

# **Support de cours**

## **Cours représentation des systèmes dans l'espace d'état**

**1ère année Master MRMI**

**Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT**

**Département Génie mécanique**

**ENSET Mohammedia**

**Université Hassan II de Casablanca**

# Table des matières

|          |                                                                                  |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                              | <b>1</b>  |
| 1.1      | Notion de système                                                                | 1         |
| 1.2      | Notion de modèle                                                                 | 2         |
| 1.3      | Grandes lignes du cours                                                          | 3         |
| <b>2</b> | <b>Rappel sur la fonction de transfert</b>                                       | <b>5</b>  |
| 2.1      | Équations préliminaires                                                          | 5         |
| 2.1.1    | Linéarité                                                                        | 5         |
| 2.1.2    | Modèle entrée/sortie : l'équation différentielle                                 | 6         |
| 2.1.3    | Transformée de Laplace : de l'équation différentielle à la fonction de transfert | 6         |
| 2.2      | Fonction de transfert                                                            | 8         |
| 2.2.1    | Comment obtenir la fonction de transfert ?                                       | 8         |
| 2.2.2    | Intérêt de la fonction de transfert                                              | 8         |
| <b>3</b> | <b>La représentation d'état</b>                                                  | <b>11</b> |
| 3.1      | Principe général                                                                 | 11        |
| 3.2      | De la non-linéarité à la linéarité                                               | 12        |
| 3.3      | Historique de la représentation d'état                                           | 15        |
| 3.4      | Comment obtenir un modèle d'état ?                                               | 16        |
| 3.4.1    | Par le jeu d'équations                                                           | 16        |
| 3.4.2    | Par l'équation différentielle unique                                             | 16        |
| 3.5      | De la fonction de transfert à la représentation d'état                           | 17        |
| 3.5.1    | Cas d'une fonction de transfert strictement propre ( $m < n$ )                   | 17        |
| 3.5.1.1  | Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan                               | 17        |
| 3.5.1.2  | Réalisation de forme compagne                                                    | 19        |
| 3.5.2    | Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ( $m = n$ )               | 20        |
| 3.6      | De la représentation d'état à la fonction de transfert                           | 21        |
| 3.7      | D'une réalisation à l'autre                                                      | 21        |
| 3.7.1    | Changement de base                                                               | 21        |
| 3.7.2    | Obtention d'une forme compagne (horizontale)                                     | 22        |
| 3.7.3    | Obtention d'une forme de Jordan                                                  | 22        |
| 3.7.3.1  | Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont distinctes                           | 23        |
| 3.7.3.2  | Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont multiples                            | 23        |
| <b>4</b> | <b>Réponse d'un modèle d'état</b>                                                | <b>25</b> |
| 4.1      | Solution du système autonome                                                     | 25        |
| 4.1.1    | Matrice de transition d'état                                                     | 25        |
| 4.1.2    | Solution de l'équation homogène                                                  | 26        |
| 4.2      | Solution de l'équation d'état complète                                           | 26        |
| 4.3      | Calcul de $e^{At}$                                                               | 27        |
| 4.3.1    | Méthode des séries                                                               | 27        |
| 4.3.2    | Par la transformation de Laplace                                                 | 28        |
| 4.3.3    | Méthodes des modes                                                               | 29        |

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.4      | Régime transitoire : influence des modes . . . . .         | 30        |
| 4.5      | Réponse impulsionnelle . . . . .                           | 31        |
| 4.6      | Réponse indicielle . . . . .                               | 31        |
| 4.7      | Réponse harmonique . . . . .                               | 32        |
| <b>5</b> | <b>Stabilité des modèles d'état</b>                        | <b>35</b> |
| 5.1      | Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO . . . . . | 35        |
| 5.2      | Stabilité d'un état d'équilibre . . . . .                  | 36        |
| 5.2.1    | Définition et recherche d'un état d'équilibre . . . . .    | 36        |
| 5.2.2    | Stabilité . . . . .                                        | 36        |
| 5.3      | Critères de stabilité . . . . .                            | 36        |
| 5.3.1    | Critère des racines . . . . .                              | 37        |
| 5.3.1.1  | $\text{rang}(A) = n$ . . . . .                             | 37        |
| 5.3.1.2  | $\text{rang}(A) = n$ . . . . .                             | 38        |
| 5.3.1.3  | $\text{rang}(A) < n$ . . . . .                             | 38        |
| 5.3.1.4  | En résumé . . . . .                                        | 39        |
| 5.3.1.5  | Stabilité interne et stabilité BIBO . . . . .              | 39        |
| 5.3.1.6  | Les marges de stabilité . . . . .                          | 40        |
| 5.3.2    | Critère de Routh/Hurwitz . . . . .                         | 40        |
| 5.3.3    | Méthode de Lyapunov . . . . .                              | 40        |
| <b>6</b> | <b>Commandabilité et observabilité</b>                     | <b>43</b> |
| 6.1      | Définitions . . . . .                                      | 43        |
| 6.1.1    | Commandabilité ou gouvernabilité . . . . .                 | 43        |
| 6.1.2    | Observabilité . . . . .                                    | 43        |
| 6.2      | Critère de Kalman . . . . .                                | 44        |
| 6.2.1    | Commandabilité . . . . .                                   | 44        |
| 6.2.2    | Observabilité . . . . .                                    | 44        |
| 6.2.3    | Dualité des deux concepts . . . . .                        | 46        |
| 6.3      | Critères s'appliquant aux formes de Jordan . . . . .       | 47        |
| 6.3.1    | $A$ diagonalisable . . . . .                               | 47        |
| 6.3.2    | $A$ non diagonalisable . . . . .                           | 47        |
| 6.4      | Grammiens de commandabilité et d'observabilité . . . . .   | 48        |
| 6.4.1    | Définition des grammiens . . . . .                         | 48        |
| 6.4.2    | Interprétation des grammiens . . . . .                     | 48        |
| 6.4.3    | Calcul des grammiens . . . . .                             | 49        |
| 6.5      | Modèles et structures . . . . .                            | 49        |
| 6.5.1    | Différence entre les modèles . . . . .                     | 49        |
| 6.5.2    | Systèmes composites . . . . .                              | 51        |
| 6.6      | Réalisation minimale . . . . .                             | 53        |
| 6.6.1    | Définition . . . . .                                       | 53        |
| 6.6.2    | Réalisation minimale et notion de pôles . . . . .          | 53        |
| 6.6.3    | Réalisation minimale et stabilité . . . . .                | 54        |

# Chapitre 1

## Introduction

L'Automatique est une discipline scientifique qui vise à conférer à un dispositif donné, appelé système, des propriétés souhaitées et ce, sans nécessité d'une intervention humaine. Une telle discipline requiert d'attribuer un modèle au comportement du dit système (phase de modélisation) et de l'utiliser afin, d'une part, de mieux comprendre ce comportement (phase d'analyse) et d'autre part, d'agir sur le système dans le but d'améliorer ses propriétés (phase de commande).

Sans revenir trop longuement dans cette introduction sur des concepts étudiés lors des cours relatifs à l'approche dite fréquentielle, il convient de rappeler quelques notions de base.

### 1.1 Notion de système

Un système est une combinaison de composants interconnectés pour atteindre un objectif, rendre un service à un ou plusieurs opérateurs humains. Le « composant » est un organe fonctionnel qui ne se limite pas à un objet physique mais peut correspondre à un objet plus abstrait de telle sorte qu'un système peut être économique, financier, démographique même si, dans le cadre de cet enseignement, seront plutôt rencontrés des systèmes physiques, c'est-à-dire mécaniques, électriques, électroniques, hydrauliques, pneumatiques, chimiques, mécatroniques voire biologiques.

Parmi les grandeurs, éventuellement physiques, mises en jeu dans le fonctionnement d'un système, l'on peut distinguer celles qui, générées par l'environnement extérieur au système, agissent sur ce dernier. Ce sont les entrées parmi lesquelles figurent celles dont l'homme a la maîtrise (les entrées de commande ou simplement entrées) et celles qui échappent à son contrôle (les perturbations). L'on distingue aussi les grandeurs par lesquelles le système agit sur l'environnement extérieur, à savoir les sorties. L'on note souvent par les lettres  $u$ ,  $d$  et  $y$ , respectivement les entrées, les perturbations et les sorties, de sorte qu'un système peut-être représenté par le schéma de la figure 1.1.

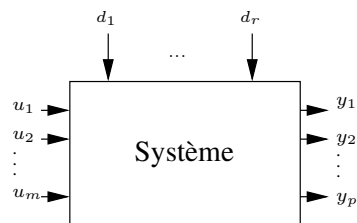


FIGURE 1.1 – Système comportant  $m$  entrées,  $p$  sorties et  $r$  perturbations

Dans le cadre de ce cours, seuls seront étudiés les systèmes monovariables pour lesquels  $m = p = 1$ , c'est-à-dire ne comportant qu'une seule entrée et une seule sortie.

