

Exercices corrigés de synthèse automatique linéaire

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

1ère année FI-GIL

1ère année FI-GMSI

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

ENSET Mohammedia
Exercices de synthèse Automatique
linéaire

I-Exercices

Exercice 01 :

On considère un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. de fonction de transfert $G(p)$ telle que :

$$G(p) = \frac{K}{(1+p)^3}$$

1-1-Calculer la valeur de K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s. Calculer, pour cette valeur de K la valeur de la marge de phase. En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase qu'il faut introduire dans la chaîne directe.

Exercice 02 :

On souhaite asservir un système dont la fonction de transfert est :

$$G(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$$

On place ce système dans la chaîne directe d'une boucle de régulation, en cascade avec un correcteur $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

2-1-Déterminer la condition nécessaire sur K pour que le système possède une marge de phase supérieure à 45°

2-2-Déterminer l'expression du nouveau correcteur $C(p)$ qui permet d'avoir à la fois une marge de phase de 45° et une erreur de position inférieure à 0,2.

Exercice 03 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

$\Delta\phi > 45^\circ$; $d < 10\%$; $\varepsilon_p < 0,08$; $t_m < 8$ s.

3-1-Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_p < 0,08$?

3-2-Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8$ s ?

On choisit à présent, pour K , la plus petite valeur permettant d'obtenir à la fois $\varepsilon_p < 0,08$ et $t_m < 8$ s.

3-3-Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions. Que vaut alors le dépassement ?

II-Problème synthèse :

Régulation d'un four en fonction d'un cahier des charges

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension $v(t)$. Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température

de $1\,200\text{ }^{\circ}\text{C}$ (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse $1\,400\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention.

Le four est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d\theta}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,02v(t)$$

- 1- Calculer la fonction de transfert $G(p)$ du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

2-En admettant malgré tout qu'on alimente le four en boucle ouverte en appliquant aux bornes de la résistance une tension de 100 V continue, au bout de quelle durée atteindrait-on, dans le four, une température de $1\,200\text{ }^{\circ}\text{C}$?

On décide de réguler la température dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension $u(t)$.

Le capteur est régi par l'équation différentielle :

$$u(t) + 2 \frac{du}{dt} = 5 \cdot 10^{-3} \theta(t)$$

On introduit également un gain K dans la chaîne directe.

3-Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Déterminer les conditions de stabilité de ce système.

4-On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$. Quelle est, dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

5- On souhaite évidemment réguler la température du four à $1\,200^\circ\text{C}$. Déterminer l'expression du signal de consigne à introduire dans le système. Le système étant réglé pour obtenir une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$, quelle est la température maximale que l'on atteint dans le four ? Conclure.

6-En voulant limiter le dépassement à 10 %, quel sera le temps de montée en température du four ? Combien peut on traiter d'objets en 24 heures ?

7-On souhaite atteindre une cadence de traitement de 100 objets par 24 heures. Sur quelle valeur faut-il régler le gain K pour atteindre cet objectif ? Que vaut alors la marge de phase ? Quel correcteur faut-il ajouter à la chaîne directe pour limiter le dépassement à 10 % tout en conservant cette cadence ?

Correction

I-Exercices

Exercice 01 :

On considère un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. de fonction de transfert $G(p)$ telle que :

$$G(p) = \frac{K}{(1+p)^3}$$

1-1-Calculer la valeur de K qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s.

On a :

$$\omega_{c0} = \frac{3}{t_m} = \frac{3}{2.15} = 1,4$$

$$\omega_{c0} = 1,4 \text{ rad/s}$$

Or :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2}^3} = 1$$

$$K = (\sqrt{1 + \omega_{c0}^2})^3 = 5$$

D'où : $K=5$

1-2-Calculer, pour cette valeur de K la valeur de la marge de phase.

1-2-On a :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3\arctan \omega_{c0} = 17^\circ$$

$$\Delta\varphi = 17^\circ$$

1-3-En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase qu'il faut introduire dans la chaîne directe pour avoir une marge de phase égale à 45° .

1-4-Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé

1-5- Donner dans ces conditions la marge de phase et déduire le dépassement

1-3-II faut introduire un correcteur $C(p)$, dans la chaîne directe, en le réglant pour obtenir une remontée de phase de 28° à la pulsation $\omega_{c0}=1,4 \text{ rad/s}$.

