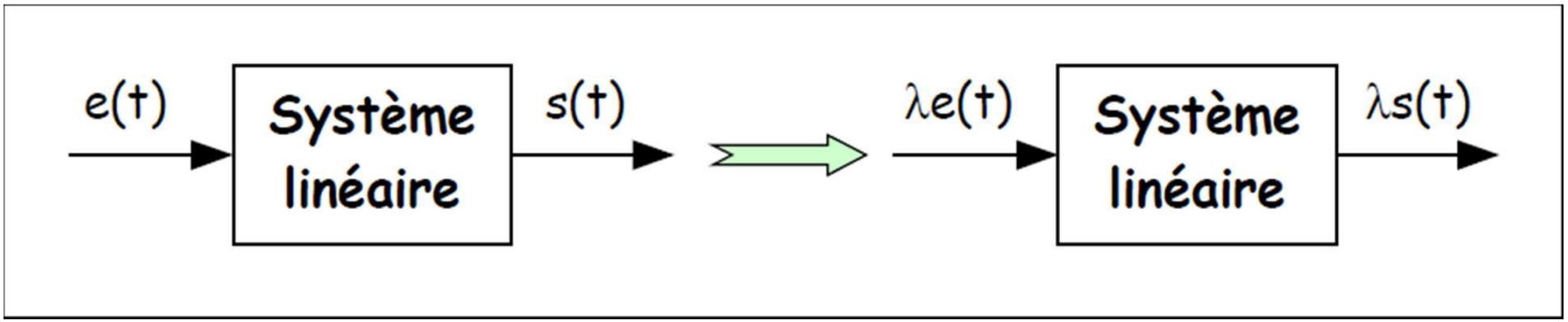
- Un système est invariant lorsque ces paramètres (masse, dimensions, résistance, inductance, ...) ne varient pas au cours du temps. Pour une entrée e(t), on obtient toujours la même réponse s(t).

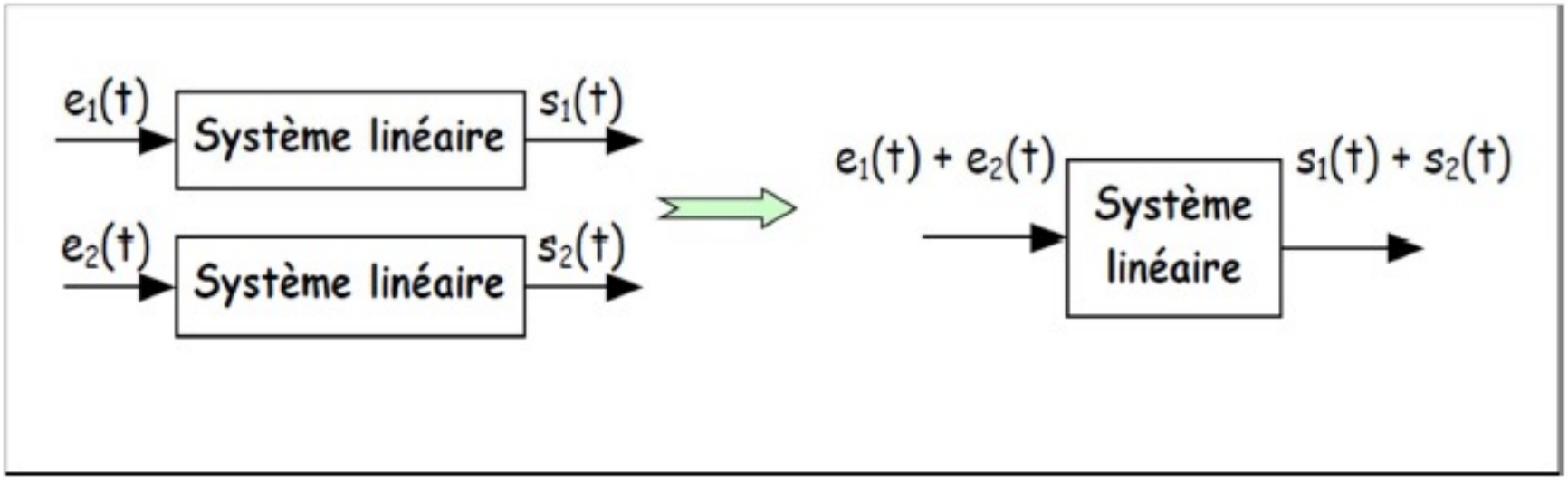
Notion de système:

Un système de contrôle thermique est représenté à la figure. La température **T** d'un processus donné est régulée dans un four à l'aide d'une résistance **R** . Par comparaison entre la tension de consigne **Vc** et la tension "mesurée" reflet de la température **T** , une tension de commande **V** est délivrée à l'actionneur modifiant en conséquence le courant parcourant la résistance **R** .



Système linéaire:





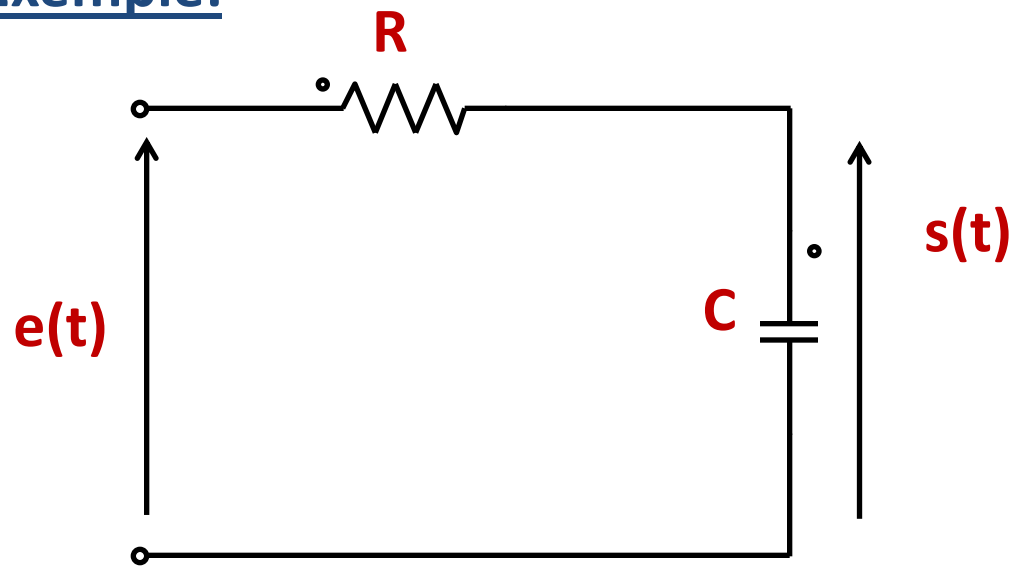
Dans ce cours, on se limitera à des systèmes linéaires continus et invariants **(SLCI)** monovariable (une seule entrée , une seule sortie).

Modèle mathématique d'un SLCI:

- Le comportement d'un SLCI est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants:

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n}$$
$$= b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \cdots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

Exemple:



déterminer la relation entre e(t) et s(t).

solution:

$$\begin{cases} e(t) = Ri(t) + s(t) \\ i(t) = C \frac{ds(t)}{dt} \end{cases}$$

D'où: $\mathrm{R}C \frac{ds(t)}{dt} + \mathrm{s(t)} = \mathrm{e(t)}$

Réponse d'un SLCI:

- Pour déterminer la réponse d'un SLCI à une entrée e(t) donnée, il suffit de résoudre l'équation différentielle.
- La solution s'écrit: $s(t) = s_0(t) + s_1(t)$

$s_0(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle,

$s_1(t)$ est une solution de l'équation sans second membre:

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = 0$$

Pour trouver $s_1(t)$ il suffit de résoudre l'équation caractéristique:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

Si x_1, x_2, … x_n sont les racines de l'équation caractéristique alors:

$$s_1(t) = A_1 e^{x_1 t} + A_2 e^{x_2 t} + \cdots + A_n e^{x_n t}$$

A_1, A_2, … A_n sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

Exemple: Pour le filtre RC déterminer s(t) pour e(t) échelon unitaire puis pour e(t) sinusoïdale,

Transformée de Laplace

définition:

- Soit f une fonction continue sur R+, on définit sa transformée de Laplace F par: $\boldsymbol{F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt}$
- On note $F(p) = TL[f(t)]$ et $f(t) = TL^{-1}[F(p)]$

Propriétés:

- **Linéarité:** $TL[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha TL[f(t)] + \beta TL[g(t)]$
- **Dérivation:** $TL[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)$

$$TL\left[f^{(n)}(t)\right] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{n-1}(0^+)$$

Lorsque les CI sont nulles: $TL\left[f^{(n)}(t)\right] = p^nF(p)$

- **Intégration:** $TL\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(p)}{p}$
- **Retard:** $TL[f(t-\tau)] = F(p)e^{-\tau p}$

Transformée de Laplace

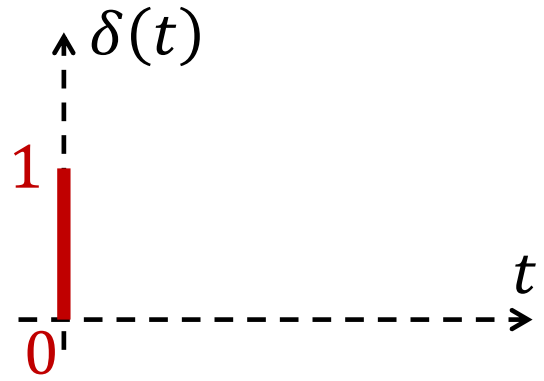
- **Théorème de la valeur finale:** $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$
- **Théorème de la valeur initiale:** $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$

TL des fonctions usuelles:

- **Impulsion de Dirac:**

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 \ pour\ t = 0 \\ 0 \ pour\ t \neq 0 \end{cases}$$

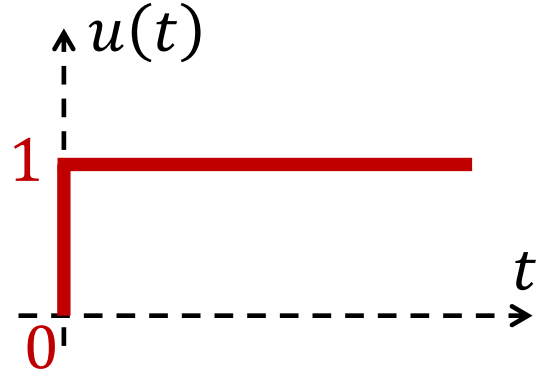
$$\mathbf{TL}[\boldsymbol{\delta(t)}] = \mathbf{1}$$



- **Echelon unitaire:**

$$u(t) = \begin{cases} 1 \ pour\ t \geq 0 \\ 0 \ pour\ t < 0 \end{cases}$$

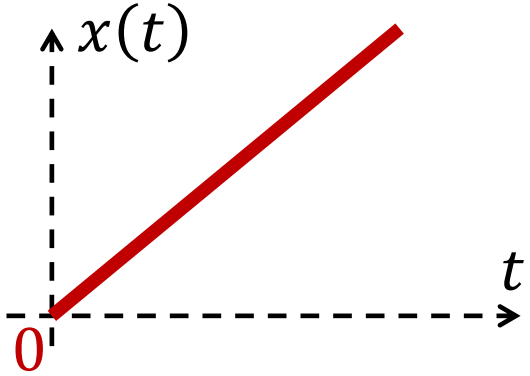
$$\mathbf{TL}[\boldsymbol{u(t)}] = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}$$