Il est rappelé que l'automaticien est souvent amené à réintroduire l'information présente au niveau de la sortie sur l'entrée afin de modifier les performances du système. Ce dernier est alors dit bouclé. La notion de boucle étant déjà connue des étudiants, elle n'est pas détaillée dans cette introduction. Une partie de ce cours consacrée à la commande y reviendra. Il va de soi que les performances attendues sont les mêmes que celles envisagées lors de l'étude de l'approche fréquentielle, à savoir la stabilité, la forme des régimes transitoires, la précision et le rejet de perturbations.

## 1.2 Notion de modèle

Comme le sous-entend le préambule de cette introduction, l'analyse d'un système et *a fortiori* sa commande font appel à un modèle du comportement du système. De cette description mathématique du comportement peuvent naître des outils d'analyse et de commande qui sont utilisés par la suite. L'on distingue plusieurs automatiques selon la nature des signaux et des modèles considérés.

◇ Ainsi les signaux continus peuvent prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné alors que d'autres signaux sont susceptibles de prendre uniquement certaines valeurs bien déterminées. Sur la base de cette différence, l'on distingue l'automatique des systèmes à *événements continus* de l'automatique des systèmes à événements discrets. Seul le cas des événements continus sera envisagé dans ce cours.

◇ Une autre distinction tout aussi fondamentale se fait sur le temps. En effet, les signaux peuvent être définis à tout instant du temps ou simplement connus à des instants donnés (l'on parle de signaux discrets, discrétisés, ou échantillonnés). Les signaux de sortie sont ainsi mesurés, et donc connus, uniquement à certains instants, et la séquence des échantillons est obtenue sous forme numérique en sortie d'un convertisseur analogique numérique. Elle est transmise à un calculateur qui en déduit une séquence de signaux de commande. Celle-ci est transformée par un convertisseur numérique analogique qui restitue un signal à temps continu sur l'entrée du système. Pour le calculateur, l'ensemble constitué du système et des convertisseurs est vu comme un système à temps discret (ou, de manière plus générale, « système discret »). Dans ce cours, sera essentiellement considérée l'automatique des *systèmes à temps continu* (ou simplement des « systèmes continus »). Seul le dernier chapitre traitera de l'automatique des systèmes discrets.

◇ Il existe d'autres distinctions qui reposent sur le modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement du système. Ce modèle est obtenu soit par identification (l'on fait correspondre un modèle de structure donnée au comportement entrées/sorties du système) ou, et ce sera le cas ici, par une utilisation judicieuse des équations correspondant aux lois de la physique régissant le comportement du système. La plupart de ces équations sont différentielles et non linéaires. Cependant, il est souvent recommandé de travailler dans une gamme de valeurs autour d'un point de fonctionnement de telle sorte que les équations sont raisonnablement remplaçables par des équations différentielles dites linéaires à coefficients constants. Cette approximation permet donc de passer d'un modèle non linéaire à un modèle *linéaire*. Bien que moins fidèle à la réalité, ce dernier facilite l'analyse et la commande du système, notamment grâce à un principe fondamental, celui de *superposition* (ou de séparation), résumé sur la figure 1.2.

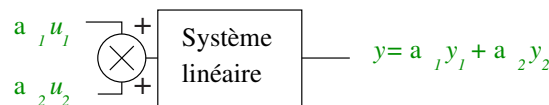


FIGURE 1.2 – Principe de séparation

Si l'entrée  $u_1$  entraîne la sortie  $y_1$  et si l'entrée  $u_2$  entraîne la sortie  $y_2$  alors une entrée  $a_1 u_1 + a_2 u_2$  entraîne une sortie  $y = a_1 y_1 + a_2 y_2$ . Ce cours est restreint à l'étude des systèmes linéaires.

◇ Enfin, comme il a déjà été mentionné, une dernière distinction est essentielle pour ce cours. Les systèmes sont soit monovariables (une seule entrée, une seule sortie) soit multivariables (plusieurs entrées, plusieurs sorties). Seuls les systèmes *monovariables* seront étudiés.

En résumé, ce cours concerne les systèmes **linéaires monovariables** (continus et **discrets**), c'est-à-dire ceux qui peuvent être décrits par une fonction de transfert.

### **1.3 Grandes lignes du cours**

Compte tenu des connaissances préalables des étudiants, ce cours est organisé comme suit. Après un rappel sur la fonction de transfert, son origine, son intérêt, un nouveau modèle alternatif est présenté : la représentation d'état linéaire. Ses propriétés sont explicitées, en particulier le lien existant avec la fonction de transfert. Une fois ce modèle introduit, l'on s'intéresse à la manière de déterminer la réponse des systèmes linéaires monovariables. Ensuite, il sera montré comment analyser la stabilité d'un tel modèle d'état. Bien moins familières seront les notions de commandabilité et d'observabilité d'une représentation d'état. La commande de tels modèles sera abordée vers la fin du cours avant de consacrer une chapitre au modèle d'état discret et de conclure sur les perspectives d'étude en automatique.

## Chapitre 2

# Rappel sur la fonction de transfert

Dans ce chapitre, l'on revient brièvement sur la notion *a priori* familière de fonction de transfert. D'où vient-elle ? Comment l'obtenir ? Pourquoi est-elle utilisée ?

### 2.1 Équations préliminaires

Il faut d'abord noter que le système évoluant avec le temps, les grandeurs impliquées peuvent être assimilées à des signaux temporels, c'est-à-dire, mathématiquement, des fonctions du temps. Lors de la phase de modélisation, l'on essaie généralement de décrire le comportement du système par un jeu d'équations, de relations mathématiques entre les signaux, qui paraît correspondre fidèlement à ce qu'est le système. Dans le cas d'un système physique, l'on s'appuie sur les lois de la physique (électricité, mécanique, etc...) pour déterminer plusieurs équations reliant les différentes grandeurs en jeu, en essayant de prendre en compte tous les phénomènes afin de décrire l'intégralité du système. Très souvent, ce dernier fait apparaître un comportement dynamique (et pas seulement statique) de sorte que les équations obtenues sont non seulement algébriques mais aussi différentielles.

Prenons comme exemple un circuit RLC comme celui de la figure 2.1

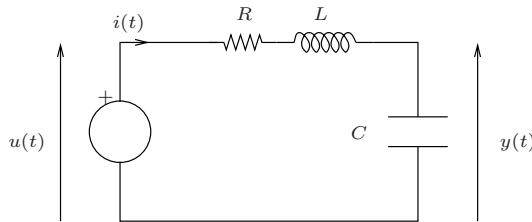


FIGURE 2.1 – Circuit RLC

Les équations issues des lois de l'électricité qui régissent le comportement du circuit RLC sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

#### 2.1.1 Linéarité

La première constatation souvent fâcheuse est que ces équations algébro-différentielles ne sont pas linéaires en fonction des grandeurs impliquées ou de leurs dérivées successives. Or, les modèles non linéaires sont par essence difficiles à manipuler. Cela signifie en pratique qu'ils rendent ardues l'analyse du comportement du système et, plus encore, sa commande. Par conséquent, même si c'est une entorse au principe de description fidèle de la dynamique

du système, l'on décide bien souvent de travailler dans une gamme de valeurs des grandeurs se situant autour de valeurs centrales constituant ce qu'il est convenu d'appeler un point de fonctionnement. Sous réserve de ne pas trop s'éloigner de ce point de fonctionnement, l'on peut approcher les équations non linéaires par des équations certes approximatives mais linéaires. Sans revenir sur ces notions connues, l'on peut utiliser pour ce faire des développements limités ou de Taylor au premier ordre de certaines fonctions mathématiques en jeu. L'on parle alors du système non linéaire et de son « linéarisé tangent » qui est linéaire. L'on s'arrange également pour que les coefficients intervenant dans les équations soient indépendants du temps. L'on parle alors de modèle linéaire invariant dans le temps.

Dans le cas des équations (2.1), elles sont déjà linéaires à coefficients constants donc il est inutile de recourir à une approximation.

### 2.1.2 Modèle entrée/sortie : l'équation différentielle

Pour simplifier le modèle linéaire obtenu, pour le rendre plus compact, une tendance habituelle consiste à regrouper toutes les équations en une seule. Il s'agit d'éliminer du jeu d'équations toutes les grandeurs internes au système qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie. L'on obtient alors une unique équation différentielle ne faisant apparaître que l'entrée  $u$ , la sortie  $y$  et, éventuellement, leurs dérivées successives. Une telle équation a l'allure suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (2.2)$$

(NB : le point sur une lettre désignant un signal correspond à la dérivation par rapport au temps ; exemple :  $\dot{y}(t)$  signifie  $\frac{dy(t)}{dt}$ .)

Il s'agit là d'un modèle de comportement entrée/sortie, c'est-à-dire qui traduit l'évolution de la sortie en fonction de celle de l'entrée et ce, en éludant la dynamique interne du système.

Physiquement, il est inconcevable que  $m$  soit strictement supérieur à  $n$ . L'on peut toujours imaginer un modèle mathématique correspondant à ce cas mais en pratique, cela signifierait que la sortie du système à un instant donné dépend de la valeur de l'entrée à un instant ultérieur. C'est pourquoi, l'on suppose que  $m \leq n$ . Un tel système est dit *causal*.

Si l'on revient à l'exemple du circuit RLC, en regroupant les deux équations données en (2.1), l'on obtient, par élimination de  $i(t)$  :

$$u(t) = LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \dot{y}(t) + y(t). \quad (2.3)$$

Cette équation différentielle unique constitue bien un modèle du lien existant entre l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$ .

