

Examens corrigés

Automatique linéaire continu

1ère année Master MRMI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

ENSET Mohammedia
Master MRMI Janvier 2024
Examen fin module automatique
Durée maximale : 2h

Exercice 1 :

Soit le système suivant soumis à un échelon unité $u(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

1. Calculer la matrice de transition e^{At} .

L'état initial du système est défini par :

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le vecteur d'état $x(t)$.

Exercice 2 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ définie par :

$$G(s) = \frac{k}{(s + 10)^3} \text{ avec } K > 0$$

1. Déterminer à l'aide du critère de Routh la condition de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.
2. Donner la valeur de K à la limite de stabilité, que devient la réponse du système dans ce cas ?
3. Est-ce le système nécessite une correction ? si oui quel type de correcteur peut convenir.
4. Déterminer la valeur de K qui assure une marge de gain égale à 6dB.
5. Calculer la marge de phase pour cette valeur de K .

Table de Laplace

f(t) pour t>0	F(p)
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{p}$
T	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
t. e^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
A. $e^{-at} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$ avec $\begin{cases} A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a\alpha)^2} \\ \Phi = -\arctan \frac{\beta - a\alpha}{\alpha\omega} \end{cases}$	$\frac{\alpha p + \beta}{(p+a)^2 + \omega^2}$

ENSET Mohammedia
Année universitaire : 2023-2024
Master MRMI Janvier
Examen fin module automatique
Durée maximale : 2h

Exercice 1 :

Soit le système suivant soumis à un échelon unité $u(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

1. Calculer la matrice de transition e^{At} .

L'état initial du système est défini par :

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le vecteur d'état $x(t)$.

Calculer la matrice de transition e^A

$$[pI - A]^{-1} = \frac{[adj(pI - A)]^T}{\det(pI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix}}{(p+1)(p+2)} = \begin{bmatrix} \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} & \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\ \frac{-2}{(p+1)(p+2)} & \frac{p}{(p+1)(p+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{k_1}{p+1} + \frac{k_2}{p+2} \right) & \left(\frac{k_3}{p+1} + \frac{k_4}{p+2} \right) \\ -2 \left(\frac{k_3}{p+1} + \frac{k_4}{p+2} \right) & \left(\frac{k_5}{p+1} + \frac{k_6}{p+2} \right) \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) \left(\frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \right) = 2, \quad k_2 = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2) \left(\frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \right) = -1$$

$$k_3 = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \right) = 1, \quad k_4 = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2) \left(\frac{1}{(p+1)(p+2)} \right) = -1$$

$$k_5 = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) \left(\frac{p}{(p+1)(p+2)} \right) = -1, \quad k_6 = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2) \left(\frac{p}{(p+1)(p+2)} \right) = 2$$

$$[pI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) & \left(\frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) \\ -2 \left(\frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) & \left(\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+2} \right) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = TL^{-1} \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) & \left(\frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) \\ -2 \left(\frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \right) & \left(\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exercice 2 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+10)^2} \text{ avec } K > 0$$

1. Déterminer la valeur de K qui permet d'obtenir une pulsation de coupure à 0 dB égale à :

$$\omega_{c0} = 20 \text{ rad/s} ?$$

2. Déterminer la valeur de la marge de phase pour cette valeur de K ?

Corrigé

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 100)} = 1 \text{ avec } K > 0$$

Par conséquent :

$$K = \omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 100) = 10^4$$

Par ailleurs :

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega (j\omega + 10)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{10}$$

On a donc :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{20}{10} = -0,64 \text{ rad}$$

La marge de phase étant négative, le système est instable. Il est donc impossible de régler K de manière à obtenir $\omega_{c0} = 20 \text{ rad/s}$ tout en assurant la stabilité du système.

Exercice 3 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ définie par :

$$G(s) = \frac{k}{(s + 10)^3} \text{ avec } K > 0$$

1. Déterminer à l'aide du critère de Routh la condition de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.
2. Donner la valeur de K à la limite de stabilité, que devient la réponse du système dans ce cas ?
3. Est-ce le système nécessite une correction ? si oui quel type de correcteur peut convenir.
4. Déterminer la valeur de K qui assure une marge de gain égale à 6dB.
5. Calculer la marge de phase pour cette valeur de K .