Transformée de Laplace

- **Rampe unitaire:**

$$x(t) = t.u(t) = \begin{cases} t \ \ pour\ t \geq 0 \\ 0 \ \ pour\ t < 0 \end{cases}$$



$$\mathbf{TL}[x(t)] = \frac{1}{p^2}$$

- **TL des fonctions sinusoidales:**

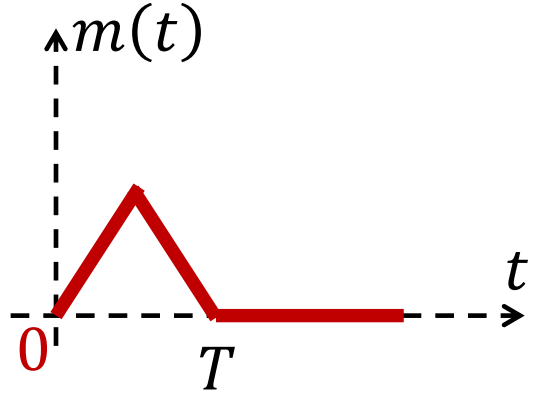
$$\mathbf{TL}[e^{-at}\ u(t)] = \frac{1}{p+a}$$

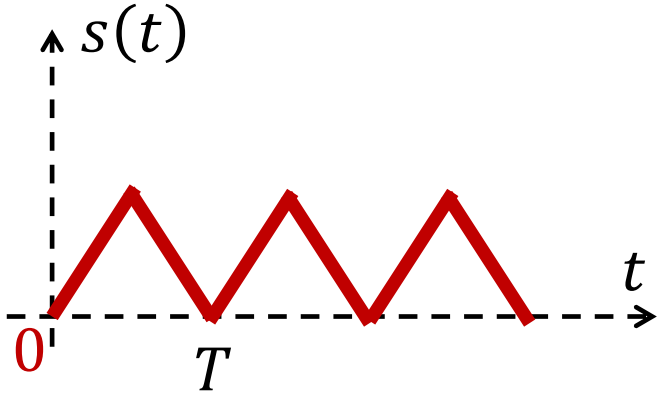
$$\mathbf{TL}[cos\omega t\ u(t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathbf{TL}[sin\omega t\ u(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Transformée de Laplace

TL d'une fonction périodique:





Si $\mathbf{TL}[\boldsymbol{m(t)}] = \boldsymbol{M(p)}$ alors $\mathbf{TL}[\boldsymbol{s(t)}] = \frac{\boldsymbol{M(p)}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{Tp}}}$

Fonction de transfert et schéma fonctionnel

Fonction de transfert d'un système:

- Le comportement d'un SLCI est régi par une équation différentielle :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n}$$
$$= b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \cdots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

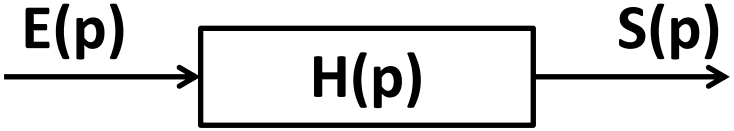
En appliquant la TL tout en supposant les CI=0, on obtient:

$$[a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n] S(p)$$
$$= [b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m] E(p)$$

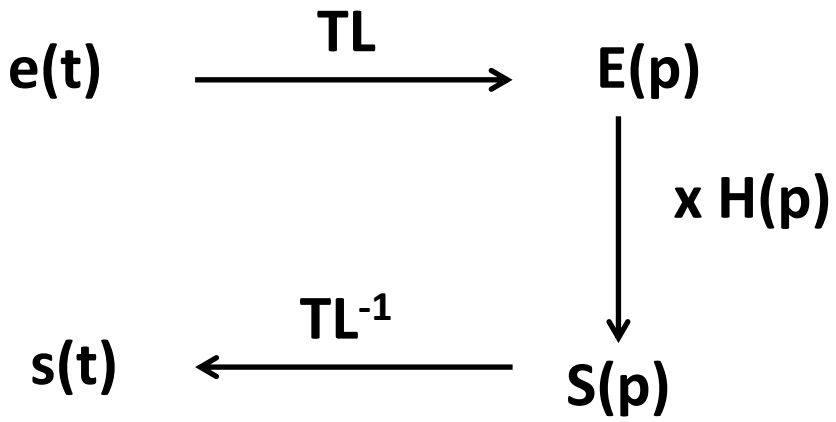
On obtient alors la fonction de transfert H(p) du système:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}$$

Schéma fonctionnel d'un système:



Réponse d'un système de fonction de transfert H(p) à une entrée e(t):



* On appelle réponse impulsionnelle unitaire la sortie pour $e(t) = \delta(t)$

* On appelle réponse indicielle unitaire la sortie pour $e(t) = u(t)$

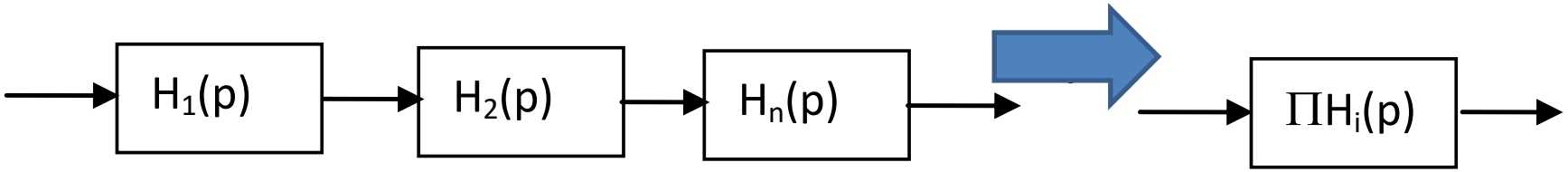
* On pose $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, les racines de D(p) sont les **pôles** du système, les racines de N(p) sont les **zéros** du système, **l'ordre** du système est le degré de D(p).

* Le gain statique est $K = \frac{s(\infty)}{e(\infty)}$, on montre que $K = \lim_{p \to 0} H(p)$

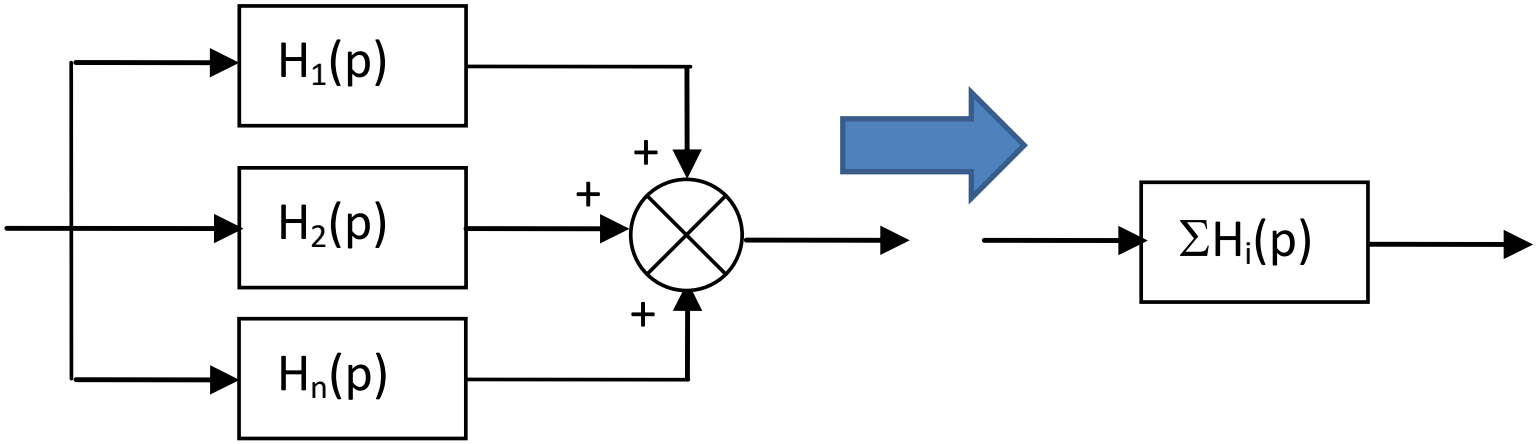
* Condition de stabilité: Un système de fonction de transfert H(p) est stable lorsque ses pôles ont des parties réelles strictement négatives.

Schémas fonctionnels- simplification:

1) Association en cascade :

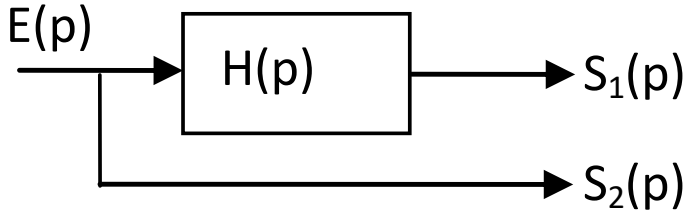


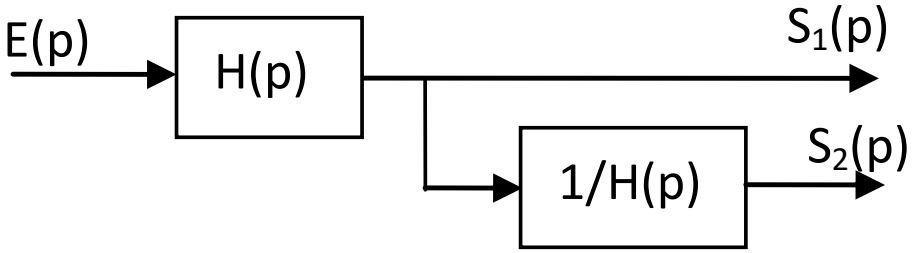
2) Association en parallèle :



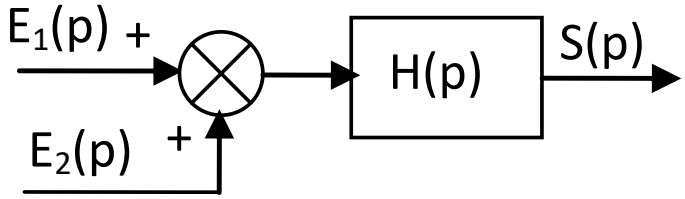
Schémas fonctionnels- simplification:

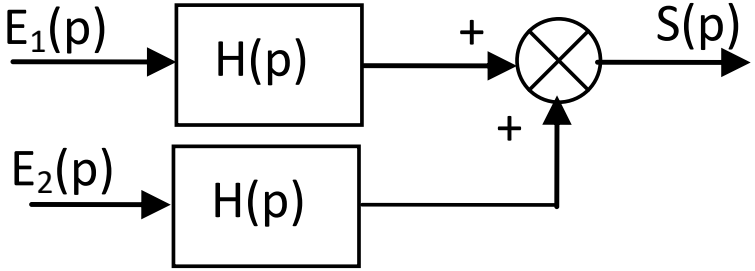
3) Déplacement d'un point de prélèvement :

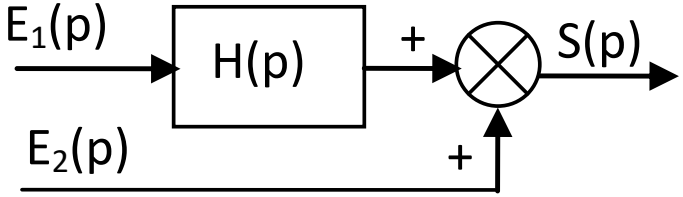


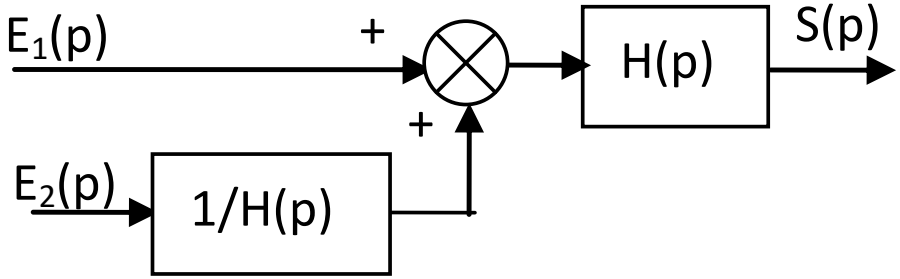


4) Déplacement d'un point de sommation :