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

Déterminons a et T : On a :

$$a = \frac{1 + \sin 28}{1 - \sin 28} = 2,8$$

$$T = \frac{1}{\omega_{c0} \sqrt{a}} = 0,43s$$

A=2,8 et T=0,43s

D'où la fonction de transfert du correcteur :

$$C(p) = \frac{1 + 1,2p}{1 + 0,43p}$$

1-4-La fonction de transfert du système corrigé est : $G_c(p)=G(p)C(p)$:

$$G_c(p) = \frac{5 + 6p}{(1 + 0,43p)(1 + p)^3}$$

1-5-La marge de phase, avec $\omega_{c0}=1,4\text{rad/s}$

$$\varphi(\omega_{c0}) = \arctan 1,2\omega_{c0} - \arctan 0,43.\omega_{c0} - 3\arctan \omega_{c0} = -2,36$$

$$\varphi(0,4) = -2,36 \Rightarrow \Delta\varphi = \pi - 2,36 = 0,78 = 44,8^\circ \approx 45^\circ$$

D'où le dépassement :

$$z_{BF} = \frac{\Delta\varphi}{100} \Rightarrow d = 100e^{-\frac{\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}} = 20\%$$

Exercice 02 :

On souhaite asservir un système dont la fonction de transfert est :

$$A(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$$

On place ce système dans la chaîne directe d'une boucle de régulation, en cascade avec un correcteur $C(p) = K$. La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert $B(p) = 3$.

2-1-Déterminer la condition nécessaire sur K pour que le système possède une marge de phase supérieure à 45°

2-1-On a la fonction de transfert du système en boucle ouverte:

$$G(p)KA(p)B(p) = \frac{24K}{p^2 + 5p + 6} = \frac{24K}{(p+3)(p+2)}$$

Pour obtenir une marge de phase de 45° , on doit avoir :

$$\pi - \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{3\pi}{4}$$

d'où :

$$\frac{\frac{\omega_{c0}}{2} + \frac{\omega_{c0}}{3}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{6}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 + 5\omega_{c0} - 6\omega_{c0} = 0$$

$$\omega_{c0}^2 + 5\omega_{c0} - 6\omega_{c0} = 0$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49 \Rightarrow \omega_{c0} = 6 \text{ rad / s}$$

$$\omega_{c0} = 6 \text{ rad/s}$$

On a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\sqrt{(4 + \omega_{c0}^2)(9 + \omega_{c0}^2)}} = 1$$

d'où finalement:

$$K = \frac{\sqrt{40.45}}{24} = 1,77$$

Pour avoir une marge de phase de 45° , $K=1,77$

2-2-Déterminer l'expression du nouveau correcteur $C(p)$ qui permet d'avoir à la fois une marge de phase de 45° et une erreur de position inférieure à 0,2.

Dans un second temps, on exige de surcroît que le système présente en boucle fermée une erreur de position inférieure à 0,2.

2-2-Calculons l'erreur de position obtenue avec le réglage $K = 1,77$, On a :

$$H(p) = \frac{KA(p)}{1 + KA(p)B(p)} = \frac{8K}{p^2 + 5p + 6 + 24K}$$

L'erreur de position est :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{8K}{6 + 24K} = 0,708$$

$$\varepsilon_p = 71\%$$

Pour régler l'erreur de position sur 20 %, une première idée consiste à chercher à augmenter le gain K . On peut alors s'attendre à une chute de la marge de stabilité que l'on corrigera ensuite au moyen d'un correcteur à avance de phase

Toutefois
$$\varepsilon_p = 1 - \frac{8K}{6 + 24K} = 0,2 \Rightarrow 4,8 + 11,2K = 0$$

Aucune valeur positive de K ne permet donc d'obtenir la précision voulue. Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur intégral dans la chaîne directe, seul moyen de garantir une erreur de position inférieure à 20 %.