En outre, il est clair que des valeurs élevées de  $m$  et  $n$  rendent difficile la détermination analytique de l'expression du signal  $y(t)$ . En d'autres termes, il est fastidieux, sinon impossible, de résoudre une équation différentielle d'ordre élevé. Aussi a-t-on ressenti le besoin d'introduire un nouvel outil de modélisation, plus aisé à manipuler, et plus à même d'aider l'automaticien dans les phases d'analyse et de commande : il s'agit de la fonction de transfert.

### 2.1.3 Transformée de Laplace : de l'équation différentielle à la fonction de transfert

Pour éviter d'avoir à manipuler une équation différentielle pas toujours simple, les électroniciens et à leur suite, les automaticiens, ont décidé d'exploiter un outil mathématique bien connu, la transformée de Laplace.

Chaque signal temporel  $f(t)$  causal, c'est-à-dire pour lequel  $f(t) = 0, \forall t < 0$ , peut subir une transformation dite de « Laplace », notée  $\mathcal{L}$  et ainsi définie :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

$F(p)$ , si elle existe, c'est-à-dire si l'intégrale est calculable, est appelée transformée de Laplace de  $f(t)$  et la variable complexe  $p = \alpha + j\beta$  (notée  $s$  dans les ouvrages de culture anglo-saxonne) est connue sous le nom de variable de Laplace. Cet opérateur possède les propriétés suivantes :

1. linéarité :

$$f_1(t) + kf_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p) + kF_2(p)$$

2. théorème de la dérivation :

$$\bullet \dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$$

$$\bullet \ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\bullet \frac{d^l f(t)}{dt^l} \xrightarrow{\mathcal{L}} p^l F(p) - p^{l-1}f(0) - p^{l-2}\dot{f}(0) - \dots - \frac{df^{l-1}(0)}{dt^{l-1}}$$

$p$  correspond donc, en présence de conditions initiales nulles, à une dérivation dans le domaine de Laplace.

3. théorème de l'intégration :

$$\bullet \int_0^{t \geq 0} f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$$

$1/p$  est donc l'opérateur d'intégration dans le domaine de Laplace.

4. théorème du retard :

$$\bullet f(t - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\theta p} F(p)$$

5. théorème du décalage fréquentiel :

$$\bullet f(t)e^{\omega t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p + \omega)$$

6. théorème de la valeur initiale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

7. théorème de la valeur finale :

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

(sous réserve d'existence des deux limites)

Comme il est parfois fastidieux de calculer la transformée de Laplace d'une fonction temporelle compliquée (de même que la transformée inverse notée  $\mathcal{L}^{-1}$ ), en pratique, les automaticiens disposent de tableaux de transformées.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (2.1), il vient :

$$U(p) = LC(p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)) + RC(pY(p) - y(0)) + Y(p). \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) constitue un lien entre la transformée de Laplace du signal d'entrée et celle du signal de sortie.

## 2.2 Fonction de transfert

### 2.2.1 Comment obtenir la fonction de transfert ?

La fonction de transfert est un modèle de comportement entrée/sortie qui s'obtient à partir de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants. Plutôt que de chercher à obtenir  $y(t)$  en fonction de  $u(t)$ , l'on cherche à obtenir  $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$  en fonction de  $U(p) = \mathcal{L}(u(t))$ . Comme il s'agit de déterminer un modèle qui soit indépendant des conditions initiales, ces dernières sont considérées nulles et l'on applique tout simplement la transformée de Laplace à l'équation différentielle (2.2), ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (2.5)$$

$G(p)$  est une fraction rationnelle dépendant de la variable de Laplace, de numérateur  $N(p)$  et de dénominateur  $D(p)$ . Elle est appelée fonction de transfert et se révèle très utile pour l'étude des systèmes linéaires monovariés.  $G(p)$  est dite d'ordre  $n$  et selon la règle de causalité, l'on aura généralement  $m \leq n$ .

L'on note que les racines de  $N(p)$  sont appelées zéros du système et celles de  $D(p)$  sont appelées pôles du système. Bien que les zéros aient une influence difficile à estimer sur le comportement du système, il convient surtout de se souvenir que les pôles ont une influence encore plus grande en termes de stabilité et de régime transitoire de la réponse du système. Cette influence des pôles est beaucoup plus facile à prévoir (voir cours sur la fonction de transfert).

Dans le cas du circuit RLC, l'application de  $\mathcal{L}$  conduit à :

$$Y(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} U(p) + \frac{LCpy(0) + LC\dot{y}(0) + RCy(0)}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{N(p)}{D(p)}}_{G(p)} U(p) + \frac{I(p)}{D(p)}. \quad (2.6)$$

$G(p)$  permet de déterminer le terme de  $Y(p)$  dépendant seulement de  $U(p)$  et non des conditions initiales, ici présentes au niveau du numérateur  $I(p)$ .

### 2.2.2 Intérêt de la fonction de transfert

Même dans le cas d'un modèle d'ordre élevé, la réponse du système à une excitation  $u(t)$  est plus facile à déterminer si l'on utilise la fonction de transfert. En effet, lorsque  $u(t)$  est une impulsion de Dirac (réponse impulsionnelle), ou un échelon unitaire (réponse indicielle), alors  $Y(p) = G(p)U(p)$  peut être décomposé en éléments simples faisant intervenir les pôles du système. Ainsi chaque élément simple génère un terme de la réponse  $y(t)$  par application de  $\mathcal{L}^{-1}$ . C'est ainsi que l'on voit l'influence des pôles. De ce fait, connaître la fonction de transfert, c'est connaître ses pôles donc prévoir en partie le comportement du système.

Dans le cas où  $u(t)$  est un signal sinusoïdal (réponse harmonique), l'on peut tracer, par exemple, le diagramme de Bode du modèle grâce à  $G(p)$  (voir cours sur la fonction de transfert). Ce diagramme est particulièrement utile

pour comprendre la réaction du système à des signaux et ce, selon la fréquence de ces signaux. La fonction de transfert permet donc une analyse fréquentielle du comportement du système par l'intermédiaire du diagramme de Bode.

En outre, de  $G(p)$ , l'on déduit facilement des lois de commande (par exemple de type régulateur PID), basées sur l'obtention de certaines marges de gain ou marges de phase, déterminables grâce au diagramme de Bode. De même,  $G(p)$  peut-être utilisée pour calculer une loi de commande plaçant les pôles du système en boucle fermée. Dans les deux cas, c'est la manipulation de  $G(p)$  qui conduit à l'établissement de la loi de commande, ce qui démontre la pertinence d'un tel outil.

Concernant le circuit RLC, l'on peut par exemple calculer les racines de  $D(p)$  pour savoir si le signal  $y(t)$  comportera une forte oscillation ou pas. L'on peut aussi écrire  $G(p)$  sous la forme dite canonique de deuxième ordre (voir cours sur la fonction de transfert)

$$G(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2},$$

la valeur de  $m$ , le coefficient d'amortissement, renseignant sur le niveau d'oscillation.

## Chapitre 3

# La représentation d'état

Devant la complexité croissante des systèmes, la fonction de transfert peut parfois sembler ne pas être le modèle le plus approprié pour décrire les comportements considérés. La recherche de performances toujours plus fines peut conduire à la même conclusion. Ceci est particulièrement vrai si l'on sort du cadre de ce cours et si l'on envisage l'étude de systèmes multivariables. Pour cette raison, d'autres modèles sont utilisés et apparaissent comme une alternative à la fonction de transfert. Le plus célèbre d'entre eux est la représentation d'état ou équation d'état ou encore modèle d'état. Il fut popularisé dans les années 1960 même si son origine est plus lointaine. Il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type entrée/sortie. Ce chapitre présente les principes de base d'un tel modèle en se restreignant néanmoins, comme pour la fonction de transfert, au cas linéaire monovariable continu.

### 3.1 Principe général

Comme précisé dans le préambule ci-avant, il s'agit de décrire un système en considérant sa dynamique interne et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie. Ainsi, il convient de « redonner de l'importance » à des grandeurs qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie, tout en prenant en compte l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement. Une telle préoccupation conduit aux définitions suivantes :

**État :** l'état d'un système dynamique est le plus petit ensemble de variables, de grandeurs, tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant  $t = t_0$ , ainsi que celle du signal d'entrée pour  $t \geq t_0$ , suffit à déterminer complètement le comportement du système pour  $t \geq t_0$ .

L'évolution de l'état à partir de l'instant  $t_0$  n'est donc pas déterminée par son évolution avant l'instant  $t_0$ . Seuls importent l'état à  $t_0$  et l'entrée à partir de  $t_0$ , comme l'illustre la figure 3.1. où plusieurs trajectoires de  $x(t)$  avant l'instant  $t_0$  aboutissant en  $x(t_0)$  sont compatibles avec la même trajectoire de  $x(t)$  après  $t_0$ .