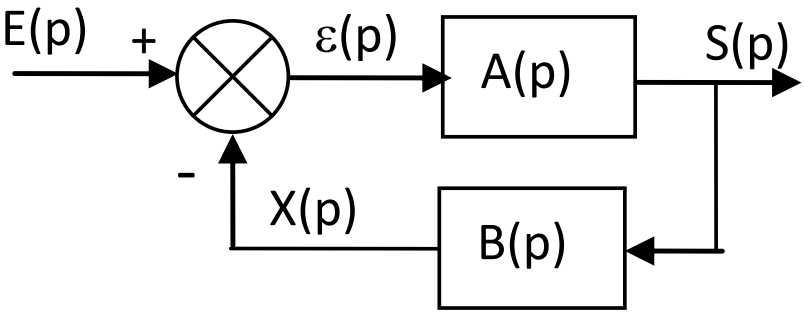






5) Cas d'un système bouclé:

$$\begin{cases} S(p) = A(p)\varepsilon(p) \\ X(p) = B(p)S(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) - X(p) \end{cases}$$



On a alors : $S(p) = A(p)[E(p) - B(p)S(p)]$

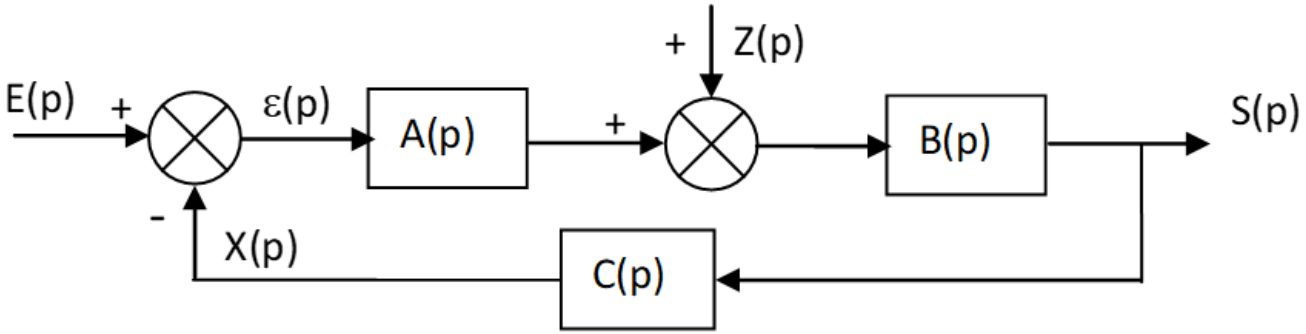
La fonction de transfert en boucle fermée est:

$$FT_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est:

$$FT_{BO}(p) = A(p)B(p)$$

6) Système asservi avec perturbation:



Principe de superposition:

$S(p) = S_1(p) + S_2(p)$

$S_1(p)$ est la sortie lorsque Z=0:

$$S_1(p) = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)C(p)} E(p)$$

$S_2(p)$ est la sortie lorsque E=0:

$$S_2(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)C(p)} Z(p)$$

1) Définition:

Un système du 1er ordre est un système dont la fonction de transfert peut se mettre sous la forme:

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Un système du 1er ordre est régi par une équation différentielle à coefficients constants du type:

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

K est le gain statique

τ est la constante de temps

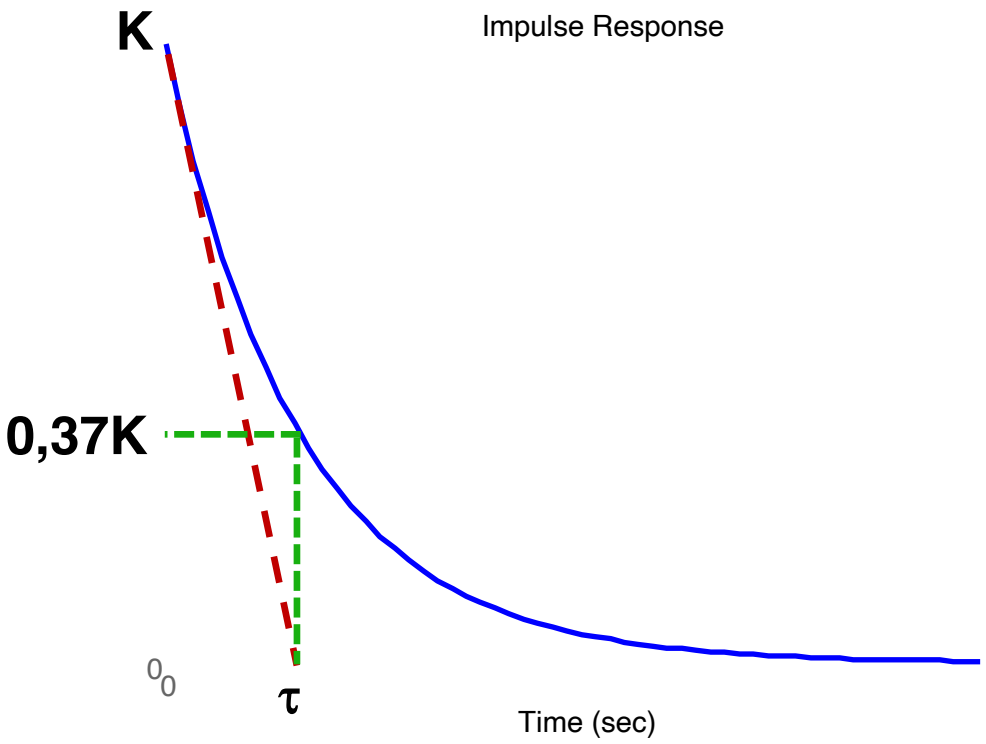
2) Réponse impulsionnelle unitaire:

La réponse impulsionnelle unitaire est la sortie pour une entrée en impulsion unitaire ($e(t) = \delta(t)$)

On a donc $E(p) = 1$. D'où: $S(p) = \frac{K}{1+\tau p}$

La transformée de Laplace inverse est:

$$s(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)$$



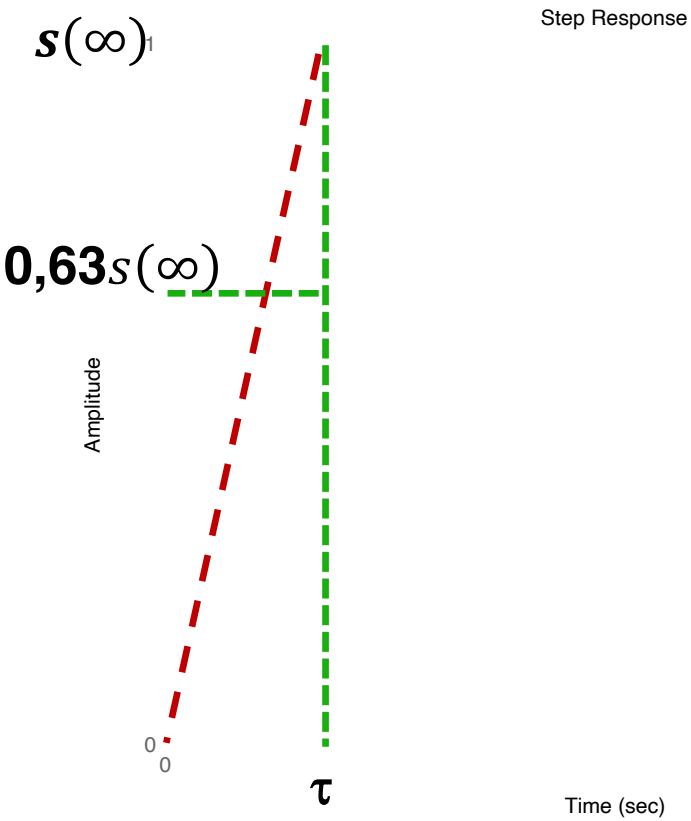
La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses en t=τ

3) Réponse indicielle unitaire:

La réponse indicielle unitaire est la sortie pour une entrée en échelon unitaire ($e(t) = u(t)$).On a donc $E(p) = \frac{1}{p}$. D'où: $S(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$

La transformée de Laplace inverse est:

$$s(t) = K\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right].u(t)$$



La tangente à l'origine

coupe l'asymptote

en t=τ

Par ailleurs: $s(\tau) = 0{,}63K$

4) Réponse harmonique:

* La réponse à une entrée sinusoïdale s'appelle réponse harmonique.

* Pour un système linéaire de fonction de transfert H(p), si l'entrée est sinusoïdale $e(t) = E_m\, sin\omega t$, la sortie sera également sinusoïdale $s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi)$

* Pour déterminer S_m et φ , on écrit:

$$\begin{cases} \frac{S_m}{E_m} = |H(j\omega)| \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) \end{cases}$$

* L'expression analytique du gain et du déphasage en fonction de ω ne sont pas parlantes. On préfèrera avoir une représentation graphique de ces deux paramètres en fonction de la pulsation. Il existe trois types de représentations graphiques :

1. Bode: 2 courbes: gain en dB et φ en fonction de ω (échelle log)
2. Nyquist: $\mathrm{Im}(H(j\omega))$ en fonction de $\mathrm{Re}(H(j\omega))$
3. Black: gain en dB en fonction de φ

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est donnée par : $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, donc $H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau}$

a) Bode:

Le gain s'écrit: $G_{dB} = 20log(|H(j\omega)|) = 20log\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$

$= 20logK - 10log(1+\omega^2\tau^2)$

La phase s'écrit: $\varphi = \arg\left(\frac{K}{1+j\omega\tau}\right) = -arctg(\omega\tau)$

Asymptotes:

Pour $\omega \to 0$ $G_{dB} \to 20logK$ et $\varphi \to 0$

Pour $\omega \to \infty$ $G_{dB} \approx 20logK - 20log\tau - 20log\omega$ et $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$

l'asymptote de gain est une droite de pente -20dB/decade qui passe par le point $\left(\omega = \frac{1}{\tau}, G_{dB} = 20logK\right)$

Diagramme de Bode asymptotique d'un 1er ordre:

