

Exercices corrigés

Automatique linéaire dans l'espace d'état

1ère année Master MRMI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

Master MRMI1

TDs espace d'état

Les variables d'état $x_1, \dots, x_n$ représentent un ensemble de variables réelles nécessaires pour décrire le système telles que, leur connaissance à l'instant t_0 ainsi que celle du signal d'entrée permettent de calculer le signal de sortie pour tout $t \geq t_0$. L'ensemble des variables d'état forme le vecteur d'état.

La représentation d'un système dynamique à temps continu peut être obtenue soit à partir de sa représentation par équations différentielles soit à partir de sa représentation par fonction de transfert.

TD 1: Systèmes asservis : La représentation d'état

Exercice 1 : Donner le formalisme d'état d'un système défini par la fonction de transfert :

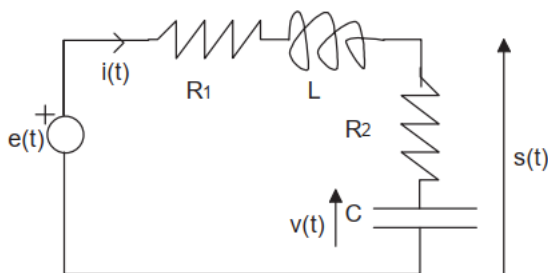
$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

Exercice 2 :

Un système est défini par le modèle d'état : $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x$ avec $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 1- Calcul la matrice de transition $\Phi(t) = e^{At}$ du système par la méthode de diagonalisation.
- 2- Déterminer la réponse temporelle $x(t)$ correspondante aux régimes libre

Exercice 3



Donner l'équation d'état de ce circuit.

Correction

TD 1

1-1

Exercice 1

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

on passe dans le domaine temporel:

$$p^3 Y(p) + 6p^2 Y(p) + 11p Y(p) + 6Y(p) = U(p)$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$
$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = u \quad (1)$$

on pose :

$$x_1 = y$$

$$x_2 = x_1' = y'$$

$$x_3 = y'' = x_2' = x_1''$$

$$\Rightarrow x_3' = y'''$$

$$(1) \Rightarrow y''' = -6y'' - 11y' - 6y + u$$

$$x_3' = -6x_3 - 11x_2 - 6x_1 + u$$

en notation matricielle

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2

Exercice 2

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x(t) = A \cdot x(t)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on calcule d'abord la matrice de transition

$$\phi(t) = e^{At} \quad (\text{méthode de diagonalisation})$$

1^{ère} étape on calcule les valeurs propres et les vecteurs propres.valeurs propres:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

on a deux racines $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ vecteurs propres:* Pour $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

on choisit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ * Pour $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_1}$$

on choisit $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1-3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = M e^{Dt} M^{-1}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = M e^{Dt} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0) \text{ avec } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 2e^t - e^{2t} + e^t - e^{2t} = 3e^t - 2e^{2t} \\ x_2(t) = 2e^t - 2e^{2t} - e^t + 2e^{2t} = e^t \end{cases}$$

Exercice 3 :

$$\begin{cases} e(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L \frac{di}{dt} + v(t) \\ i(t) = C \frac{dv}{dt} \\ s(t) = R_2 i(t) + v(t) \end{cases}$$

Reprenons notre exemple de la figure 1.1, le système d'équations 1.1 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e \\ s(t) = \begin{bmatrix} R_2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Avec $x = \begin{bmatrix} i(t) & v(t) \end{bmatrix}^t$.

Exercices: Représentation d'état

Exercice 1: Un système est régi par l'équation différentielle ci-dessous:

$$y''' + 4y'' + 3y' + 5y = 20 \cdot \underbrace{u(t)}_{\text{échelon}}$$

Donner sa représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$$

Exercice 2: Un système asservi est modélisé par la fonction de transfert $G(p) = \frac{3p+2}{p^4+3p^3+2p^2+10p+20}$

Donner sa représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x \end{cases}$$

Exercice 3: Même question pour un système dont la fonction de transfert est:

$$G(p) = \frac{4p^2+3}{2p^3+5p^2+4p+8}$$

Correction

Exercice 1:

$y''' + 4y'' + 3y' + 5y = 20.u(t)$
on détermine d'abord la fonction de transfert
de ce système tel que $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$
Donc: $p^3 Y(p) + 4p^2 Y(p) + 3p Y(p) + 5Y(p) = 20U(p)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{20}{p^3 + 4p^2 + 3p + 5} = G(p)}$$

Le coefficient du monôme du plus haut degré
du dénominateur est égal à 1 : on peut
appliquer cette méthode:

$$\begin{cases} x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} u$$

on écrit le dénominateur de $G(p)$: $p^3 + 4p^2 + 3p + 5$

$$y(t) = C \cdot x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x(t) \quad D=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

On remplit la dernière ligne
de la matrice A avec les
coefficients du polynôme en
allant de la droite vers la gauche
et en inversant le signe

Exercice 2

$$G(p) = \frac{3p+2}{p^4+3p^3+2p^2+10p+20}$$

On a un système de degré 4 $\Rightarrow$ 4 variables d'état
on construit la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & -10 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

on écrit le polynôme du dénominateur en faisant attention d'avoir le coefficient du monôme du plus haut degré à 1.

$$p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 10p + \textcircled{20}$$

sens de remplissage

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on construit le vecteur ligne C

$$C = (2 \quad 3 \quad 0 \quad 0)$$

on écrit le numérateur $N(p)$ de $G(p)$

$$N(p) = 3p+2 = 0p^3 + 0p^2 + 3p + 2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & -10 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (2 \quad 3 \quad 0 \quad 0) x \end{cases}$$

sens de remplissage
des coefficients sans
changer de signe

$$D = 0$$

Exercice 3

$$G(p) = \frac{4p^2 + 3}{2p^3 + 5p^2 + 4p + 8}$$

Pour ce cas le coefficient du monôme de plus haut degré n'est pas égal à 1. on divise tous les coefficients

$$\Rightarrow G(p) = \frac{\frac{4p^2}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{2p^3}{2} + \frac{5p^2}{2} + \frac{4p}{2} + \frac{8}{2}}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{2p^2 + 3/2}{p^3 + \frac{5}{2}p^2 + 2p + 4}$$

$$x' = Ax + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$D(p) = p^3 + \frac{5}{2}p^2 + 2p + 4$$

$$y = Cx = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$D=0$$

$$N(p) = 2p^2 + 3 = 0p^3 + 2p^2 + \frac{3}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$