**Variables d'état :** ce sont les variables, grandeurs qui constituent l'état du système.

L'on considère traditionnellement que ces variables sont au nombre de  $n$  et notées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Cette valeur de  $n$  est l'ordre du modèle. Chacune de ses variables est associée à un signal temporel. L'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$  constitue l'état. Les grandeurs  $x_i$  ne sont pas nécessairement des grandeurs physiques.

**Vecteur d'état :** de manière plus mathématique, l'on représente l'état par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur, *a priori* réel, de dimension  $n$ , que l'on note  $x = [x_1, \dots, x_n]'$ .

Il va de soi que les expressions *état* et *vecteur d'état* sont fréquemment utilisées l'une pour l'autre sans que cela n'altère fondamentalement le propos.

**Espace d'état :** Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état  $x$  est susceptible d'évoluer, chaque instance de  $x$  étant associée à un point de cet espace. Cet espace est donc  $\mathbb{R}^n$ .

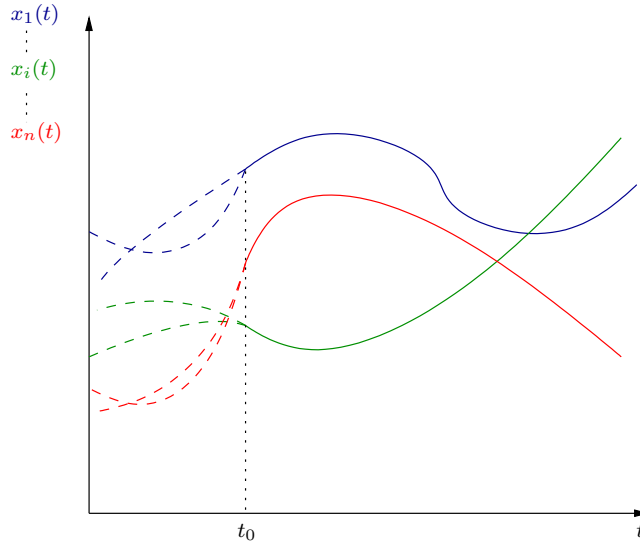


FIGURE 3.1 – L'évolution des composantes de  $x(t)$  après  $t_0$  (trait plein) est indépendante de leur évolution avant  $t_0$  (pointillés)

L'on dit souvent de la représentation d'état que c'est une modélisation dans l'espace d'état.

Pour un système dynamique, le vecteur d'état n'est pas unique. Plusieurs choix sont possibles. Mais pour que  $x$  soit effectivement vecteur d'état, il importe que chacune des variables d'état apparaissent, de manière explicite ou implicite, sous forme dérivée dans le jeu d'équations décrivant le système. Dans le cas contraire, il sera difficile de se servir de cette variable pour prévoir l'évolution du système. Cette constatation conduit à un système d'équations différentielles auquel s'ajoute une équation algébrique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t). \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions susceptibles de prendre presque n'importe quelles formes. Cependant, l'on ne parle de représentation d'état que si la fonction vectorielle  $f$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est Lipschitzienne en  $x$ , continue en  $u$  et continue par morceaux en  $t$ .

Le système différentiel apparaissant dans (3.1) est appelé *équation dynamique* ou *équation d'évolution* alors que l'équation algébrique est dite *équation de mesure* ou *équation de sortie*.

## 3.2 De la non-linéarité à la linéarité

Bien entendu,  $f$  et  $g$  sont des fonctions éventuellement très complexes, généralement non linéaires et il convient, dans le cadre de ce cours, de recourir à une approximation linéaire. Pour ce faire, l'on considère souvent que l'état du système ainsi que son entrée évoluent au voisinage d'un point d'équilibre, ou point de fonctionnement

et l'on fait l'hypothèse que toutes les variations autour de ce point sont faibles. Ainsi, en supposant que ce point d'équilibre est caractérisé par les valeurs  $x_e$  et  $u_e$ , l'on peut considérer la variation d'état  $\xi(t) = x(t) - x_e$ , celle d'entrée  $v(t) = u(t) - u_e$  et celle de sortie  $z(t) = y(t) - g(x_e, u_e, t)$ . Si les valeurs de  $v(t)$  et des composantes  $\xi_i(t)$  de  $\xi(t)$  restent faibles (donc assimilables aux différentielles correspondantes), l'on peut calculer les matrices jacobiniennes suivantes

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} ; \quad B(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_e, u_e, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} ; \quad (3.2)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_e, u_e, t) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_e, u_e, t) \end{bmatrix} ; \quad D(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(x_e, u_e, t).$$

Ainsi, si l'on considère que  $\xi(t)$  et  $v(t)$  sont respectivement le nouveau vecteur d'état et la nouvelle entrée du modèle « linéarisé tangent » autour du point d'équilibre, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)v(t) \\ z(t) = C(t)\xi(t) + D(t)v(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

L'approximation linéaire au premier ordre consiste donc à supposer que  $\xi(t)$  et  $v(t)$  restent faibles et à décrire le comportement du système par (3.3). Comme  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  sont les notations habituelles de l'état, de l'entrée et de la sortie, l'on écrira plutôt

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

d'autant plus qu'il n'est pas rare que l'origine soit le point d'équilibre ( $\xi = x$ ), que l'on s'intéresse au système autonome, voire que le modèle soit obtenu directement sous forme linéaire, sans avoir à recourir à une approximation. Par ailleurs, les signaux  $u(t)$ ,  $y(t)$  et  $x_i(t)$  sont de toute évidence des signaux temporels. De plus, il est assez fréquent, comme il a déjà été mentionné, que les fonctions non-linéaires  $f$  et  $g$  ne dépendent pas explicitement du temps. L'on peut alors très souvent omettre la dépendance en  $t$  de manière à obtenir la représentation d'état suivante, qui correspond à un système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les relations données en (3.5) constituent une représentation d'état *linéaire invariante dans le temps* d'un système. Par abus de langage, l'on parle souvent de système **LTI** (acronyme anglais pour **Linear Time-Invariant**, c'est-à-dire linéaire invariant dans le temps). C'est ce type de modèle qui fait l'objet de ce cours.

La matrice  $A$  est appelée *matrice d'état* ou *d'évolution*. On la nomme aussi parfois *matrice dynamique*.  $B$  est appelée *vecteur d'entrée* ou de *commande* (d'où une ambiguïté avec le vecteur  $u$ ).  $C$  est le *vecteur de sortie*, d'*observation* ou de *mesure* (d'où une ambiguïté avec le vecteur  $y$ ). Quant à  $D$ , c'est un scalaire dit de *transmission directe*, qui est nul s'il n'existe aucun lien statique direct entre le signal d'entrée et celui de sortie.

**Remarque 3.1** Dans le cas où  $f$  et  $g$  dépendent explicitement de  $t$ , alors  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des fonctions de  $t$  et le modèle est dit *linéaire variant dans le temps*. Il est souhaitable, si possible de recourir aussi à une approximation pour considérer ces matrices comme constantes. L'on retrouve alors un modèle LTI.

La représentation d'état peut-être associée au schéma-bloc donné par la figure 3.2.

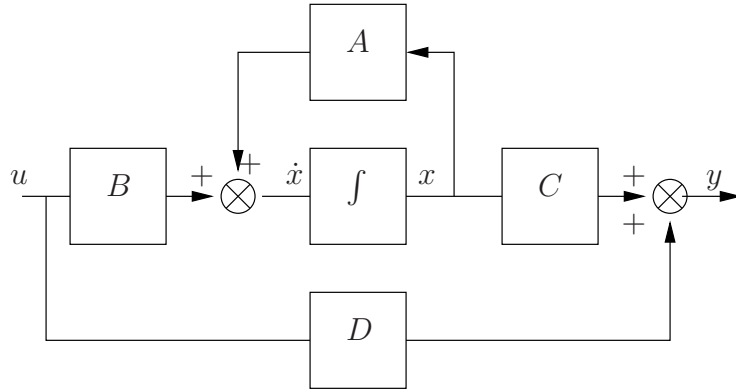


FIGURE 3.2 – Schéma-bloc d'une représentation d'état

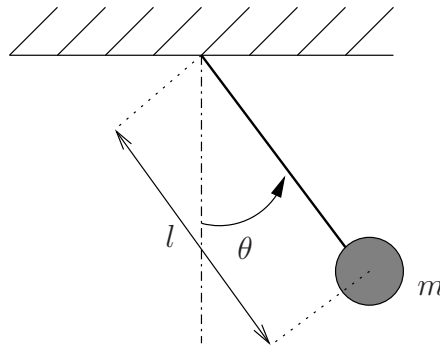


FIGURE 3.3 – Pendule en mouvement libre

Exemple :

L'on considère le mouvement du pendule autonome représenté sur la figure 3.3.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique et le choix d'un vecteur d'état  $x$  tel que  $x' = [\theta \ \dot{\theta}]$  conduit à instancier l'équation (3.1) ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 & = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

où  $g$  est la constante gravitationnelle,  $l$  la longueur du pendule,  $m$  sa masse et  $k$  sa raideur. Le système étant autonome, les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  ne dépendent pas d'une entrée  $u$ . Le point de fonctionnement considéré est le seul des deux points d'équilibre (c.-à-d.  $\dot{x} = 0$ ) physiquement atteignable, à savoir  $x'_e = [0 \ 0]$ , l'autre étant  $x'_e = [\pi \ 0]$ .