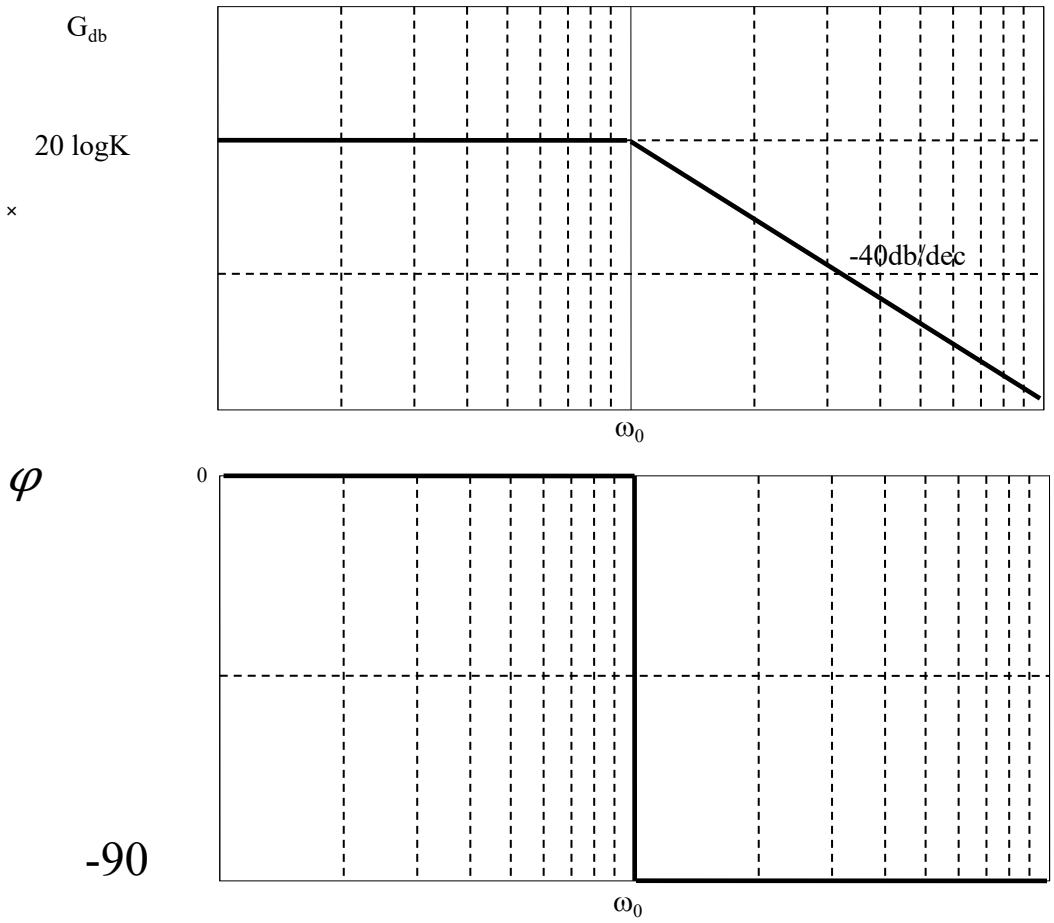
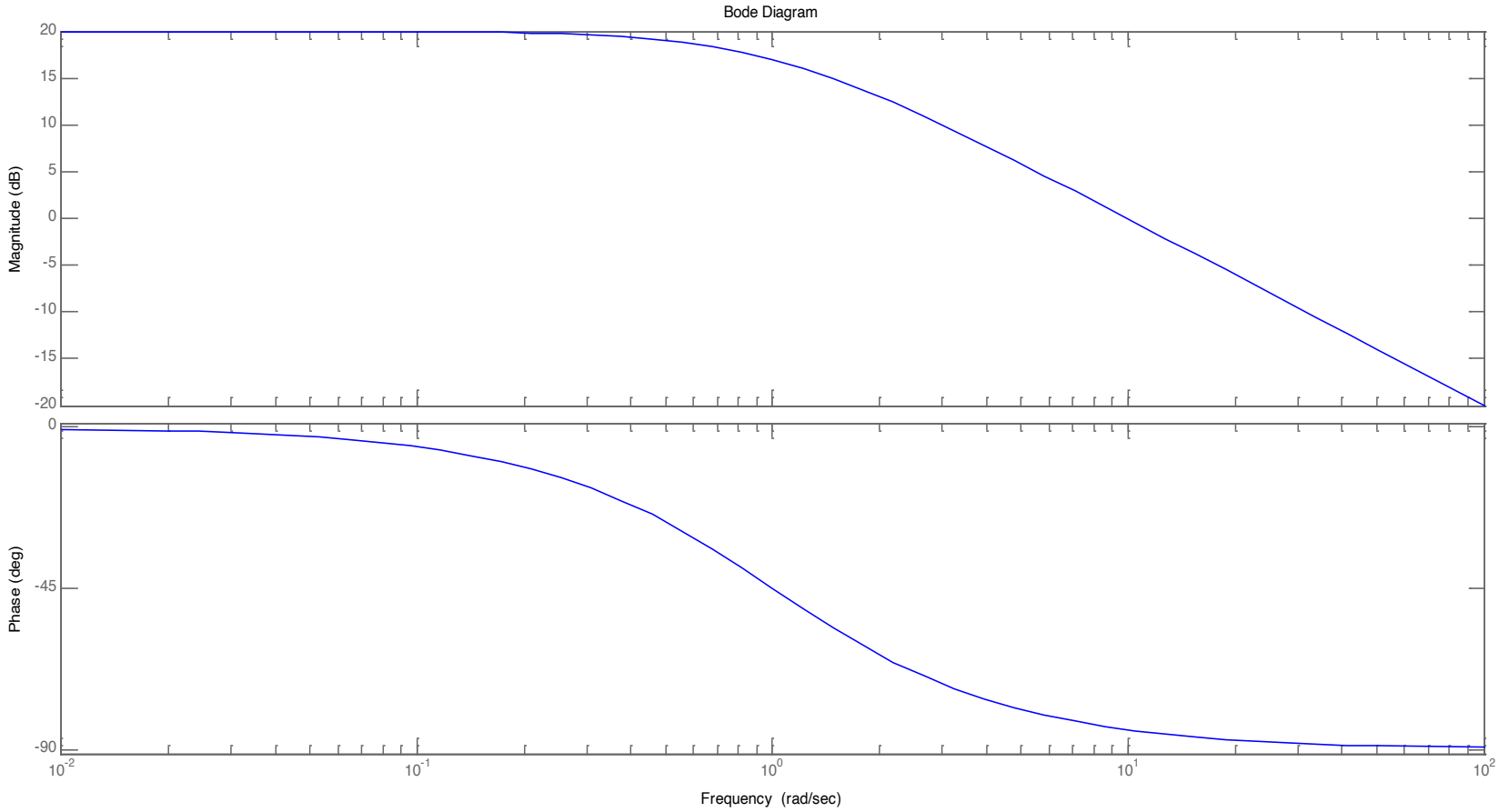


Diagramme de Bode réel d'un 1er ordre:



b) Nyquist:

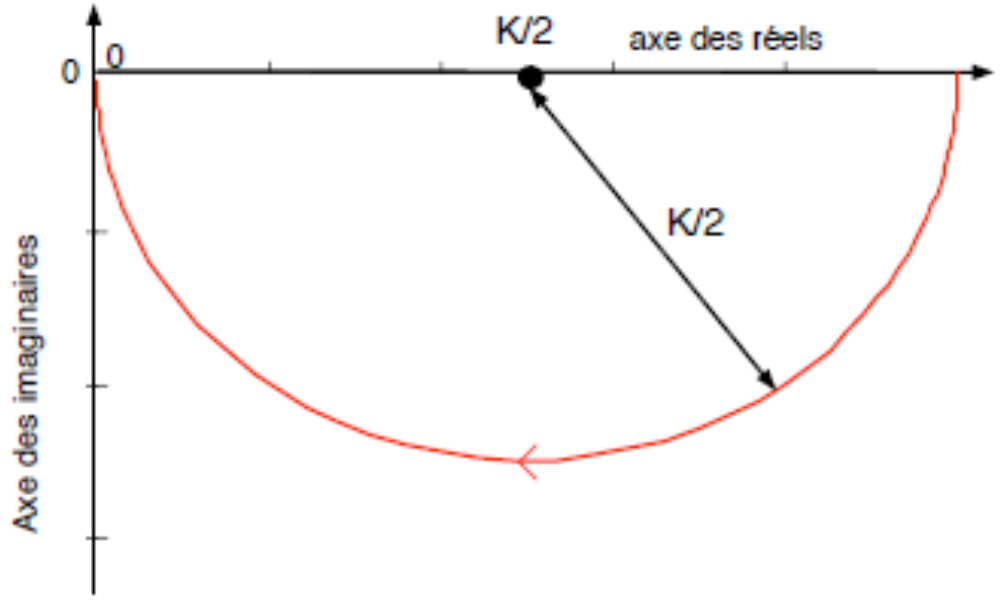
On a: $H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau} = \frac{K(1-j\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2}$

Donc $Re\big(H(j\omega)\big) = \frac{K}{1+\omega^2\tau^2}$ et $Im\big(H(j\omega)\big) = \frac{-K\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$

On vérifie que: $Re^2 + Im^2 = K\,Re$

Donc : $\left(Re - \frac{K}{2}\right)^2 + Im^2 = \frac{K^2}{4}$

Le lieu est donc un demi-cercle de rayon $\frac{K}{2}$ de centre $(\frac{K}{2}, 0)$



systèmes du 2eme ordre

1) Définition:

Un système du 2eme ordre est un système dont la fonction de transfert peut se mettre sous la forme:

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}} = \frac{K{\omega_0}^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + {\omega_0}^2}$$

Un système du 2eme ordre est régi par une équation différentielle à coefficients constants du type:

$$\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\frac{m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

K est le gain statique

m est le coefficient d'amortissement

ω_0 est la pulsation propre

2) Réponse indicielle unitaire:

On a $e(t) = u(t)$, donc $E(p) = \frac{1}{p}$. D'où: $S(p) = \frac{K}{p\left(1+2\frac{m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right)}$

Le discriminant du terme $\left(1 + 2\frac{m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right)$ est: $\Delta = \frac{m^2-1}{{\omega_0}^2}$

1er cas: m>1: régime apériodique: H(p) possède deux pôles réels distincts et $S(p) = \frac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$

Avec $\begin{cases} \tau_1 = \frac{m-\sqrt{m^2-1}}{\omega_0} \\ \tau_2 = \frac{m+\sqrt{m^2-1}}{\omega_0} \end{cases}$

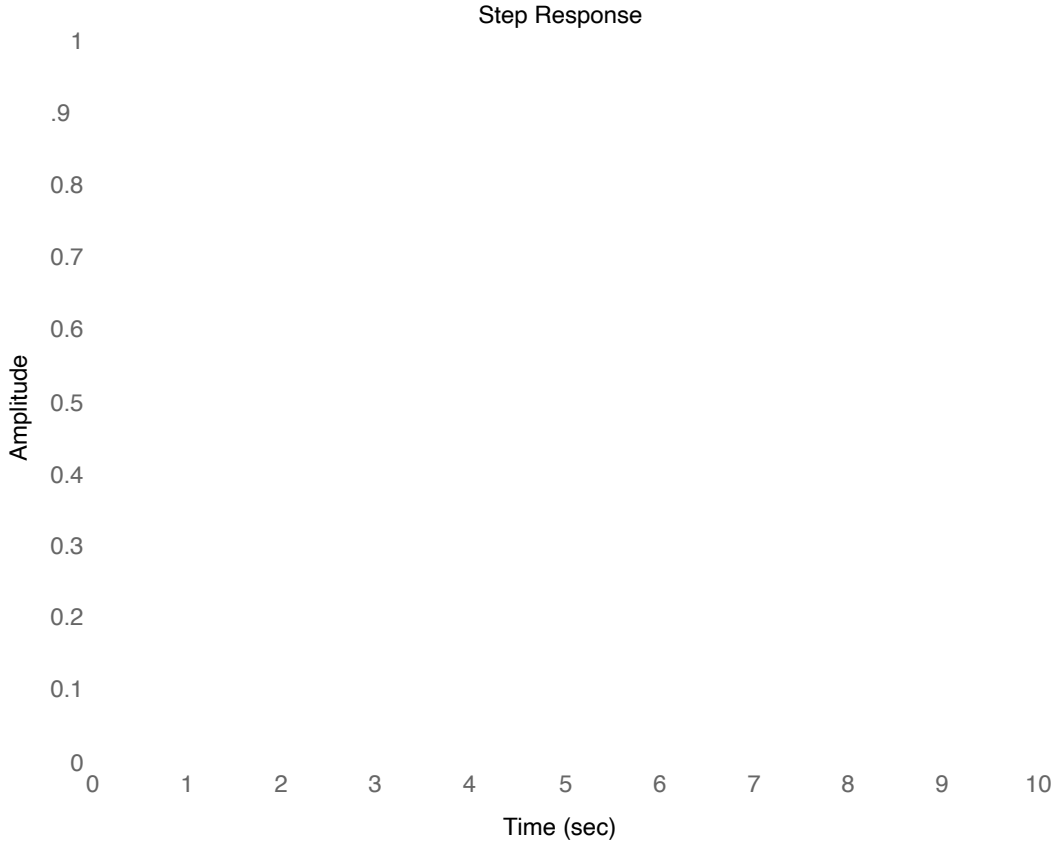
On trouve: $s(t) = K\left[1 - \frac{\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1-\tau_2}\right].u(t)$

Les caractéristiques de cette réponse sont :

s(0)=0 $s(\infty) = K$

s'(0)=0 : tangente horizontale à l'origine,

Point d'inflexion d'abscisse: $t_I = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ ln \frac{\tau_1}{\tau_2}$



2eme cas: m=1: régime critique:

H(p) possède un pôle double $p_0 = -\omega_0$ et $S(p) = \frac{K{\omega_0}^2}{p(p+\omega_0)^2}$

On trouve: $s(t) = K[1 - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}].u(t)$

La courbe de réponse ressemble à la courbe obtenue au paragraphe précédent, mais la croissance est plus rapide.