On a maintenant :
$$G(p) = \frac{24K}{p(p+2)(p+3)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45° , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

d'où :
$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{6}} = 1$$

$$\omega_{c0}^2 + 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49$$

$$\Rightarrow \omega_{c0} = 1 \text{ rad/s}$$

On a :
$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\omega_{c0}(\sqrt{4 + \omega_{c0}^2})(\sqrt{9 + \omega_{c0}^2})} = 1$$

Par conséquent : $K = 0,3$

Donc, le correcteur qui permet d'obtenir à la fois une marge de phase de 45° et une erreur de position inférieure à 20 % (elle est même nulle) est :

$$C(p) = \frac{0,3}{p}$$

Exercice 03 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

$\Delta\varphi \geq 45^\circ$; $d < 10\%$; $\varepsilon_p < 0,08$; $t_m < 8$ s.

3-1-Quelle est la condition sur K pour obtenir $\varepsilon_p < 0,08$?

3-2-Quelle est la condition sur K pour obtenir $t_m < 8$ s ?

Si les conditions du cahier des charges ne sont pas satisfaites, proposer un correcteur à insérer dans la chaîne .

3-3-Donner donc la fonction de transfert du correcteur

3-4-Donner la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé

3-1-Nous avons :

$$H(p) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1) + K}$$

L'erreur de position :

$$\varepsilon_p = 1 - H(p=0) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1) + K} = 1 - \frac{K}{1+K} = \frac{1}{1+K}$$

3-2-Pour avoir $\varepsilon_p < 0,08$, on doit avoir :

$$\frac{1}{1+K} < 0,08 \Rightarrow K > 11,5$$

Donc $K > 11,5$

3-2- On a :

$$\frac{3}{\omega_{c0}} < 8 \Rightarrow \omega_{c0} > 0,375$$

Calculons la valeur de K pour cette pulsation :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{(\sqrt{100\omega_{c0}^2 + 1})(\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1})} = 1$$

d'où : $K=16,1$

La plus petite valeur permettant d'obtenir à la fois $\varepsilon_p < 0,08$ et $t_m < 8$ s. est donc la plus grande des deux valeurs trouvées :

$$\varepsilon_p < 0,08 \text{ et } t_m < 8 \text{ s} \Rightarrow K > 16,1$$

La marge de phase obtenue pour cette valeur de K est :

$$\Delta\varphi = \pi - 2\arctan 10\omega_{c0} - \arctan \omega_{c0}$$

d'où : $\Delta\varphi=9^\circ$

La valeur du dépassement se calcule aisément :

$$z_{BF} = \frac{\Delta\varphi}{100} = 0,09$$

$$d\% = 100e^{-\frac{\pi z_{BF}}{\sqrt{1-z_{BF}^2}}} = 75\%$$

$$\Delta\varphi=9^\circ \Rightarrow z_{BF}=0,09 \Rightarrow d=75\%$$

La marge de phase et le dépassement ne sont pas conformes au cahier des charges. Il nous faut donc corriger ces performances en introduisant un correcteur à avance de phase $C(p)$ qui aura pour mission de remonter la marge de phase à une valeur de 60° . En effet, la condition sur le dépassement est la plus contraignante. Un dépassement de 10 % correspond à un facteur d'amortissement en boucle fermée de 0,6, soit une marge de phase de 60° .

On insère un correcteur à avance de phase pour ramener la marge de phase à 60° , on doit ajouter une différence de phase $\varphi_{\max} = 51^\circ$

3-3-On a la fonction de transfert du correcteur $C(p)$ définie par :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

Déterminons a et T :

$$a = \frac{1 + \sin 51}{1 - \sin 51} = 8; T = \frac{1}{\omega_{c0} \sqrt{a}} = \frac{1}{0,375 \sqrt{8}} = 0,94 \text{ s}$$

Donc $a=8$ et $T=0,94$ s, d'où la fonction de transfert du correcteur :

$$C(p) = \frac{1 + 7,52p}{1 + 0,94p}$$

3-4-La fonction de transfert en boucle ouverte est $G_c(p) = G(p).C(p)$:

Donc :

$$G_c(p) = 16.1 \frac{1 + 7,52p}{(p + 10)^2 (p + 1)(1 + 0,94p)}$$

II- Régulation d'un four en fonction d'un cahier des charges

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension $v(t)$. Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température

de $1\,200^\circ\text{C}$ (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse $1\,400^\circ\text{C}$).

Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention.