Corr

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)$ définie par :

$$G(s) = \frac{k}{(s + 10)^3} \text{ avec } K > 0$$

1. Déterminer à l'aide du critère de Routh la condition de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

1	300
30	1000 + K
8000 - K	0
1000 + K	0

La boucle fermée est stable dès lors que : $K < 8000$

2. Donner la valeur de K à la limite de stabilité, que devient la réponse du système dans ce cas?

$$\arg(G(j\omega)) = -3 \cdot \arg(10 + j\omega) = -3 \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

On en déduit la pulsation à laquelle le système en BO déphase de π radians.

$$\omega_\pi = 10 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{Soit } \omega_\pi = 17,3 \text{ rad / s}$$

$\Rightarrow K = 8000$.

3. Est-ce le système nécessite une correction ? si oui quel type de correcteur peut convenir.
4. Déterminer la valeur de K qui assure une marge de gain égale à 6dB.
On veut donc un gain de 0,5 à cette pulsation, que doit valoir K ?

$$|G(j\omega_\pi)| = \frac{K}{\left(\sqrt{\omega_\pi^2 + 100}\right)^3} = 0,5$$

On en déduit : $K = 0,5 \cdot \left(\sqrt{\omega_\pi^2 + 100}\right)^3 = 4000$ $K = 4000$

5. Calculer la marge de phase pour cette valeur de K.
Il faut d'abord calculer la pulsation pour laquelle le gain est unitaire.

Il vient :

$$|G(j\omega_c)| = \frac{4000}{\left(\sqrt{\omega_c^2 + 100}\right)^3} = 1$$

$$\left(\omega_c^2 + 100\right) = (4000)^{2/3} \quad \text{Et on trouve } \omega_c = 12,3 \text{ rad / s}$$

Quel est maintenant le déphasage apporté à cette pulsation ?

$$\arg(G(j\omega_c)) = -3 \arctan\left(\frac{\omega_c}{10}\right)$$

$$\varphi(j\omega_c) = -2,66 \text{ rad} = -152^\circ$$

On en déduit la marge de phase cherchée : $M\varphi = -152 - (-180) = 28^\circ$

Table de Laplace

f(t) pour t>0	F(p)
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{p}$
T	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
t. e^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
A. $e^{-at} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$ avec $\begin{cases} A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a \alpha)^2} \\ \Phi = -\arctan \frac{\beta - a \alpha}{\alpha \omega} \end{cases}$	$\frac{\alpha p + \beta}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Nom :

Prénom :

ENSET Mohammedia
MRMI1 Janvier 2025
Examen d'automatique
Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Résolvez l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 2 \sin(2t) \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } \frac{dy(0)}{dt} = 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2 :

La fonction de transfert d'un système en boucle ouverte et à retour unitaire est :

$$G(p) = \frac{k}{(p+1)(p^2+7p+10)}$$

1. Vérifier si le système est stable en boucle ouverte si $k=1$:

.....

.....

.....

.....

2. Donner les valeurs de k qui assurent la stabilité en boucle fermée :

.....

.....

.....

.....

Nom :

Prénom :

Exercice 3 :

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{k}{(\frac{p}{100} + 1)^3} \text{ avec } k > 0$$

1. Calculer la marge de phase de ce système pour $k=5$:

.....

.....

.....

.....

2. Calculer la marge de gain de ce système pour $k=5$:

.....

.....

.....

.....

3. On place ce système dans une boucle fermée à retour unitaire, déterminer la valeur de k qui assurent au système en boucle fermée une erreur de position égale à 5%.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4 :

Donner le formalisme d'état d'un système défini par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

.....

.....

.....

.....

.....