3eme cas: m<1: régime pseudopériodique:

H(p) possède deux pôles complexes distincts

D'après la table des TL:

$$s(t) = K\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_p}.e^{-m\omega_0 t}.sin\left(\omega_p t + \varphi\right)\right].u(t)$$

Avec: $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ et $\varphi = \arccos m$

Le temps de pic est:

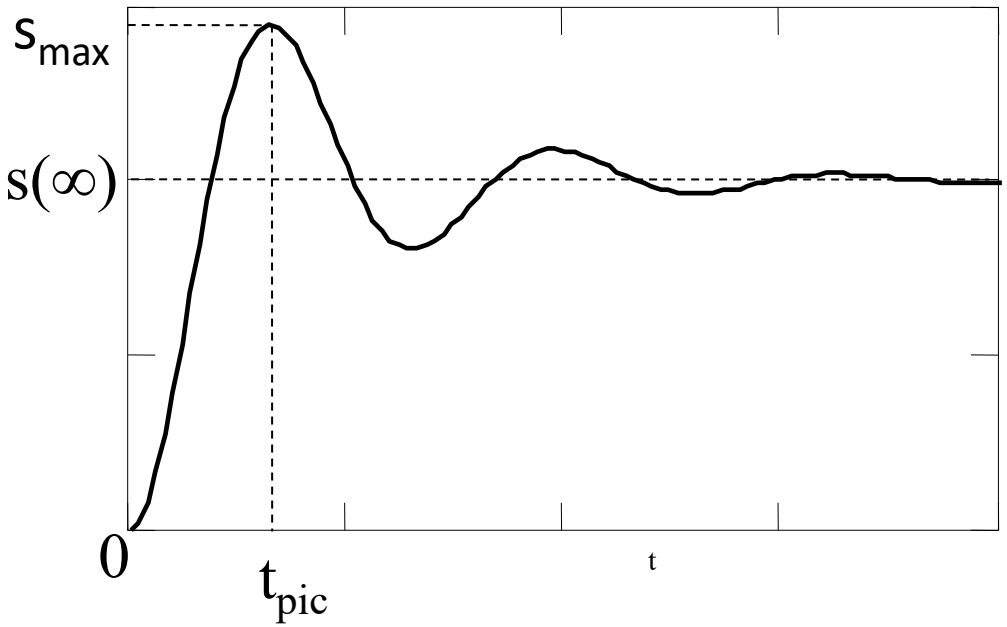
$$\boldsymbol{t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_p}}$$

Le dépassement est dé ini

Par: $\boldsymbol{D = \frac{s_{max} - s(\infty)}{s(\infty)}}$

Son expression est:

$$\boldsymbol{D = e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}}$$



3) Réponse harmonique:

La fonction de transfert d'un système du second ordre est donnée par : $H(p) = \frac{K}{1+2\frac{m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$, donc $H(j\omega) = \frac{K}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j2m\frac{\omega}{\omega_0}}$

a) Bode:

Asymptotes:

Pour $\omega \to 0$ $G_{dB} \to 20logK$ et $\varphi \to 0$

Pour $\omega \to \infty$ $G_{dB} \approx 20logK + 40log\omega_0 - 40log\omega$ et $\varphi \to -\pi$

l'asymptote de gain est une droite de pente -40dB/decade qui passe par le point $(\omega = \omega_0, G_{dB} = 20logK)$

Diagramme de Bode asymptotique d'un 2eme ordre:

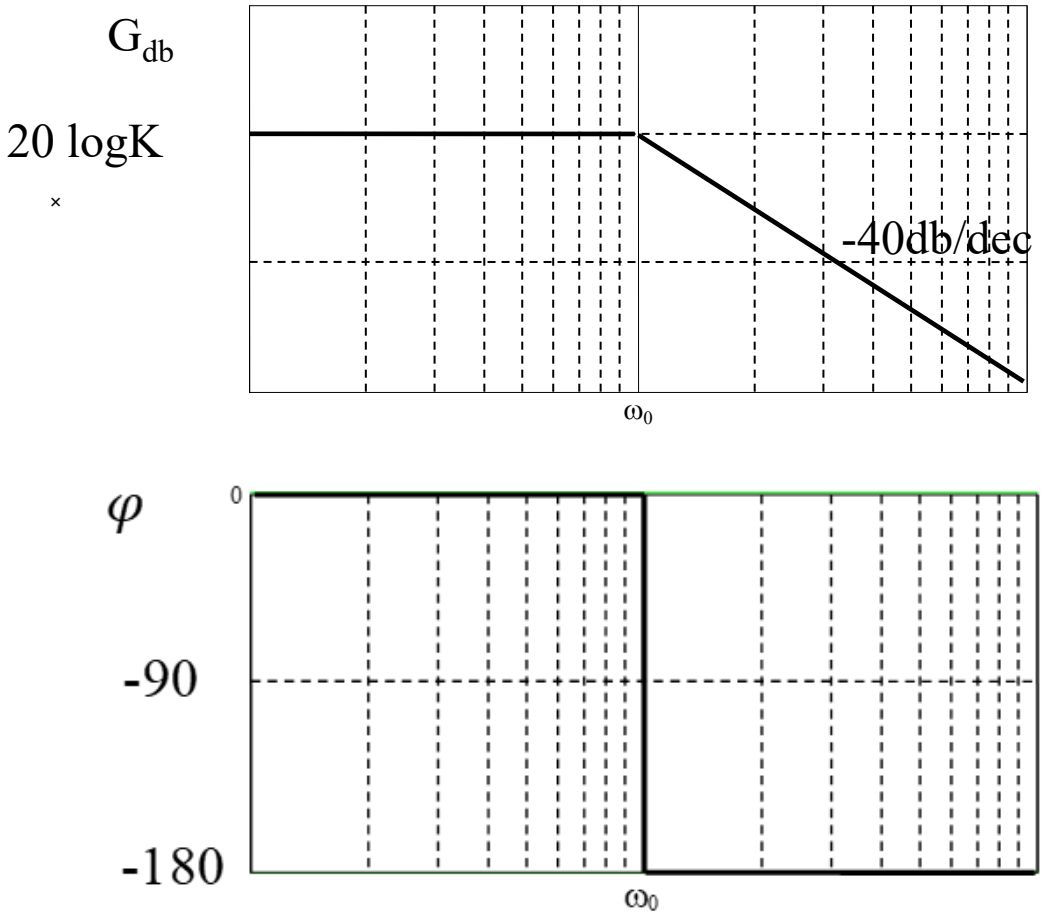


Diagramme de Bode réel d'un 2eme ordre:

Pour tracer le diagramme réel de Bode d'un système de 2eme ordre, on pose : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $f(x) = (1 - x^2)^2 + 4m^2x^2$, on a alors :

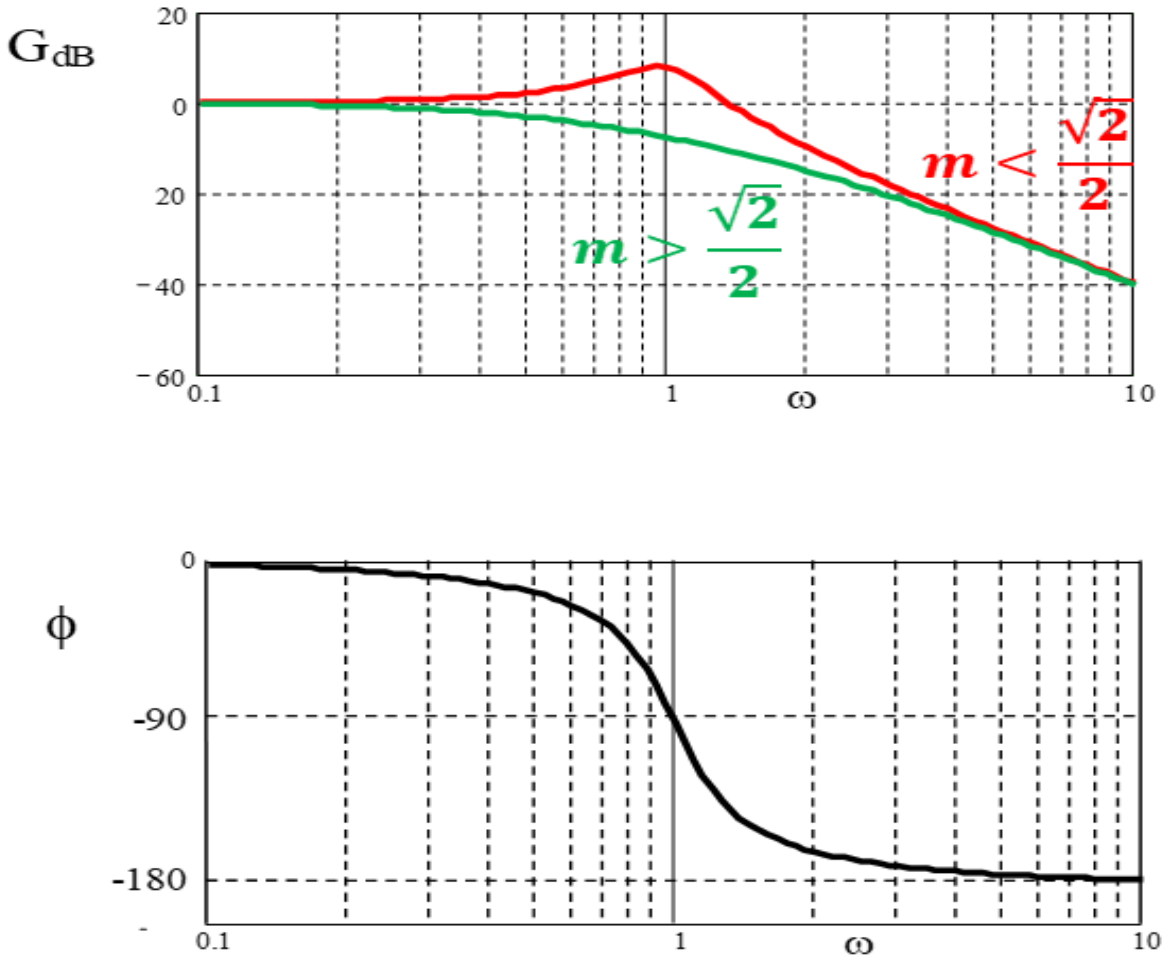
$G_{dB} = 20 \log \frac{K}{[f(x)]^{\frac{1}{2}}}$, G_{dB} et $f(x)$ ont des sens de variations opposés.

Or : $f'(x) = 4x[x^2 - 1 + 2m^2]$

*Pour $\boldsymbol{2m^2 - 1 \geq 0}$ c-a-d $\boldsymbol{m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}}$, $f'(x) \geq 0$, donc G_{dB} est décroissant, la courbe ne présente pas d'extremums.

* Pour $\boldsymbol{2m^2 - 1 < 0}$ c-a-d $\boldsymbol{m < \frac{\sqrt{2}}{2}}$ **,** la courbe de Gain présente un maximum pour : $\boldsymbol{x_R = \sqrt{1 - 2m^2}}$, c-a-d pour : $\boldsymbol{\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - 2m^2}}$, cette pulsation s'appelle pulsation de resonnance .