Le four est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d\theta}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,02v(t)$$

- 1- Calculer la fonction de transfert $G(p)$ du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

1-La fonction de transfert se calcule aisément :

$$p\Theta(p) + 2000p^2\Theta(p) = 0,02V(p)$$

$$\theta(p)p(1 + 2000p) = 0,02V(p)$$

$$G(p) = \frac{0,02}{p(1 + 2000p)}$$

Si on alimentait le four en boucle ouverte à l'aide d'une tension continue (signal d'entrée en échelon), on aurait :

$$\Theta(p) = \frac{0,02V_0}{p^2(1 + 2000p)}$$

Si on applique le théorème de la valeur finale on aura :

$$\theta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Theta(p) = \infty$$

Il est donc impossible de stabiliser la température du four en boucle ouverte.

2-En admettant malgré tout qu'on alimente le four en boucle ouverte en appliquant aux bornes de la résistance une tension de 100 V continue, au bout de quelle durée atteindrait-on, dans le four, une température de $1\,200^\circ\text{C}$?

2-Si on suppose malgré tout qu'on alimente le four en plaçant à son entrée un signal en échelon de 100 V, on aura :

$$\Theta(p) = \frac{2}{p^2(1+2000p)} = \frac{ap+b}{p^2} + \frac{c}{1+2000p} = \frac{ap+2000ap^2+b+2000bp+cp^2}{p^2(1+2000p)}$$

$$\begin{cases} a+2000b=0 \\ b=2 \\ c+2000a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4000 \\ b=2 \\ c=2000.400 \end{cases} \Rightarrow \Theta(p) = \frac{2}{p} + 4000 \frac{1}{p + \frac{1}{2000}} - \frac{4000}{p}$$

On applique la transformée inverse de Laplace et on obtient :

$$\theta(t) = 2t + 4000e^{-\frac{t}{2000}} - 4000$$

On atteint alors 1 200°C au bout d'un temps t_1 tel que :

$$2t_1 + 4000e^{-\frac{t_1}{2000}} - 4000 = 1200$$

Un calcul à l'aide d'Excel nous donne : $t_1=1778s \approx 30min$

On décide de réguler la température dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension $u(t)$.

Le capteur est régi par l'équation différentielle :

$$u(t) + 2 \frac{du}{dt} = 5.10^{-3} \theta(t)$$

On introduit également un gain K dans la chaîne directe.

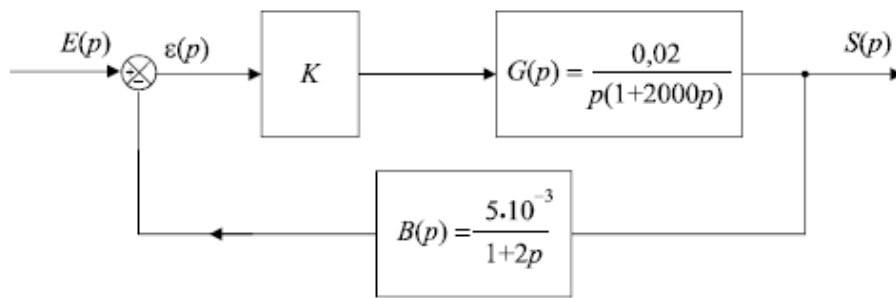
3-Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Déterminer les conditions de stabilité de ce système.

3-Déterminons d'abord la fonction de transfert du capteur, on a :

$$u(t) + 2 \frac{du}{dt} = 5.10^{-3} \theta(t) \Rightarrow U(p) + 2pU(p) = 5.10^{-3} \Theta(p)$$

$$B(p) = \frac{5.10^{-3}}{1+2p}$$

Schéma de la boucle de régulation :



La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)B(p)} = \frac{\frac{0,02K}{p(1+2000p)}}{1 + \frac{0,02K}{p(1+2000p)} \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1+2p}}$$

Soit :

$$H(p) = \frac{0,02K}{4000p^3 + 2002p^2 + p + 10^{-4}K}$$

Les conditions de stabilité en boucle fermée nous sont données par le critère de Routh :

4000	1	0
2002	$10^{-4}K$	0
$(2002 - 0,4K)/2002$	0	0
$10^{-4}K$	0	0

Le système est stable si et seulement si :

$$2002 - 0,4K > 0 \Rightarrow K < 5005$$

4-On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$. Quelle est, dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