Prénom :

La matrice de commande $[A]$ d'un système est défini par :

1- Calcul la matrice de transition $\Phi(t) = e^{At}$ du système par une méthode de votre choix :

2- Déterminer la réponse temporelle $x(t)$ correspondante aux régimes libres.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Nom :

Prénom :

ENSET Mohammedia
MRMI1 Janvier 2025
Examen d'automatique
Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Résolvez l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = 2 \sin(2t) \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } \frac{dy(0)}{dt} = 1$$

MATLAB:

```
syms y(t)
Du = diff(y,t);
D2u = diff(y,t,2);

ode = D2u+y == 2*sin(2*t);
```

```
cond1 = y(0) == 1;
cond2 = Du(0) == 1;
conds = [cond1 cond2];
```

Solution :

```
ySol(t) = dsolve(ode,conds)
```

Exercice 2 :

La fonction de transfert d'un système en boucle ouverte et à retour unitaire est :

$$G(p) = \frac{k}{(p+1)(p^2+7p+10)}$$

1. Vérifier si le système est stable en boucle ouverte si $k=1$:

La stabilité de ce système en boucle ouverte avec $k=1$:

$(p+1)(p+2)(p+5) = 0$ donc $p_1 = -1$; $p_2 = -2$; $p_3 = -5$

Les pôles sont à partie réelle négative.

Ceci implique que le système est stable en boucle ouverte avec $k=1$.

stabilité en boucle fermée pour $k=1$:

$$FTBF = \frac{k H(p)}{1 + kH(p)} = \frac{1}{p^3 + 8p^2 + 17p + 11}$$

L'équation caractéristique est : $D(p) = p^3 + 8p^2 + 17p + 11 = 0$

$$n = 3$$

$$\text{nbre de lignes} = n + 1 = 4$$

$$\text{nbre de colonnes} = \frac{n+1}{2} = 2$$

Nom :

Prénom :

N°Ligne	Tableau	
1	1	17
2	8	11
3	$\frac{125}{8}$	0
4	11	0

Tous les coefficients de la première colonne sont de même signe. Le système est stable en boucle fermée.

2. Donner les valeurs de k qui assurent la stabilité en boucle fermée :

$$FTBTF = \frac{k}{p^3 + 8p^2 + 17p + (10 + k)}$$

L'équation caractéristique est :

$$D(p) = p^3 + 8p^2 + 17p + (10 + k) = 0$$

$n = 3$

$$\text{nbre de lignes} = n + 1 = 4$$

$$\text{nbre de colonnes} = \frac{n + 1}{2} = 2$$

N°Ligne	Tableau	
1	1	17
2	8	10+ k
3	$\frac{126-k}{8}$	0
4	10+ k	0

Pour que tous les coefficients de la première colonne soient du même signe, il faut qu'ils soient tous positifs. On a donc :

$$\begin{cases} \frac{126 - k}{8} > 0 \\ 10 + K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 126 \\ k > -10 \end{cases}$$

Comme par hypothèse, k est positif, nous déduisons la plage de valeurs admissibles pour k : $0 < k < 126$

Nom :

Prénom :

Exercice 3 :

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{k}{(\frac{p}{100} + 1)^3} \text{ avec } k > 0$$

1. Calculer la marge de phase de ce système pour $k=5$:

Pour la marge de phase, on doit trouver la valeur de w_u , puis calculer :

$$M_\varphi = \text{Arg}[H_{BO}(jw_u)] - (-180^\circ)$$

w_u est telle que :

$$|H_{BO}(jw_u)| = 1 \text{ dB}$$

$$G(jw) = \frac{5}{(j\frac{w}{100} + 1)^3}$$

$$\frac{5}{\sqrt{(\frac{w_u^2}{100^2} + 1)}^3} = 1$$

$$w_u = 139 \text{ rad/s}$$

$$M_\varphi = \text{Arg}[H_{BO}(jw_u)] - (-180^\circ)$$

$$\text{Arg}[H_{BO}(jw)] = 0 - 3 \arctan \frac{w}{100}$$

$$M_\varphi = \text{Arg}[H_{BO}(jw_u)] - (-180^\circ) = \pi - 3 \arctan \frac{139}{100}$$

$$M_\varphi = 0.3 \text{ rad} = 17^\circ$$

2. Calculer la marge de gain de ce système pour $k=5$:

On doit déterminer la valeur de w_c , puis calculer : $M_G = 0 - 20 \log_{10} |H_{BO}(jw_c)|$

w_c est telle que : $\text{Arg}[H_{BO}(jw_c)] = (-180^\circ)$.