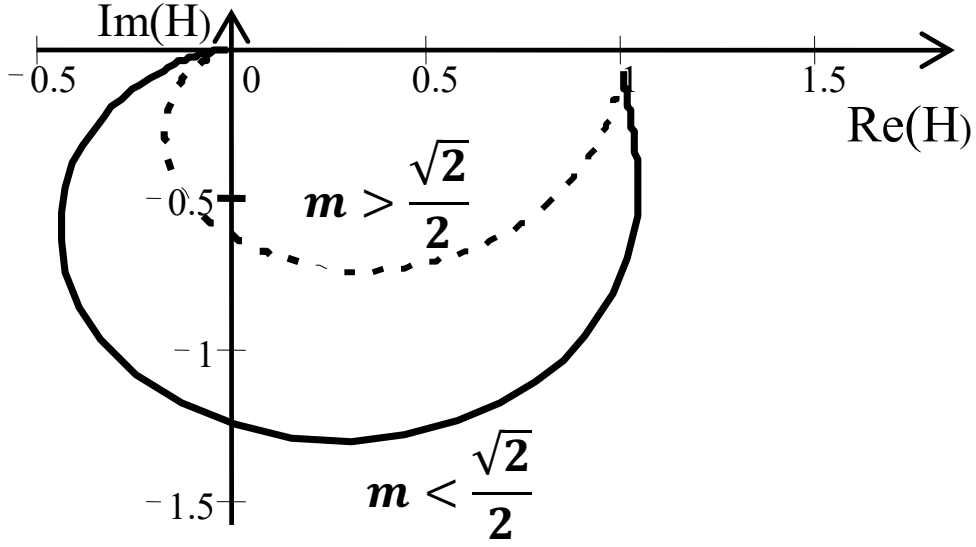
Diagramme de Bode réel d'un 2eme ordre:



b) Nyquist d'un 2eme ordre:

On a : $$\boldsymbol{H(jx) = \frac{K}{(1-x^2)+2jmx}}$$

On trouve : $$\begin{cases} Re\big(\boldsymbol{H(jx)}\big) = \dfrac{\boldsymbol{K(1-x^2)}}{\boldsymbol{(1-x^2)^2+4m^2x^2}} \\ Im\big(\boldsymbol{H(jx)}\big) = \dfrac{\boldsymbol{-2Kmx}}{\boldsymbol{(1-x^2)^2+4m^2x^2}} \end{cases}$$



stabilité d'un système asservi

On a vu qu'un système est stable lorsque sa sortie reste bornée pour une entrée bornée. D'autre part, on a vu qu'un système de fonction de transfert H(p) est stable si et seulement si les pôles de H(p) ont des parties réelles strictement négatives. Le calcul des pôles de H(p) n'est pas toujours évident, en effet le degré du dénominateur de H(p) peut être quelconque, d'autre part, il est très fréquent que le dénominateur de H(p) contienne des coefficients variables. Il nous faut donc d'autres critères pour conclure quant à la stabilité des systèmes. Dans la suite, on va développer deux critères différents, l'un algébrique l'autre géométrique.

Stabilité

Notion de stabilité:

- Un système est stable lorsque sa sortie reste bornée pour une entrée bornée.
- Lorsque e(t) est bornée $s_0(t)$ est également bornée. $s_1(t)$ est bornée lorsque $Re(x_i) < 0 \; \forall \; i$.

Condition de stabilité:

- Un système est stable si et seulement si les racines de son équation caractéristique ont des parties réelles strictement négatives.
- Dans ce cas, $\lim_{t \to \infty} s_1(t) = 0$, $s_1(t)$ correspond au régime transitoire alors que $s_0(t)$ correspond au régime permanent.

2)Critère algébrique-critère de Routh:

On considère un système de fonction de transfert $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ avec :

$$D(p) = a_n\, p^n + a_{n-1}\, p^{n-1} + \cdots + a_1\, p + a_0$$

Le système est stable si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

Condition 1 : Condition nécéssaire :

Tous les a_i doivent être strictement de même signe.

Condition 2 : Condition nécéssaire et suffisante :

Tous les coefficients de la 1ere colonne du tableau de Routh doivent être de même signe.

	1ere colonne	2eme colonne	3eme colonne
p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
p^{n-2}	A_{n-2}	B_{n-2}	C_{n-2}
p^{n-3}	A_{n-3}	B_{n-3}	
p^0	a_0		

Avec :

$$A_{n-2} = \frac{a_{n-1}\,a_{n-2} - a_n\,a_{n-3}}{a_{n-1}},\ B_{n-2} = \frac{a_{n-1}\,a_{n-4} - a_n\,a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$A_{n-3} = \frac{A_{n-2}\,a_{n-3} - a_{n-1}B_{n-2}}{A_{n-2}},\ B_{n-3} = \frac{A_{n-2}\,a_{n-5} - a_{n-1}C_{n-2}}{A_{n-2}}$$

Exemple : $H(p) = \frac{1}{p^3+5p^2+11p+7}$

- La 1ere condition est vérifiée.
- Tableau de Routh :

p^3	1	11
p^2	5	7
p^1	$\frac{5 \times 11 - 7 \times 1}{5} = \frac{48}{5}$	
p^0	7	

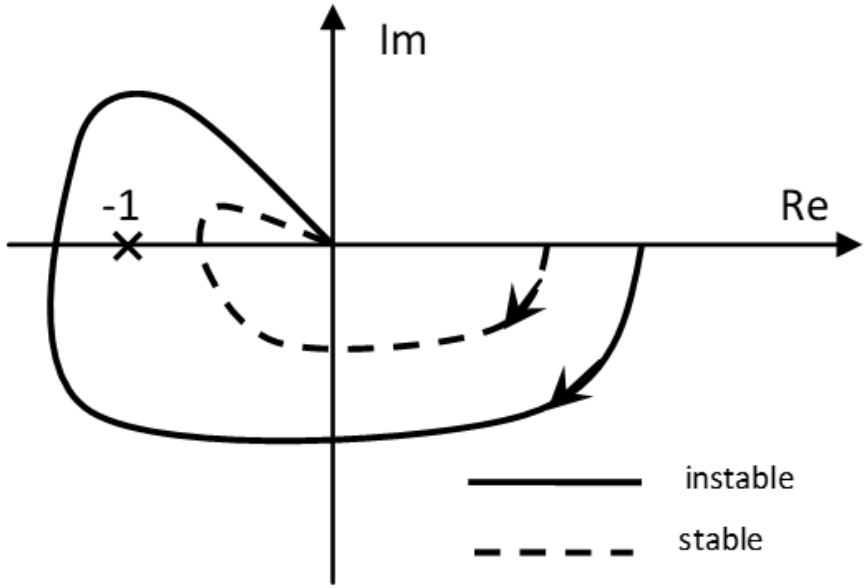
Les coefficients de la 1ere colonne sont positifs, le système est donc stable.

Critère géométrique-critère du revers:

Le critère du revers permet d'étudier la stabilité d'un système en boucle fermée à partir du lieu de Nyquist ou de Bode de sa fonction de transfert en boucle ouverte.

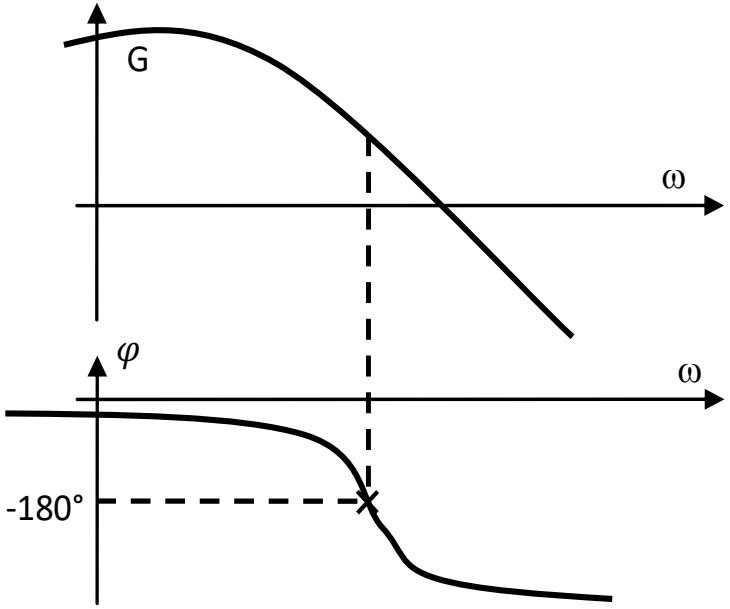
Critère du revers dans le plan de Nyquist :

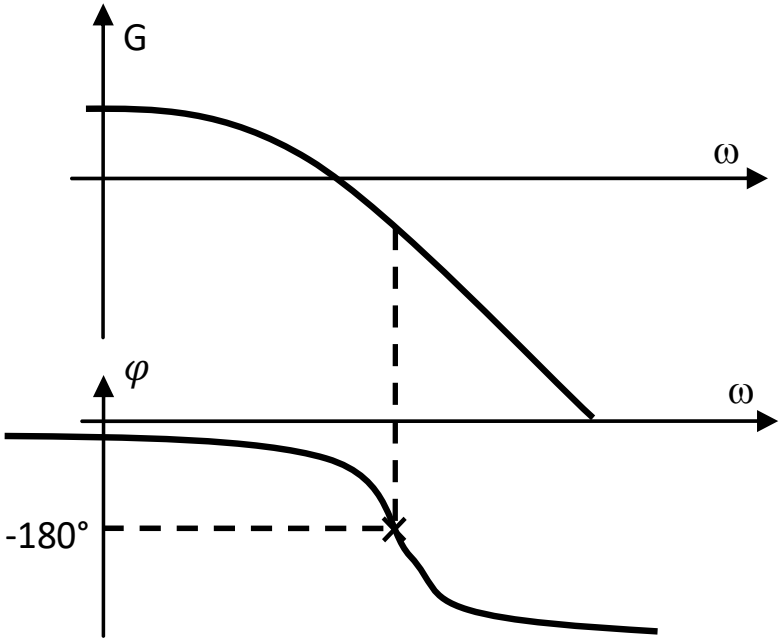
Un système est stable en boucle fermée si et seulement si lorsqu'on parcourt le lieu de Nyquist de $FT_{BO}(j\omega)$ dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique (-1,0) à sa gauche.



Critère du revers dans le plan de Bode :

Un système est stable en boucle fermée si et seulement si la courbe de gain de la FTBO se trouve en dessous de l'axe des abscisses quand $\varphi = -180°$





G>0 pour $\varphi = -180°$

le système en BF est instable.

G<0 pour $\varphi = -180°$ le système en BF est stable.