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) &= 0 & ; & \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) = 1 & ; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e) &= -\frac{g}{l} \cos(x_{e1}) & ; & \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e) = -\frac{k}{m} . \end{aligned}$$

Cette approximation conduit à la représentation LTI du système autonome

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} x$$

### 3.3 Historique de la représentation d'état

Bien que la fonction de transfert fût popularisée dans les années 30 et 40 alors que la représentation le fut dans les années 1960, il n'est pourtant pas exact de dire que cette dernière est ultérieure. En réalité, la notion d'état était définie depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle et apparaissait par exemple en Mécanique (la formulation de la loi de Newton par W. R. Hamilton utilise implicitement la notion d'état) et en Thermodynamique au travers des contributions de H. Poincaré). Elle est particulièrement présente dans les travaux d'Alexandr Lyapunov (mathématicien et physicien russe (1857-1918)) relatifs à la stabilité du mouvement en mécanique (1892). Ces travaux eurent d'importantes répercussions, entre autres dans la perception de certains modèles d'astronomie mais aussi dans bien d'autres domaines. Cependant, malgré deux traductions françaises en 1902 et 1907 puis une anglaise en 1949, ils ne restèrent un centre d'intérêt que dans les milieux scientifiques soviétiques.

Pendant ce temps, en occident, ces méthodes dites temporelles (parce que basées sur des modèles faisant intervenir des dérivées par rapport au temps) furent supplantées par l'approche dite fréquentielle. En effet, le formalisme de la contre-réaction et les théories connexes furent progressivement développées dans les années 1930 et 1940 par des électroniciens (Black, Bode aidés tout de même de mathématiciens tel Nyquist) qui virent les systèmes d'abord comme des filtres et privilégièrent donc l'étude du comportement d'un système en fonction de la fréquence du signal d'entrée. Par ailleurs, certains outils mathématiques disponibles depuis longtemps (travaux de Fourier, Laplace, Routh, Hurwitz) semblaient convenir parfaitement à leurs besoins ce qui conduisit tout naturellement à une prééminence de la fonction de transfert en tant que modèle de système linéaire. En outre, les progrès de l'électronique et les nécessités d'accentuer le développement de technologies usant d'Automatique en temps de guerre aidèrent à la popularisation de cet outil, particulièrement aux USA. La France fut partie prenante de cette évolution, surtout après la guerre. De fait, il est vrai que la fonction de transfert s'avéra un outil très utile.

Néanmoins, pendant ce temps, les Soviétiques continuèrent d'accorder une grande importance à la notion d'état et aux travaux de Lyapunov, grâce, entre autres, à Chetayev et Lur'e qui s'intéressaient à des problèmes aéronautiques et/ou militaires. L'occident ne prêta pas forcément beaucoup d'attention à ce clivage scientifique jusqu'en 1957 où le premier satellite artificiel, Spoutnik, fut mis en orbite par les scientifiques de l'est. Il apparut donc clairement que si l'approche fréquentielle était utile, il y avait aussi à gagner à développer l'approche temporelle, en particulier dans le domaine spatial. C'est pourquoi le professeur Salomon Lefschetz organisa une équipe de recherche, aux USA, chargée de promouvoir en occident la théorie de Lyapunov. Parmi ces chercheurs figuraient entre autres La Salle, Bertram et surtout Kalman. Ce dernier fut le grand initiateur de la représentation d'état linéaire et sut mettre en évidence l'intérêt de cette dernière au regard des outils de l'algèbre linéaire. Il introduisit les notions de commandabilité et d'observabilité et, grâce à ses travaux, la théorie de Lyapunov fit un retour significatif dans la communauté des automaticiens occidentaux. Des projets à caractère spatial tels qu'Apollo ou Polaris bénéficièrent directement de ce regain d'intérêt.

Il est à noter, enfin, que, sans remplacer la fonction de transfert qui continue d'être utilisée efficacement pour de nombreuses applications, la représentation d'état se prête particulièrement bien à l'étude des systèmes multivariables (plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties) fréquemment rencontrés dans le domaine aérospatial. Selon certaines nomenclatures anglo-saxonnes, la branche de l'automatique basée sur le concept de représentation d'état est qualifiée de moderne, par opposition à la branche fréquentielle parfois qualifiée de classique. De fait, l'approche temporelle ou interne basée sur les travaux de Kalman est celle qui procure le plus d'outils novateurs de nos jours. Les notions de base de cette approche étant cependant maintenant bien connues, le qualificatif de « moderne » n'est pas toujours considéré comme approprié ou tout du moins communément admis.

### 3.4 Comment obtenir un modèle d'état ?

L'on peut obtenir une représentation d'état linéaire en manipulant le jeu d'équations préliminaires ou en opérant à partir de l'équation différentielle unique.

#### 3.4.1 Par le jeu d'équations

L'on suppose ici que les équations manipulées sont déjà linéaires. Par souci de simplicité, l'on considère l'exemple du circuit RLC modélisé par les équations (2.1). Les deux grandeurs dont la dérivée intervient sont  $i$  et  $y$  (à partir de maintenant, la dépendance en le temps est omise pour alléger les notations). Soient donc les deux variables d'état  $x_1 = i$  et  $x_2 = y$ . Les équations de (2.1) peuvent se récrire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1. \end{cases}$$

ce qui conduit au modèle (3.5) avec :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = [0 \quad 1] ; \quad D = 0. \quad (3.6)$$

#### 3.4.2 Par l'équation différentielle unique

La technique consiste à considérer l'équation différentielle globale (2.2). L'on suppose d'abord que  $m = 0$ . L'on suppose également, sans perte de généralité, que  $a_n = 1$  et l'on pose, sans se soucier de la signification du vecteur d'état, les variables d'état suivantes :

$$x_1 = y ; \quad x_2 = \dot{y} ; \quad x_3 = \ddot{y} ; \quad \dots ; \quad x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}.$$

L'on peut alors montrer que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] ; \quad D = 0. \quad (3.7)$$

La technique ci-dessus appliquée à l'équation (2.3) conduit à récrire cette dernière ainsi :

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}u.$$

L'on obtient alors

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} ; \quad C = [1 \quad 0] ; \quad D = 0. \quad (3.8)$$

qui est un quadruplet de matrices différent de celui trouvé précédemment et donné en (3.6). Ceci permet de constater que le modèle d'état obtenu dépend du choix des variables d'état. Il n'est donc pas unique, contrairement à la fonction de transfert. En effet, cette dernière est un modèle externe et non interne, c'est-à-dire un modèle

entrée/sortie. Or, la sortie et l'entrée étant uniques, il n'existe qu'une fonction de transfert.

Dans le cas où  $m \neq 0$ , la procédure est un peu plus complexe mais répond au même principe. L'on suppose que  $m = n$  sans perte de généralité (il suffit de considérer  $b_j = 0 \forall j \mid m < j \leq n$ ). Le coefficient  $a_n$  est toujours supposé égal à 1. L'on définit :

$$\begin{cases} \beta_n = b_n, \\ \beta_{n-j} = b_{n-j} - \sum_{k=0}^{j-1} a_{n-j+k} \beta_{n-k} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Les variables d'état peuvent alors être ainsi choisies :

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_n u \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_{n-1} u \\ x_3 = \dot{x}_2 - \beta_{n-2} u \\ \vdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} - \beta_1 u \end{cases}$$

Il vient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D = \beta_n, \quad (3.9)$$

Pour le circuit RLC, on retrouve les quatre matrices données en (3.8).

### 3.5 De la fonction de transfert à la représentation d'état

Comme il vient d'être vu, s'il existe une seule et unique fonction de transfert décrivant un système linéaire, il peut en revanche exister plusieurs représentations d'état dites réalisations du système. Dans cette partie, il est montré comment passer de la fonction de transfert à plusieurs formes de réalisations.

Dans un premier temps, il est supposé que  $n > m$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de transmission directe ( $D = 0$ ). Il existe alors des méthodes pour déterminer des réalisations diagonales, de Jordan, ou encore dites compagnes. Ensuite, le cas  $m = n$  est envisagé. Il est alors montré que l'on peut néanmoins bénéficier des résultats obtenus dans le cas où  $n > m$ .

#### 3.5.1 Cas d'une fonction de transfert strictement propre ( $m < n$ )

##### 3.5.1.1 Réalisation diagonale ou quasi diagonale de Jordan

L'on suppose sans perte de généralité que  $a_n = 1$  de sorte que la fonction de transfert  $G(p)$  peut s'écrire :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)}.$$

L'expression ci-dessus fait apparaître les pôles du système, c'est-à-dire les racines du dénominateur  $D(p)$ .