$$\text{On a : } G(jw) = \frac{5}{(j\frac{w}{100} + 1)^3}$$

$$\text{Arg}[H_{BO}(jw)] = 0 - 3 \arctan \frac{w}{100}$$

$$\text{Arg}[H_{BO}(jw_c)] = -\pi$$

$$-3 \arctan \frac{w_c}{100} = -\pi$$

$$w_c = 100\sqrt{3}$$

On a alors :

$$M_G = 0 - 20 \log_{10} |H_{BO}(100\sqrt{3})|$$

$$M_G = -20 \log_{10} \frac{5}{\sqrt{(\frac{w_c^2}{100^2} + 1)}^3}$$

$$M_G = 4 \text{ dB}$$

Nom :

Prénom :

3. On place ce système dans une boucle fermée à retour unitaire, déterminer la valeur de k qui assurent au système en boucle fermée une erreur de position égale à 5%.

$$\text{Erreur de position : } \varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{E(p)}{1 + \frac{k}{(\frac{p}{100} + 1)^3}} \right)$$

$$\text{Si } e(t)=1 \text{ alors } 1/(1+k)=0.05 \Rightarrow 1=0.05+0.05*k \Rightarrow k=19$$

Exercice 4 :

Donner le formalisme d'état d'un système défini par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

Dans le domaine temporel on :

$$p^3 * Y(p) + 6p^2 * Y(p) + 11p * Y(p) + 6 * Y(p) = U(p)$$

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = u(t)$$

On Pose :

$$x_1 = y$$

$$x_2 = x'_1 = y'$$

$$x_3 = x'_2 = y'' = x''_1$$

$$x'_3 = y'''$$

D'où :

$$y''' = -6y'' - 11y' - 6y + u(t)$$

$$x'_3 = -6x_3 - 11x_2 - 6x_1 + u$$

$$\text{En notation matricielle : } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

La matrice de commande [A] d'un système est défini par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ avec } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 1- Calcul la matrice de transition $\Phi(t) = e^{At}$ du système par une méthode de votre choix :

Nom :

Prénom :

on calcule d'abord la matrice de transition
 $\phi(t) = e^{At}$ (méthode de diagonalisation)

1^{ère} étape on calcule les valeurs propres
 et les vecteurs propres.

valeurs propres:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

on a deux racines $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$

vecteurs propres :

* Pour $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

on choisit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Pour $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_1}$$

on choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nom :

Prénom :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = M e^{Dt} M^{-1}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = M e^{Dt} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

2- Déterminer la réponse temporelle $x(t)$ correspondante aux régimes libres.

$$x(t) = \phi(t) \cdot x(0) \quad \text{avec} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

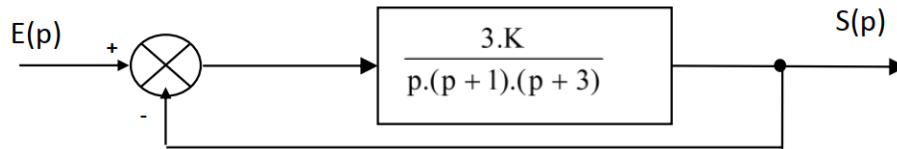
$$\text{Donc } x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 2e^t - e^{2t} - e^t + e^{2t} = 3e^t - 2e^{2t} \\ x_2(t) = 2e^t - 2e^{2t} - e^t + 2e^{2t} = e^t - 4e^{2t} \end{cases}$$

ENSET Mohammedia
Examen MRMI1
Janvier 2026
Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Soit le système suivant :



1. Trouver la condition sur k pour que le système soit stable :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Calculer en fonction de K l'erreur statique de position ($e(t)=E*u(t)$) et l'erreur statique de traînage ($e(t)=E*t*u(t)$):

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Calculer k pour avoir une erreur statique de vitesse de 10% :

.....