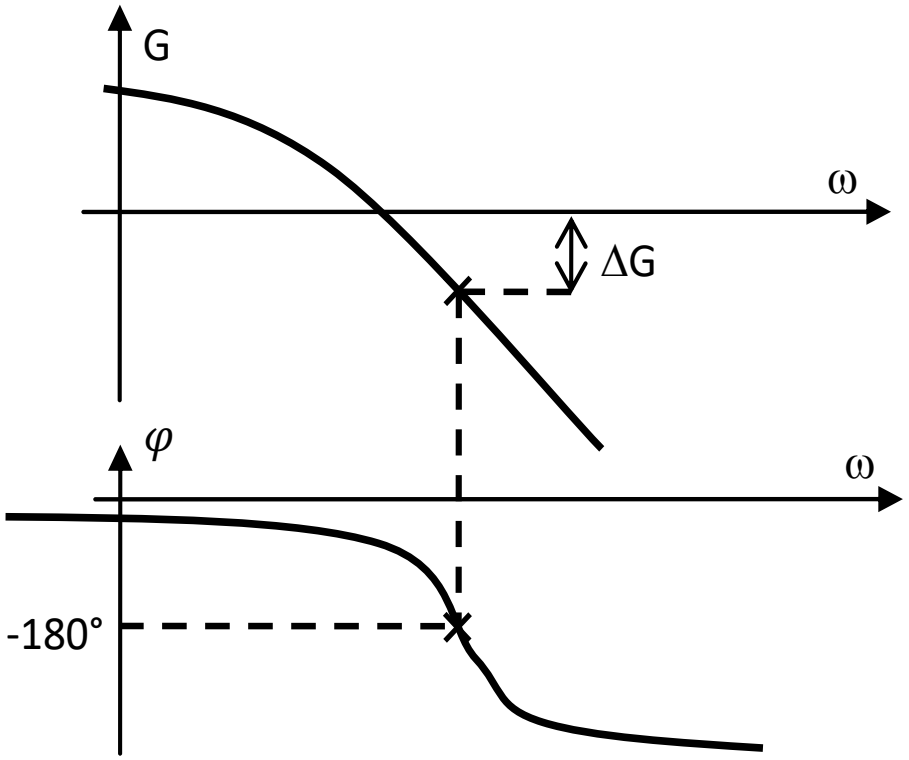
Marges de stabilité:

En pratique, on ne se contente pas de réaliser un système théoriquement stable. On assure la stabilité en prenant des marges de sécurité. Ces marges se traduisent par une distance à respecter entre le lieu de la FTBO et le point critique d'affixe -1.

Marge de Gain :

Pour calculer ΔG : On détermine la pulsation ω_{cr} pour laquelle $\varphi = -180°$

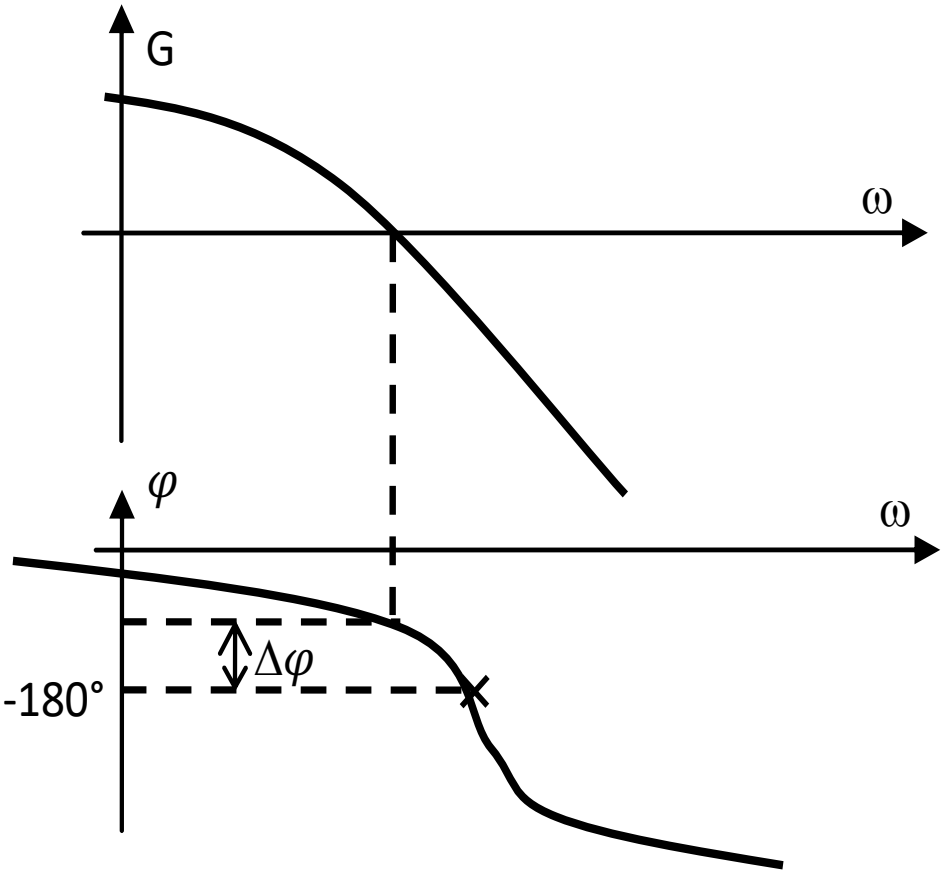
Alors $\Delta G = -G(\omega_{cr})$



Marge de Phase :

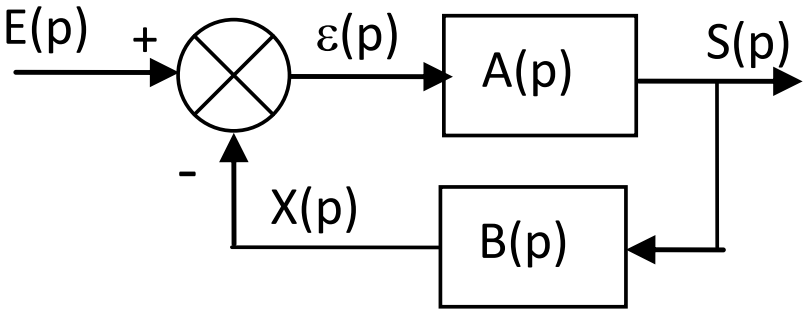
Pour calculer $\Delta\varphi$: On détermine la pulsation ω_1 pour laquelle $G = 0$,

Alors $\Delta\varphi = \varphi(\omega_1) + 180°$



précision des systèmes asservis

- On a vu que le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie s(t) une loi déterminée en général par l'entrée e(t).



- On évalue la précision d'un système asservi par l'étude de la grandeur d'erreur $\varepsilon(t) = e(t) - x(t)$
- On distingue deux type d'erreurs:

- L'erreur dynamique : c'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée
- L'erreur statique : c'est l'erreur en régime permanent $\varepsilon(\infty)$ entre la sortie et la loi d'entrée

On a: $\varepsilon(p) = E(p) - X(p) = E(p) - FT_{BO}(p)\varepsilon(p)$

Donc: $$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+FT_{BO}(p)}\ E(p)$$

L'erreur statique se calcule par: $\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\ \varepsilon(p)$

- La fonction de transfert en boucle ouverte peut se mettre sous la forme: $$FT_{BO}(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1+b_1 p+b_2 p^2+\cdots}{1+a_1 p+a_2 p^2+\cdots}$$

  K est le gain statique, α est la classe du système c'est le nombre d'intégrations pures dans la boucle ouverte

- On a alors : $\lim_{p\to 0} FT_{BO}(p) = \lim_{p\to 0} \frac{K}{p^{\alpha}}$

Erreur statique de position (erreur indicielle):

C'est l'erreur statique pour une entrée en échelon e(t)=u(t) , $E(p) = \frac{1}{p}$

Alors $\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1+FT_{BO}(p)} \; E(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{p^{\alpha}}}$

Pour $\alpha = 0$ $\varepsilon(\infty) = \frac{1}{1+K}$

Pour $\alpha \geq 1$ $\varepsilon(\infty) = 0$

Un système qui possède au moins un intégrateur (α ≥ 1) en boucle ouverte a une erreur de position nulle

Erreur de trainage:

C'est l'erreur statique pour une entrée en rampe e(t)=t u(t) , $E(p) = \frac{1}{p^2}$

Alors $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p} \frac{1}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$

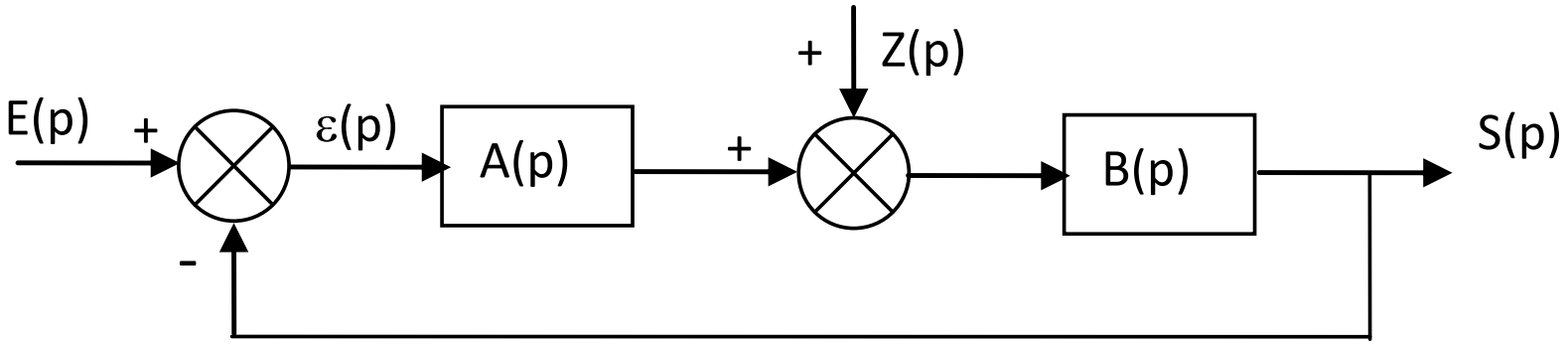
Pour $\alpha = 0$ $\varepsilon(\infty) = \infty$

Pour $\alpha = 1$ $\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K}$

Pour $\alpha \geq 2$ $\varepsilon(\infty) = 0$

Un système qui possède au moins deux intégrateurs (α ≥ 2) en boucle ouverte a une erreur de traînage nulle

Présence d'une perturbation:



On a : $S(p) = \frac{A(p)B(p)}{1+A(p)B(p)}E(p) + \frac{B(p)}{1+A(p)B(p)}Z(p)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

Donc: $\varepsilon(p) = \frac{1}{1+A(p)B(p)}E(p) - \frac{B(p)}{1+A(p)B(p)}Z(p)$

En considérant que pour $p \to 0$:

$$A(p) \sim \frac{K_A}{p^{\alpha_A}} \qquad \text{et} \qquad B(p) \sim \frac{K_B}{p^{\alpha_B}}$$

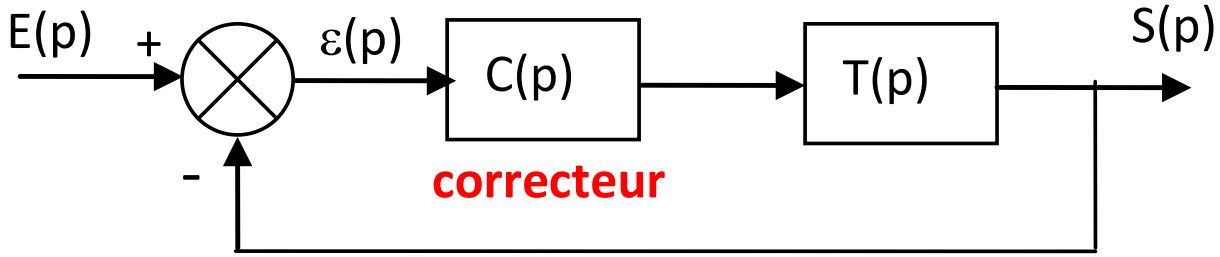
On obtient : $$\varepsilon_2(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{K_B}{p^{\alpha_B} + \frac{K_A K_B}{p^{\alpha_A}}}$$

	$\alpha_A = 0$	$\alpha_A = 1,2 \cdots$
$\alpha_B = 0$	$\varepsilon_2(\infty) = \frac{K_B}{1 + K_A K_B}$	0
$\alpha_B = 1,2 \cdots$	$\varepsilon_2(\infty) = \frac{1}{K_A}$	0

L'erreur statique engendrée par une perturbation assimilable à un échelon est nulle s'il existe au moins une intégration en amont.

correction des systèmes asservis

- Nous avons vu que les systèmes asservis pouvaient présenter des défauts, une précision insuffisante, une mauvaise stabilité (faibles marges), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservis un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans détériorer les autres.