##### Pôles distincts

Dans le cas où tous les pôles  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de  $Y(p) = G(p)U(p)$  et il vient :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\alpha_i}{p - \lambda_i} U(p) \right)}_{X_i(p)}.$$

Si l'on focalise son intention sur chaque terme  $X_i(p)$ , l'on déduit que

$$pX_i(p) = \alpha_i U(p) + \lambda_i X_i(p),$$

ce qui se traduit dans le domaine temporel, par application de  $\mathcal{L}^{-1}$ , par

$$\dot{x}_i = \alpha_i u + \lambda_i x_i.$$

En choisissant le vecteur d'état  $x = [x_1 \dots x_n]'$ , il vient aisément la réalisation suivante, dite diagonale :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1 \ \dots \ 1] x, \end{cases} \quad (3.10)$$

laquelle peut également être modifiée en remplaçant  $B$  par  $C'$  et  $C$  par  $B'$ . De manière plus générale, dans une réalisation diagonale,  $B = [\beta_1 \dots \beta_n]'$  et  $C = [\gamma_1 \dots \gamma_n]$  doivent être telles que  $\beta_i \gamma_i = \alpha_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Une réalisation de la forme (3.10) est dite diagonale car la matrice d'évolution  $A$  est diagonale.

Par exemple, la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p-1)}$$

peut conduire à la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} u \\ y = [-1 \ 1 \ 2] x. \end{cases}$$

### Pôles multiples

Dans le cas où  $G(p)$  possède un pôle d'ordre de multiplicité supérieur à 1, la diagonalisation de  $A$  n'est pas forcément possible. Pour comprendre ce qui peut être envisagé dans cette situation, l'on peut tout simplement considérer une fonction de transfert  $G(p)$  ne possédant qu'un seul pôle  $\lambda$  de multiplicité  $n$ . L'on a alors :

$$Y(p) = G(p)U(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\frac{U(p)}{(p-\lambda)^i}}_{X_{n+1-i}(p)}.$$

L'on voit bien sur cette expression que le premier terme est tel que

$$X_n(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_n = \lambda x_n + u.$$

Quant aux autres termes, ils sont tels que

$$X_{j-1}(p) = \frac{U(p)}{(p-\lambda)^j} = \frac{X_j(p)}{p-\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_{j-1} = \lambda x_{j-1} + x_j, \forall j \in \{2, \dots, n\}.$$

Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [\alpha_n \quad \alpha_{n-1} \quad \alpha_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_2 \quad \alpha_1] x. \end{cases} \quad (3.11)$$

Dans la réalisation ci-dessus, l'on constate que la matrice d'évolution  $A$  est quasi diagonale c.-à-d. constitue un bloc de Jordan.

Pour le cas où  $G(p)$  contient des pôles d'ordre de multiplicité divers, il suffit d'associer les deux cas répertoriés précédemment comme le montre l'exemple ci-après :

$$G(p) = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Il apparaît un pôle simple nul et un pôle double de Jordan égal à -1. Ceci conduit à la réalisation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u \\ y = [1 \quad 1 \quad 1] x. \end{cases}$$

**Remarque 3.2** Il est clair que ces formes de Jordan font apparaître les pôles de  $G(p)$  sur la diagonale de  $A$ . Ainsi, ces pôles sont aussi les valeurs propres de  $A$ . Lorsque les pôles sont multiples, la matrice peut ne peut être diagonale, mais ce n'est pas systématique. En effet, il est possible qu'une matrice carrée ayant des valeurs propres multiples puissent être diagonalisée (voir cours de mathématiques).

### 3.5.1.2 Réalisation de forme compagne

Il existe plusieurs réalisations de forme compagne qui peuvent être facilement obtenues à partir de la fonction de transfert. Ce paragraphe est restreint aux formes compagnes les plus classiques. Pour ce faire,  $G(p)$  est supposé de la forme (2.5) avec  $a_n = 1$ . Les deux formes dites « compagnes » les plus communément rencontrées sont :

◊ Forme compagne horizontale :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] x. \end{cases} \quad (3.12)$$

◊ Forme compagne verticale :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0] x. \end{cases} \quad (3.13)$$

Aucune justification rigoureuse n'est apportée ici mais l'on peut comprendre que ces formes compagnes sont liées aux formes issues de l'équation différentielle.

Reprenant le dernier exemple de fonction de transfert, il vient

$$G(p) = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p(p+1)^2} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + p},$$

qui peut correspondre à la forme compagne horizontale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 4 \ 2] x. \end{cases} \quad (3.14)$$

### 3.5.2 Cas d'une fonction de transfert non strictement propre ( $m = n$ )

Dans le cas où  $m = n$ , il est impossible d'appliquer directement les techniques présentées ci-avant pour obtenir une réalisation du système. Cependant, l'on peut se ramener au cas d'une fonction de transfert strictement propre en opérant une division polynomiale de la façon suivante :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 p + \dots + \mathbf{b}_n p^n}{D(p)} = \frac{R(p)}{D(p)} + Q = G_{pr}(p) + Q = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}{D(p)} + Q. \quad (3.15)$$

Comme  $m = n$ , le quotient  $Q$  est une constante et le reste  $R(p)$  est un polynôme de degré strictement inférieur à celui du diviseur  $D(p)$ . Ainsi,  $G_{pr}(p)$  est une fonction de transfert strictement propre.

Les coefficients du numérateur  $N(p)$  de la fonction de transfert globale  $G(p)$  sont notés  $\mathbf{b}_i$  pour les distinguer des coefficients  $b_i$  du numérateur  $R(p)$  du transfert strictement propre  $G_{pr}(p)$  extrait de  $G(p)$ .

Par ailleurs, l'on a  $Y(p) = G(p)U(p) = G_{pr}U(p) + QU(p) = Y_{pr}(p) + QU(p)$ . Donc, si l'on prend  $y_{pr}$  comme sortie, la fonction de transfert associée au système obtenu est  $G_{pr}$  dont on peut déterminer une réalisation  $(A, B, C)$ . Il vient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y_{pr} = Cx. \end{cases}$$

En posant  $D = Q$  et en réalisant le changement de variable inverse (dans le domaine temporel cette fois-ci)  $y = y_{pr} + Du$ , il vient :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

Par exemple, soit la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 5p + 1}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{(p^3 + 2p^2 + p) + (2p^2 + 4p + 1)}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{2p^2 + 4p + 1}{p^3 + 2p^2 + p} + 1 = G_{pr}(p) + 1.$$

$G_{pr}(p)$  correspond à la fonction de transfert du dernier cas traité. Il suffit donc de conserver les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  données en (3.14) en y ajoutant la transmission directe  $D = 1$ .

### 3.6 De la représentation d'état à la fonction de transfert

S'il existe plusieurs manières d'obtenir une réalisation à partir de la fonction de transfert, cette dernière étant unique, il n'existe qu'une façon de l'obtenir à partir d'une équation d'état. Pour cela, il faut noter que  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire qui peut donc s'appliquer aux matrices. Partant de l'équation (3.5), il vient

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p) \Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p), \end{cases}$$

les conditions initiales étant considérées nulles puisqu'il s'agit de déterminer  $G(p)$ . De toute évidence, ceci amène :

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D. \quad (3.16)$$

Le dénominateur  $D(p)$  de la fonction de transfert est souvent appelé polynôme caractéristique. Il est facile de voir qu'il est, dans l'expression ci-dessus, engendré par l'inversion matricielle et égal à (cf. §A.1.5 et §A.1.8.1 en annexe A) :

$$D(p) = \det(pI - A). \quad (3.17)$$

### 3.7 D'une réalisation à l'autre

Il a été vu qu'une fonction de transfert pouvait correspondre à plusieurs réalisations. En réalité, elle en admet même une infinité comme le montre le paragraphe qui suit.

#### 3.7.1 Changement de base

L'on peut passer d'une réalisation à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état  $\mathbb{R}^n$ . En effet, si l'on considère l'équation d'état (3.5), l'on peut appliquer au vecteur d'état un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état  $\tilde{x}$ . Ainsi, soit le changement de base  $x = M\tilde{x}$  où  $M$  est une matrice de rang plein, il vient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \underbrace{M^{-1}AM}_{\tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{M^{-1}B}_{\tilde{B}} u \\ y = \underbrace{CM}_{\tilde{C}} \tilde{x} + Du. \end{cases} \quad (3.18)$$

Le quadruplet de matrices obtenu est donc  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D)$ . Comme il existe une infinité de matrices de passage  $M$  utilisables, il existe aussi une infinité de réalisations équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet,

$$\tilde{G}(p) = CM(pI - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}B + D = CM(M^{-1}(pI - A)M)^{-1}M^{-1}B + D = C(pI - A)^{-1}B + D = G(p).$$

En outre, puisque  $M^{-1}AM$  est semblable à  $A$ , les valeurs propres de  $A$  sont les mêmes que celle que soit la réalisation considérée. De ce fait, ce sont toujours les pôles de  $G(p)$  c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique (même si l'on sera plus tard amené à porter une nuance à ce propos).

Les racines du polynôme caractéristique  $D(p)$ , c'est-à-dire les pôles du système, sont valeurs propres de la matrice d'état  $A$  quelle que soit la réalisation choisie.

Il est possible de passer d'une réalisation à une autre ce qui peut se révéler utile quand la seconde a une forme particulière. Le principe est de déterminer la matrice de passage.

### 3.7.2 Obtention d'une forme compagne (horizontale)

Soit un quadruplet de matrices  $(A, B, C, D)$  constituant une représentation d'état d'un système. Il s'agit alors de déterminer  $M$ , une matrice de passage à une autre réalisation  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D)$  qui soit compagne horizontale.