.....

.....

.....

Exercice 2 :

En appliquant la règle de la transformée inverse suivante :

$$\text{Si } L^{-1}(F(s)) = f(t) \text{ alors } L^{-1}(F(s - a)) = e^{at} * f(t)$$

1. Trouver la transformée inverse de Laplace de la fonction G(P) :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + p + 2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 :

En appliquant la transformées de Laplace, résoudre l'équation de ce système différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

avec : $y(0^+) = -1$ et $y'(0^+) = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4 :

Soit le système suivant :

$$G(p) = \frac{1000}{p(p + 10)^2}$$

Ce système est mis dans un asservissement à retour unitaire avec un correcteur proportionnel P de gain K.

1. Donner le schéma fonctionnel du système asservi :

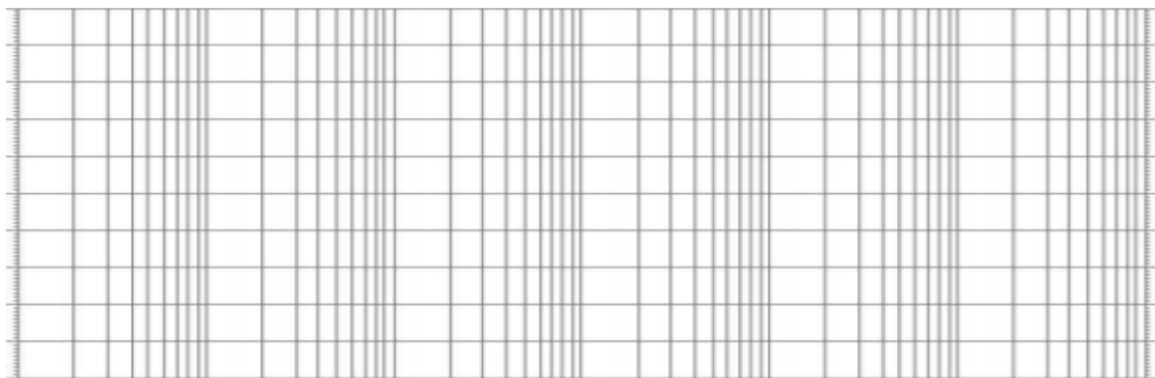
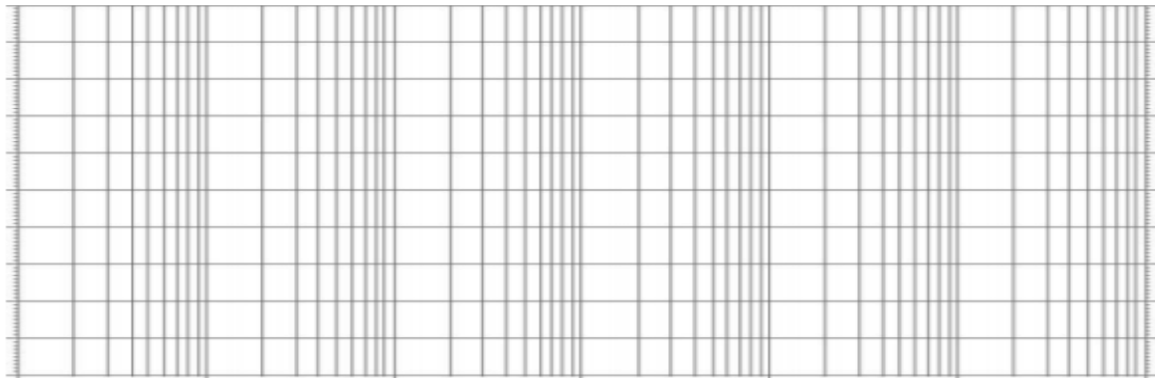
.....

.....

.....

.....