- Les correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision , stabilité et rapidité du système étudié.
- Principaux correcteurs:
  * Proportionnel (P),
  * Proportionnel intégral (PI)
  * Proportionnel dérivée (PD)
  * Proportionnel intégral dérivée (PID)

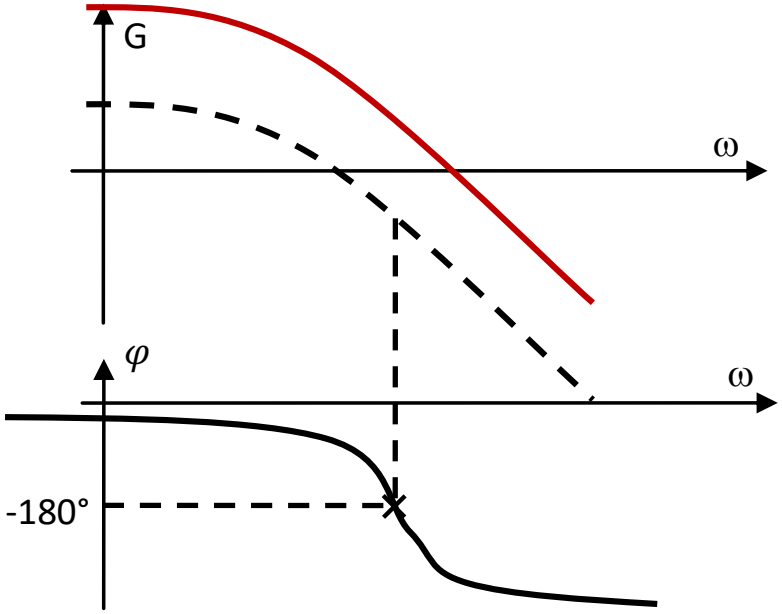
Correcteur proportionnel (P):

La fonction de transfert d'un correcteur proportionnel est:

$$C(p) = K_p$$

Effet d'un correcteur proportionnel:

* améliore la précision (réduit l'erreur statique)
* rend le système plus rapide
* détériore la stabilité (diminue les marges)



sans correcteur

avec correcteur P

Correcteur Proportionnel Intégral (PI):

La fonction de transfert d'un correcteur proportionnel intégral est:

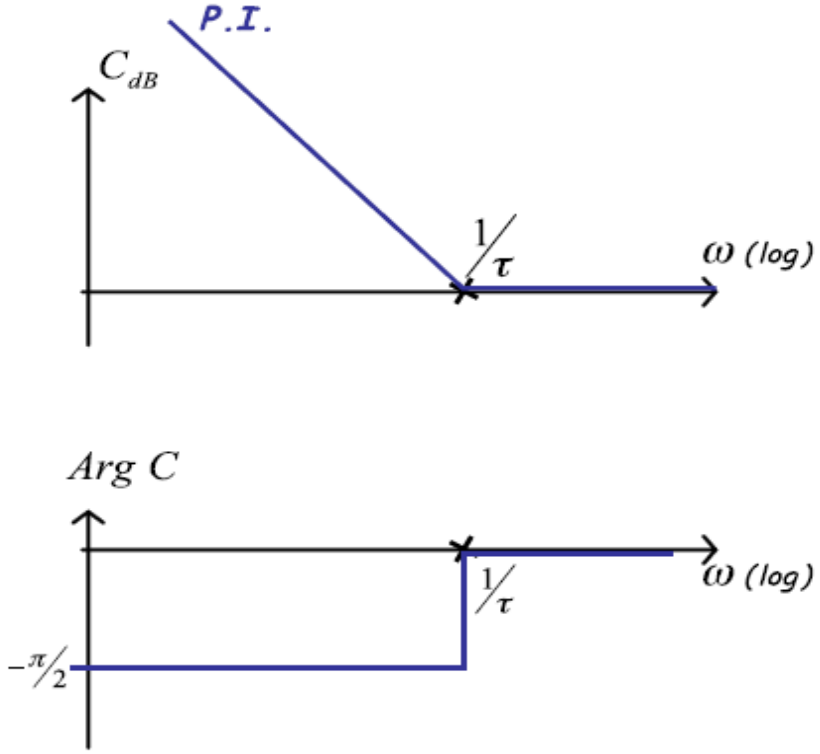
$$C(p) = K_p + \frac{K_I}{p} = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_I\, p}\right)$$

Effet d'un correcteur PI:

* améliore la précision (annule l'erreur statique de position)

* détériore la stabilité (introduit une phase négative)

Bode d'un PI:



Réglage d'un correcteur PI:

* choisir τ telle que $\frac{1}{\tau} \ll \omega_{cr}$ de sorte que le correcteur n'affecte pas la stabilité

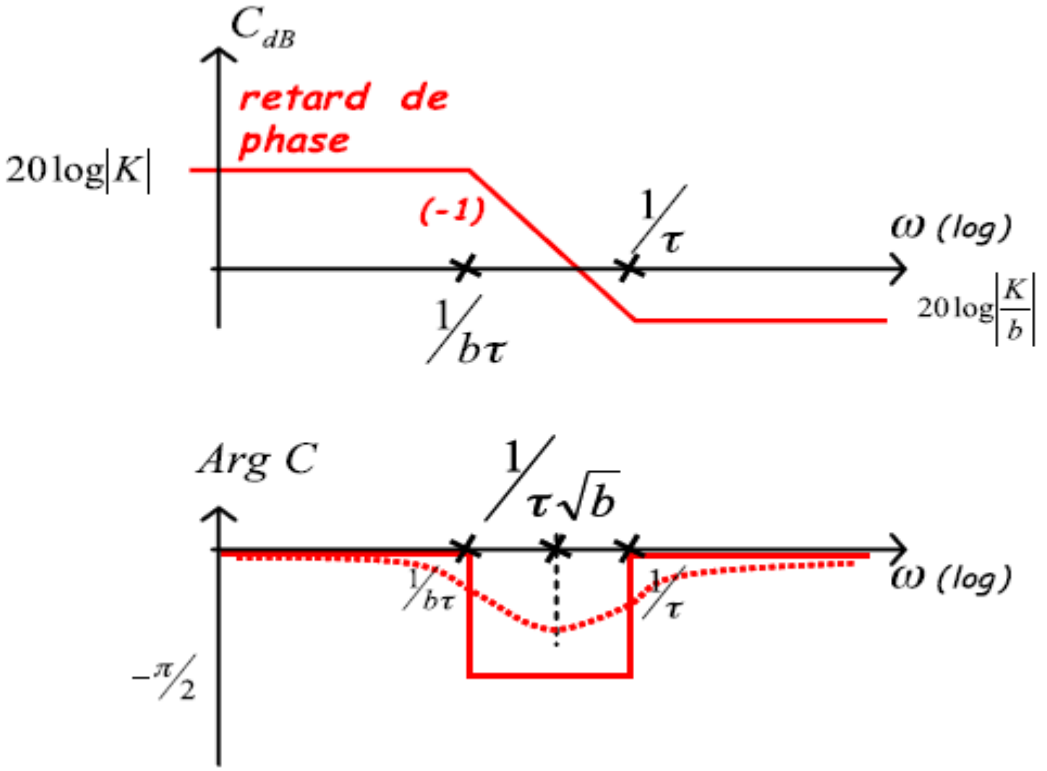
* Une autre solution consiste à simplifier le pole dominant par le numérateur du correcteur P.I.

Correcteur à retard de phase: La fonction de transfert d'un correcteur à retard de phase est:

$$C(p) = K_p \left(\frac{1+\tau\, p}{1+b\ \tau\ p}\right)$$

avec b>1

Ce correcteur apporte un gain et un retard pour les basses fréquences.



Correcteur Proportionnel Dérivée (PD):

La fonction de transfert d'un correcteur proportionnel dérivée est:

$$C(p) = K_p + K_D\, p = K_p(1 + \tau_D\, p)$$

Effet d'un correcteur PD:

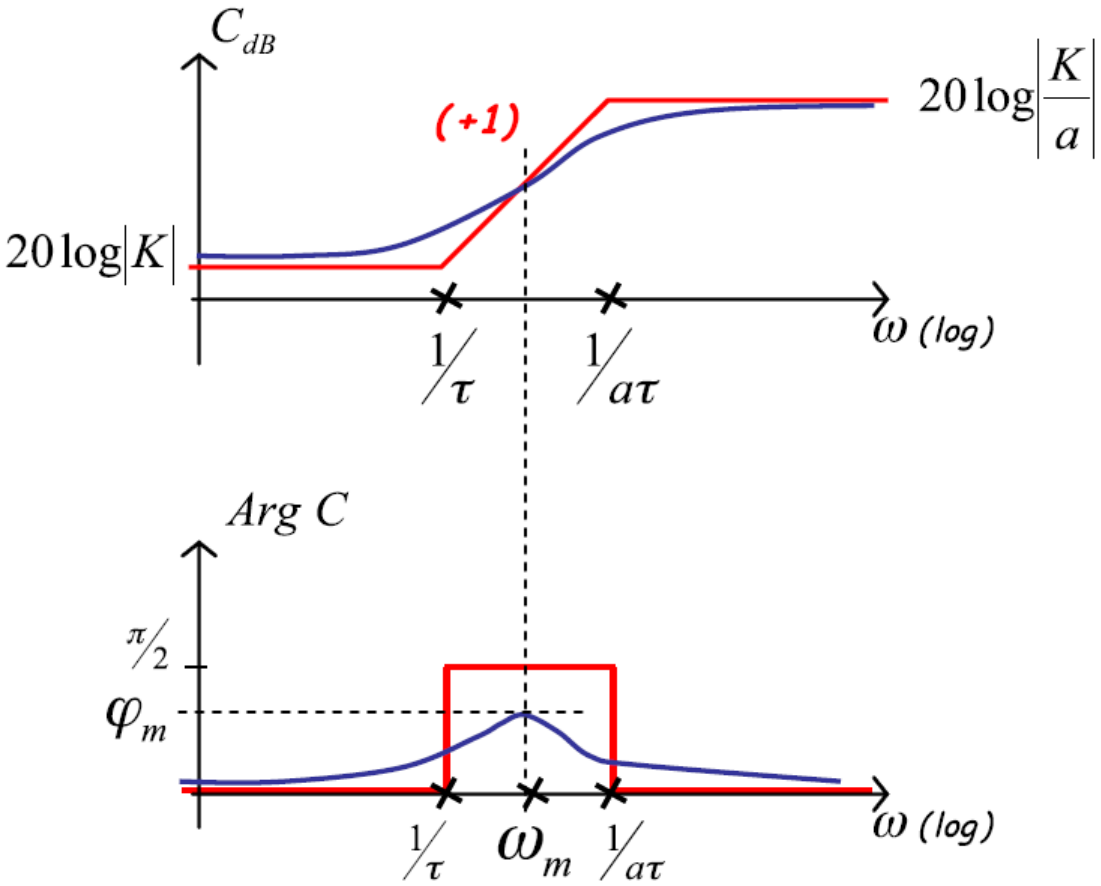
améliorer la stabilité sans modifier la précision

Correcteur à avance de phase:

La fonction de transfert d'un Correcteur à avance de phase est:

$$C(p) = K_p\left(\frac{1+\tau\, p}{1+a\,\tau\, p}\right)$$

avec a<1



Correcteur Proportionnel Intégral Dérivée (PID):

La fonction de transfert d'un correcteur PID est:

$$C(p) = K_p + \frac{K_I}{p} + K_D\, p = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_I\, p} + \tau_D\, p\right)$$

Effet d'un correcteur PID:

- retard de phase et gain important aux basses fréquences:

améliorer la précision

- avance de phase et gain aux hautes fréquences: améliorer la stabilité,