◇ L'on s'attache d'abord à exprimer les colonnes de  $M$  :

L'on note que  $\tilde{A}$  est de la forme (3.12) où les composantes  $a_i$  sont les coefficients du polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  qui peut être calculé :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i \lambda^i).$$

Ceci permet d'obtenir  $\tilde{A}$ . Si l'on décompose la matrice  $M$  en  $M = [m_1, \dots, m_n]$ , alors l'égalité  $AM = M\tilde{A}$  conduit à écrire

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{lll} Am_1 & = & -a_0 m_n \\ Am_2 & = & m_1 - a_1 m_n \\ & \vdots & \\ Am_{n-1} & = & m_{n-2} - a_{n-2} m_n \\ Am_n & = & m_{n-1} - a_{n-1} m_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{colonne 1} \\ \text{colonne 2} \\ \vdots \\ \text{colonne } n-1 \\ \text{colonne } n. \end{array} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} m_{n-1} & = (A + a_{n-1}I)m_n \\ m_{n-2} & = (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I)m_n \\ & \vdots \\ m_1 & = (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_2A + a_1I)m_n \end{array} \right. \quad (3.19) \end{aligned}$$

◇ L'on constate que  $M$  est fonction de  $m_n$ . Comment déterminer  $m_n$  ?

Compte tenu de  $Am_1 = -a_0 m_n$ , il vient :

$$(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I)m_n = 0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, toute matrice  $A$  vérifie son propre polynôme caractéristique, c.-à-d.

$$P(A) = \det(A - A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0, \quad (3.20)$$

ce qui signifie que l'égalité précédente est vérifiée quelle que soit  $A$  et quel que soit  $m_n$ .

◇ Procédure pratique :

Il est donc possible de fixer arbitrairement  $m_n \neq 0$  et de déterminer la matrice de changement de base  $M$  grâce à (3.19).

### 3.7.3 Obtention d'une forme de Jordan

Le problème est le même que celui du paragraphe précédent mais la matrice  $M$  doit être telle que  $\tilde{A}$  est diagonale ou de Jordan.

### 3.7.3.1 Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont distinctes

Il suffit de déterminer  $n$  vecteurs non nuls linéairement indépendants  $v_i$  tels que

$$Av_i = \lambda_i v_i.$$

Les vecteurs  $v_i$  sont appelés vecteurs propres. L'on a alors  $M = V = [v_1, \dots, v_n]$ . La matrice  $\Lambda = V^{-1}AV$  est diagonale et sa diagonale contient les valeurs propres de  $A$ .

### 3.7.3.2 Les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont multiples

Dans ce cas,  $A$  peut ne pas être diagonalisable mais l'on peut lui associer une matrice de Jordan. Pour simplifier, l'on suppose ici que  $A$  n'a qu'une valeur propre  $\lambda$ , d'ordre de multiplicité  $n$ . Il convient de déterminer le nombre de blocs de Jordan dans  $J = V^{-1}AV$ . Ce nombre est donné par

$$q = n - \text{rang}(\lambda I - A).$$

Pour comprendre comment déterminer les vecteurs propres généralisés, il est plus facile d'envisager les deux cas extrêmes,  $q = 1$  (un seul bloc de Jordan) et  $q = n$  (matrice  $J$  diagonale). Les cas intermédiaires ne correspondent qu'à une association de ces deux cas comme il est expliqué par la suite.

◇  $q = 1$  :

La relation

$$AV = A[v_1, \dots, v_n] = VJ = [v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

conduit aux égalités suivantes (une égalité par colonne) :

$$\begin{cases} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= v_1 + \lambda v_2 \\ &\vdots \\ Av_{p-1} &= v_{p-2} + \lambda v_{p-1} \\ Av_p &= v_{p-1} + \lambda v_p. \end{cases}$$

Il faut donc procéder à une résolution séquentielle de toutes ces équations linéaires en s'assurant toujours que les  $v_i$  sont bien linéairement indépendants.

◇  $q = n$  :

Dans ce cas, l'on détermine simplement  $n$  vecteurs  $v_i$  linéairement indépendants tels que

$$Av_i = \lambda v_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

◇  $q \neq n$  et  $q \neq 1$  :

Dans ce cas là, il y a plusieurs blocs de Jordan et il convient d'associer les deux techniques expliquées ci-avant.

**Remarque 3.3** Il peut exister une ambiguïté sur la taille des blocs de Jordan ; si cela se produit, l'on peut envisager tous les cas possibles sachant qu'un seul conduira à une solution. Ainsi, la première solution rencontrée est recevable.

Dans le cas où il y a plusieurs valeurs propres multiples, il faut procéder comme ci-dessus, mais ce, pour chaque valeur propre.

Exemple :

Soit la matrice d'état

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'on a :

$$P(\lambda) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$\lambda_1 = 0$  est une valeur propre simple. En résolvant  $Av_1 = \lambda_1 v_1$ , l'on peut voir que  $v_1 = [0 \ 1 \ -1]'$  est une solution.

$\lambda_2 = 1$  est valeur propre double. Or,  $q = n - \text{rang}(I - A) = 3 - 1 = 2$  donc l'on sait que  $A$  est diagonalisable. En résolvant  $Av = \lambda v$ , l'on trouve

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b$$

où  $a$  et  $b$  sont deux degrés de liberté. En choisissant  $[a \ b] = [0 \ 1]$  et  $[a \ b] = [1 \ 0]$ , l'on obtient les deux derniers vecteurs propres et

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

**Remarque 3.4** Dans l'exemple ci-avant, la matrice  $A$  est diagonalisable malgré la présence d'une valeur propre multiple, à savoir 1. Il s'agit là d'une distinction entre multiplicité algébrique et multiplicité géométrique (voir cours de mathématiques).

## Chapitre 4

# Réponse d'un modèle d'état

Dans ce chapitre, il s'agit d'utiliser un modèle d'état pour déterminer la réponse d'un système linéaire à une excitation classique (impulsion, échelon, sinusoïde). Par réponse, l'on entend la forme (ou l'expression) de la sortie  $y(t)$  du système délivrée sous l'effet d'une excitation  $u(t)$ .

### 4.1 Solution du système autonome

Avant d'envisager une solution à l'équation d'état complète, l'on peut s'attarder un peu sur la réponse du système autonome. Un tel système se décrit ainsi :

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.1)$$

Le vecteur  $x_0$  constitue l'ensemble des conditions initiales à l'instant  $t_0$ . Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement, en l'absence d'entrée, à cette condition initiale.

#### 4.1.1 Matrice de transition d'état

L'on recherche la solution sous la forme suivante :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

La matrice  $\Phi(t, t_0)$  est dite matrice de transition d'état puisqu'elle permet de passer de l'état  $x_0$  à l'état  $x(t)$ . En dérivant  $x$  par rapport au temps, l'on obtient

$$\dot{x} = Ax = \dot{\Phi}(t, t_0)x_0 = A\Phi(t, t_0)x_0,$$

ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I. \end{cases} \quad (4.2)$$

Les propriétés de cette matrice sont notables. En effet,

$$\left. \begin{aligned} x(t_2) &= \Phi(t_2, t_1)x(t_1) \\ x(t_3) &= \Phi(t_3, t_2)x(t_2) \\ x(t_3) &= \Phi(t_3, t_1)x(t_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1) \quad \forall \{t_1; t_2; t_3\} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t_1) &= \Phi(t_1, t_2)x(t_2) \\ x(t_1) &= \Phi^{-1}(t_2, t_1)x(t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi^{-1}(t_2, t_1) = \Phi(t_1, t_2) \quad \forall \{t_1; t_2\} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Solution de l'équation homogène

La solution d'un tel système matriciel (c.-à-d. (4.2)) est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire donc il vient :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Pour s'en convaincre, l'on peut rappeler qu'une exponentielle de matrice peut se calculer grâce au développement en série :

$$e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots \quad (4.5)$$

Si l'on dérive l'expression ci-dessus par rapport au temps, l'on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(e^{A(t-t_0)})}{dt} &= A + A^2(t-t_0) + \frac{A^3(t-t_0)^2}{2!} + \dots \\ \Rightarrow \frac{d(e^{A(t-t_0)})}{dt} &= A(I + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots) = Ae^{A(t-t_0)}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $e^{A(t-t_0)}$  est solution de (4.2). La réponse du système autonome à une condition initiale  $x_0$  est donc :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (4.6)$$

## 4.2 Solution de l'équation d'état complète

L'on recherche maintenant une solution en  $x$  puis  $y$  à l'équation (3.5). L'on suppose que cette solution est de la forme :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)z(t) \quad \text{avec} \quad z(t_0) = x_0.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) \\ &= A\Phi(t, t_0)z(t) + \Phi(t, t_0)\dot{z}(t) = Ax(t) + Bu(t). \end{aligned}$$

Par identification des deux membres de la dernière égalité, l'on a

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t, t_0)Bu(t)$$

qui, compte tenu de la propriété (4.4), devient

$$\dot{z}(t) = \Phi(t_0, t)Bu(t).$$

En intégrant, l'on exprime  $z(t)$  :

$$\begin{aligned} z(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)Bu(\tau)d\tau \\ \Leftrightarrow x(t) &= \Phi(t, t_0)x_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Compte tenu de l'expression de la matrice  $\Phi$ , il vient

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

Bien entendu, l'expression de  $x(t)$  dépend ensuite de celle  $u(t)$ . Si l'on donne la solution en  $y$  de l'équation d'état, l'égalité (4.7) amène :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \left( \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right) + Du(t). \quad (4.8)$$

Dans l'égalité ci-dessus, l'on peut faire une distinction utile (déjà étudié dans le cours sur l'approche fréquentielle) dans le membre de droite et faire apparaître deux régimes dans la réponse :

- ◇ *Le régime libre* : il correspond au premier terme et ne dépend que du modèle du système et de la condition initiale. Il ne dépend pas de l'action de l'environnement extérieur pendant la réponse.
- ◇ *Le régime forcé* : il est associé aux deux derniers termes et correspond en fait à la réaction du système à l'excitation  $u(t)$ . Il dépend du modèle du système mais aussi de la nature du signal  $u(t)$ .