2. Tracer le diagramme de Bode de G(p).



3. Calculer la valeur du gain K qui assure au système une marge de phase $M\phi=45^\circ$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Tableau des transformées de Laplace

f(t) pour t>0	F(p)	f(t) pour t>0	F(p)
$\delta(t)$	1	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
1	$\frac{1}{p}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
T	$\frac{1}{p^2}$	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p + a}$	$A \cdot e^{-at} \cdot \cos(\omega t + \Phi)$ avec $\begin{cases} A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a \alpha)^2} \\ \Phi = -\arctan \frac{\beta - a \alpha}{\alpha \omega} \end{cases}$	$\frac{\alpha p + \beta}{(p + a)^2 + \omega^2}$
t. e^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$		

Correction examen MRMI1 Janvier 2026

Exercice 1 :

1. Soit $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée.

$$H(p) = \frac{3.k}{p.(p+1).(p+3) + 3.k} = \frac{3.k}{p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k}$$

L'équation caractéristique est: $D(p) = p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k$

1^{ère} condition : vérifiée si et seulement si: **$k > 0$**

2^{ème} condition :

p^3	1	3
p^2	4	$3.k$
p^1	$(12-3.k)/4$	0
p^0	$3.k$	

Pour que la deuxième condition soit vérifiée, il faut que: **$12-3.k > 0$ et $3.k > 0$** .

Pour que le système soit stable il faut que: **$0 < k < 4$** .

Pour que le système soit stable il faut que : $0 < k < 4$.

2. Soit $G(p)$ la fonction de transfert du système en boucle ouverte.

$$\varepsilon(t) = \frac{E(p)}{1 + G(p)} = \frac{p^3 + 4p^2 + 3p}{p^3 + 4p^2 + 3p + 3k}$$

Erreur statique de position : $E(p) = \frac{E}{p}$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p. \frac{p^3 + 4.p^2 + 3.p}{p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k} \cdot \frac{E}{p} = 0 \rightarrow$$

$\varepsilon_{\infty} = 0$

Erreur statique de vitesse : $E(p) = \frac{E}{p^2}$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p. \frac{p^3 + 4.p^2 + 3.p}{p^3 + 4.p^2 + 3.p + 3.k} \cdot \frac{E}{p^2} = \frac{E}{k}$$

$\varepsilon_{\infty} = \frac{E}{k}$

3. k pour avoir une erreur statique de vitesse de 10% :

$$\varepsilon_{\infty} = 0,1 \Leftrightarrow \frac{E}{k} = 0,1 \Leftrightarrow$$

$$k = 10E$$

Exercice 2 :

Trouver la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + p + 2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + s + 2}\right\}$$

$$\frac{1}{s^2 + s + 2} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\right\}$$

Appliquer la règle de la transformée inverse : si $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ alors $L^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t)$

$$\text{Pour } \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}: \quad a = -\frac{1}{2}, \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{7}{4}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \frac{7}{4}}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \frac{7}{4}}\right\}: \quad \frac{2}{\sqrt{7}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{t}{2}} \frac{2}{\sqrt{7}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)$$

HIN

Exercice 3 :

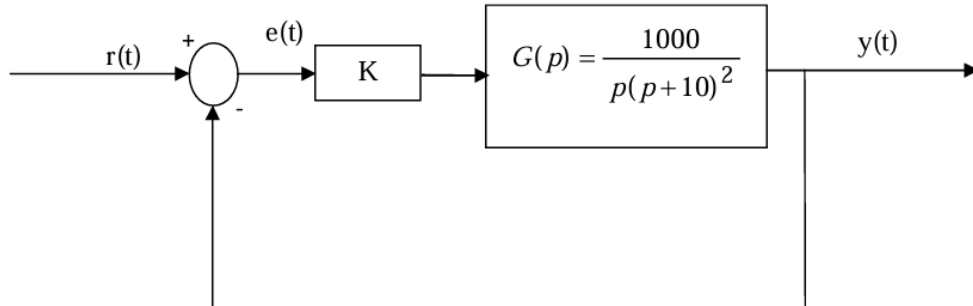
La solution est :

$$y = 1/2 - \exp(-2*t)/2 - \exp(-t)$$

Exercice 4 :

$$G(p) = \frac{1000}{p(p+10)^2} \Rightarrow G(p) = \frac{10}{p\left(\frac{p}{10}+1\right)^2}$$