4-Si on impose une marge de phase de 45° , on aura :

$$\pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{4}$$

En néglige le dernier terme on obtient : $\omega_{c0} = 5 \cdot 10^{-4}$ rad/s

avec : $t_m = 3/\omega_{c0}$ on aura : $t_m = 6000s = 1h40min$

5- On souhaite évidemment réguler la température du four à 1 200°C. Déterminer l'expression du signal de consigne à introduire dans le système. Le système étant réglé pour obtenir une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$, quelle est la température maximale que l'on atteint dans le four ? Conclure.

5-Pour déterminer la valeur du signal de consigne, il convient de calculer la valeur du signal $u(t)$ délivré par le capteur lorsque la température atteint 1200°C : en régime permanent

$$U(p) = B(p)\Theta(p) = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{1 + 2p} \frac{1200}{p} \Rightarrow u = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pU(p) = 6v$$

Par conséquent : $\theta = 1200^\circ\text{C} \Rightarrow u \approx 6v$

Comme la chaîne directe comporte un intégrateur, l'erreur statique sera nulle. Le système ne peut donc se stabiliser à 1 200°C que si le signal d'entrée est un échelon de hauteur 6 V.

6-En voulant limiter le dépassement à 10 %, quel sera le temps de montée en température du four ? Combien peut on traiter d'objets en 24 heures ?

6-Si on souhaite limiter le dépassement à 10 %, nous devons régler le système de sorte qu'il présente une marge de phase de 60° . Cette marge de phase correspond à une pulsation ω_{c0} telle que :

$$\Delta\varphi\pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arctan 200\omega_{c0} \approx \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{\tan \frac{\pi}{6}}{2000} = 0,29 \cdot 10^{-3} \text{ rad / s}$$

Par conséquent :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = 2h53min$$

Dans ces conditions, chaque traitement durera :

$$t_m + t_{\text{cuisson}} + t_{\text{manu}} = 2h 53min + 1h + 24min = 4h17min$$

On ne pourra donc en réaliser que 5 par 24 heures.

Le nombre maximum d'objets que l'on pourra traiter par jour est donc limité à 50

7-On souhaite atteindre une cadence de traitement de 100 objets par 24 heures. Sur quelle valeur faut-il régler le gain K pour atteindre cet objectif ? Que vaut alors la marge de phase ? Quel correcteur faut-il ajouter à la chaîne directe pour limiter le dépassement à 10 % tout en conservant cette cadence ?

7-Pour atteindre une cadence de 100 objets par jour, il est nécessaire de réduire à 2 h 24 mn la durée d'une opération.

La cuisson d'une heure et le temps de manutention étant incompressibles, la seule marge de manœuvre se situe au niveau du réglage du temps de montée qui doit donc être égal à 1 heure. $(2h 24min) - (1h24min)$

donc :

$$t_m = \frac{3}{\omega_{c0}} \Rightarrow \omega_{c0} = 0,83.10^{-3} \text{ rad / s}$$

Il faut donc régler le gain K de manière à caler la pulsation de coupure à 0 dB sur cette valeur :

$$KG(\omega_{c0})B(\omega_{c0}) = \frac{10^{-4}K}{\omega_{c0} \sqrt{1+4.10^6 \omega_{c0}^2} \sqrt{1+4\omega_{c0}^2}} = 1$$

$$K = 10^4 . \omega_{c0} \sqrt{1+4.10^6 \omega_{c0}^2} \sqrt{1+4\omega_{c0}^2} \Rightarrow K = 16,2$$

La marge de phase vaut alors :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = 31^\circ$$

Pour avoir un dépassement limité à 10 % tout en conservant la cadence imposée, il faut introduire un correcteur à avance de phase qui permette d'obtenir, à la pulsation ω_{c0} , une remontée de phase de 29° .

On a donc :

$$C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$$

Calculons a et T :

$$C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$$

$$a = \frac{1+\sin 29}{1-\sin 29} = 2,9; T = \frac{1}{\omega_{c0} \sqrt{a}} = 709 \text{ s}$$

d'où :

$$C(p) = \frac{1+2056p}{1+709p}$$