1. Le schéma fonctionnel du système asservi.



Le tracé de Bode. On a le système :

$$G(p) = \frac{1000}{p(p+10)^2} \Rightarrow G(p) = \frac{10}{p\left(\frac{p}{10}+1\right)^2}$$

$$G(p) = \frac{10}{p\left(\frac{p}{10}+1\right)^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{10}{j\omega\left(\frac{j\omega}{10}+1\right)^2}$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{10}{j\omega\left(\frac{j\omega}{10}+1\right)^2}\right| = 20\log_{10}\left(\frac{10}{\omega\left(\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+1\right)}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20\log_{10}(10) - 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20dB - 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right)$$

Analyse asymptotique :

Etudions G_{dB} aux BF et aux HF

BF :

$$G_{dB} = 20dB - 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right) = -\infty$$

HF :

$$G_{dB} = 20dB - 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right)$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\angle\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right) = -\frac{\pi}{2} - 2\arctg\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

Asymptotes :

$$\text{BF : } \omega \ll \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{HF : } \omega \gg \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$$

Et comme on peut tracer le diagramme de Bode en décomposant la fonction de transfert en plusieurs fonctions en cascades :

$$G(p) = \frac{1000}{p(p+10)^2} \Rightarrow G(p) = \frac{10}{p\left(\frac{p}{10} + 1\right)^2}$$

$$G_1(p) = \frac{10}{p} \Rightarrow \begin{cases} \omega_c = 1 \text{ rd/s} \\ -20 \text{ dB/dec} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow G_{1dB} = 20\log_{10}(10) - 20\log_{10}(\omega) = 20\text{dB} - 20\log_{10}(\omega)$$

$$G_2(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{10} + 1\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_c = 10 \text{ rd/s} \\ -40 \text{ dB/dec} \\ -\pi \end{cases} \Rightarrow G_{2dB} = -40\log_{10}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

Pour tracer G_{dB} on trace d'abord les $G_{i dB}$ puis on fait la somme **géométrique (des asymptotes)**

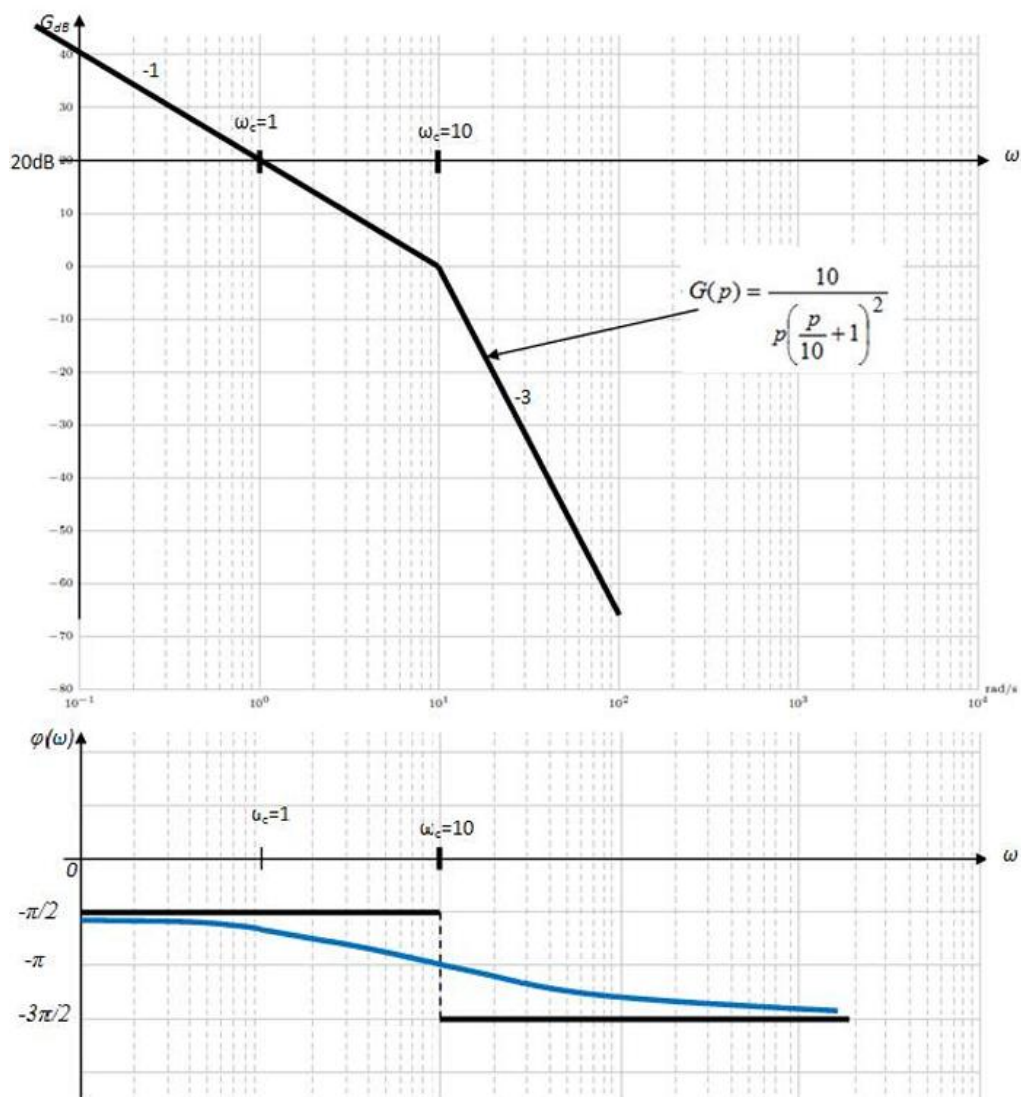
Pour les phases :

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\angle\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right) = -\frac{\pi}{2} - 2\arctg\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = \sum_{i=1} \angle G_i$$

Pour tracer $\angle G(j\omega)$ on trace d'abord les $\angle G_i$ puis on fait la somme géométrique et **on calcul des points pour trouver la courbe réelle.**

ω	φ
1	-101
2	-112
5	-143
8	-167
9	-173
10	-180
12	-190
15	-202
18	-211
20	-216



2. Calcul de la valeur du gain K qui assure au système une marge de phase $M\varphi=45^\circ$.

$$G(p) = \frac{10K}{p\left(\frac{p}{10} + 1\right)^2}$$

Exploitation de l'information sur la marge de phase :

$$M\varphi = 180^\circ + \angle G(j\omega_{c_0}), \quad \left(\omega_{c_0} / 20 \log_{10} |G(j\omega_{c_0})| = 0 \right)$$

$$M\varphi = \pi + \angle G(j\omega_{c_0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_{c_0}}{10} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow M\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_{c_0}}{10} \right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_{c_0}}{10} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_{c_0}}{10} \right) = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \omega_{c_0} = 10 \tan g \left(\frac{\pi}{8} \right) \Rightarrow \omega_{c_0} = 4.14 \text{ rd/s}$$

Détermination de K :

La pulsation ω_{c0} vérifie la relation :

$$\left(\omega_{c_0} / 20 \log_{10} |G(j\omega_{c_0})| = 0 \right) \Rightarrow |G(j\omega_{c_0})| = 1$$

$$|G(j\omega_{c_0})| = 1 \Rightarrow \frac{10K}{\omega_{c_0} \left(\frac{(\omega_{c_0})^2}{100} + 1 \right)} = 1 \Rightarrow K = \frac{\omega_{c_0} \left(\frac{(\omega_{c_0})^2}{100} + 1 \right)}{10}$$

$$\Rightarrow K = 0.48$$