En outre, lorsque la réponse tend asymptotiquement vers une valeur constante de  $y(t)$  ou vers un comportement périodique de ce signal, l'on peut distinguer

- ◇ *Le régime transitoire* qui est le temps durant lequel  $y(t)$  subit une évolution avant de se rapprocher d'une valeur constante ou d'un comportement périodique. La durée du régime transitoire correspond à un temps appelé *temps de réponse* et noté  $t_r$ .
- ◇ *Le régime permanent* qui succède au régime transitoire, qui commence donc à  $t_r$  et qui correspond à l'intervalle de temps durant lequel  $y(t)$  est considéré comme restant toujours proche de sa valeur finale (généralement à moins de 5% de la variation totale de  $y(t)$ ) ou comme ayant un comportement périodique.

## 4.3 Calcul de $e^{At}$

Pour calculer  $x(t)$  ou  $y(t)$ , il est nécessaire de savoir calculer une exponentielle de matrice. Plusieurs méthodes sont ici présentées.

### 4.3.1 Méthode des séries

Il suffit pour cette méthode d'utiliser le développement en série donnée en (4.5). Lorsque le calcul est effectué manuellement, cette méthode n'est envisageable que pour des matrices nilpotentes c'est-à-dire des matrices pour lesquelles il existe un  $k$  fini tel que  $A^l = 0$  quel que soit  $l$  supérieur à  $k$ .

En revanche, il est tout à fait raisonnable d'utiliser cette technique lorsque le calcul est effectué numériquement, le développement convergeant de manière absolue.

Le théorème de Cayley-Hamilton peut être utilisé pour calculer plus facilement les différentes puissances de  $A$  à partir de  $A^n$ . En effet, ce théorème stipule que la matrice  $A$  vérifie son propre polynôme caractéristique (cf. équation (3.20)). Il vient donc :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n a_i A^i = 0 \quad \text{avec} \quad a_n = 1$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A^n &= - \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i \\ \Rightarrow A^{n+k} &= - \sum_{i=1+k}^{n+k-1} a_{i-k} A^i. \end{aligned}$$

Exemple :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton conduit à :

$$A^2 + 3A + 2I = 0 \Leftrightarrow A^2 = -3A - 2I.$$

Ceci permet donc de déduire  $A^2$  plus aisément, mais aussi

$$A^3 = A^2 \cdot A = -3A^2 - 2A = 7A - 2I$$

ainsi que les puissances successives de  $A$ .

### 4.3.2 Par la transformation de Laplace

Soit le système autonome (4.1) avec  $t_0 = 0$ . La solution d'un tel système pour une condition initiale  $x(0) = x_0$  est donnée par  $x(t) = e^{At}x_0$ . Or, si l'on applique  $\mathcal{L}$  à (4.1), l'on a

$$\begin{aligned} pX(p) - x_0 &= AX(p) \Leftrightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}x_0 \\ \Leftrightarrow x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}]x_0. \end{aligned}$$

L'exponentielle de matrice peut donc s'écrire :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(pI - A)^{-1}].$$

Prenons comme exemple la matrice suivante :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow pI - A &= \begin{bmatrix} p & -1 \\ 2 & p+3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'inversion de la matrice ci-dessus amène à

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix}.$$

Une décomposition en éléments simples conduit à

$$(pI - A)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2} & \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \\ \hline -\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+2} & -\frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+2} \end{array} \right]$$

qui, par application de  $\mathcal{L}^{-1}$ , donne

$$e^{At} = \left[ \begin{array}{c|c} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ \hline -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{array} \right]$$

.

### 4.3.3 Méthodes des modes

Il est bien connu que si  $J$  est une forme de Jordan semblable à  $A$  telle que  $A = MJM^{-1}$  alors

$$A^k = MJ^kM^{-1} \quad \forall k \geq 0.$$

Ceci s'applique à chaque terme du développement (4.5) de sorte que

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1}.$$

Dans le cas où

$$J = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

est une forme strictement diagonale alors il est facile de voir que

$$e^{At} = M \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} M^{-1}.$$

Si l'on reprend l'exemple du paragraphe précédent, la matrice de passage à la forme diagonale est

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui permet de retrouver la même expression de  $e^{At}$ .

Dans le cas où  $J$  est une forme de Jordan non strictement diagonale et comportant  $p$  blocs de Jordan,

$$J = \text{blocdiag}\{J_1; \dots; J_p\} \quad \text{avec} \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \{1, \dots, p\},$$

l'exponentielle de matrice s'écrit

$$e^{At} = Me^{Jt}M^{-1} = M \text{blocdiag}\{e^{J_k t}\}M^{-1} \quad \text{avec} \quad e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \frac{t^{n_k}}{n_k!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il existe également une quatrième méthode dite de Cayley-Hamilton qui n'est pas détaillée ici.

## 4.4 Régime transitoire : influence des modes

L'on suppose que l'on s'intéresse à la réponse du modèle (3.5) pour lequel la transmission directe  $D$  est considérée nulle par souci de simplicité des expressions. Les conditions initiales sur les variables d'état sont concaténées dans un vecteur  $x_0 = x(0)$ . La réponse d'un tel système est donné par la relation

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.9)$$

où le premier terme constitue le régime libre de la réponse ne dépendant que des conditions initiales et où le second terme est le régime forcé dépendant du signal d'entrée  $u(t)$ . Ces deux termes font tous deux apparaître  $e^{At}$ . Cette exponentielle de matrice est donc fondamentale pour comprendre l'allure de la réponse du système. Elle peut s'écrire, sous l'hypothèse de  $n$  valeurs propres distinctes

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n N_i e^{\lambda_i t}$$

où les scalaires  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et où  $N_i = w_i v_i$ , les vecteurs  $v_i$  et  $w_i$  étant respectivement la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de passage diagonalisante  $M$  et la  $i^{\text{ème}}$  ligne de son inverse  $M^{-1}$ . Si les coefficients  $N_i$  ont bien entendu une influence sur la forme de  $y(t)$ , ce sont surtout les facteurs  $e^{\lambda_i t}$  qui en déterminent les caractéristiques principales.

**Remarque 4.1** On appelle mode d'un système un terme de son régime libre. Chaque mode est donc lié à une valeur propre. Aussi, par abus de langage, parle-t-on parfois du mode  $\lambda_i$ .

- Ainsi, lorsqu'une valeur de  $\lambda_i$  est à partie réelle strictement négative, le terme correspondant est évanescent et disparaît asymptotiquement. Si tous les  $\lambda_i$  sont ainsi, et si  $u(t)$  converge vers une valeur finie avec le temps, alors la réponse de  $y(t)$  converge elle aussi vers une valeur finie. Il est alors possible de mesurer  $t_r$ , le temps de réponse, et de distinguer clairement le régime transitoire et le régime permanent.

- Lorsque  $\lambda_i$  n'est pas à partie réelle strictement négative, il est impossible que l'exponentielle correspondante disparaisse. Elle peut même croître avec le temps si la partie réelle de  $\lambda_i$  est strictement positive. Il est alors impossible que  $y(t)$  converge vers une valeur finie, même si  $u(t)$  est fini.  $y(t)$  peut même diverger infiniment. Dans ce dernier cas, il est impropre de parler de régime permanent.

- Par ailleurs, si  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont des valeurs propres complexes conjuguées non réelles, leurs parties imaginaires vont engendrer des termes sinusoïdaux dans l'expression de  $y(t)$  ce qui est susceptible de générer des oscillations dans la réponse.

- Lorsque les termes exponentiels sont convergents ( $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ), la convergence est d'autant plus rapide que  $|\text{Re}(\lambda_i)|$  est grande, ce qui correspond donc à une diminution du temps de réponse  $t_r$ .

En résumé :

- ◊ C'est le plus ou moins grand ratio entre partie imaginaire et partie réelle d'un pôle qui caractérise le comportement oscillatoire lié à ce pôle ;
- ◊ Ce sont les pôles dominants (ceux dont la partie réelle est la plus grande au sens algébrique) qui ont le plus d'influence sur la forme de la réponse.

L'influence des valeurs propres de  $A$  sur le régime libre de  $y(t)$  est illustrée sur la figure 4.1.

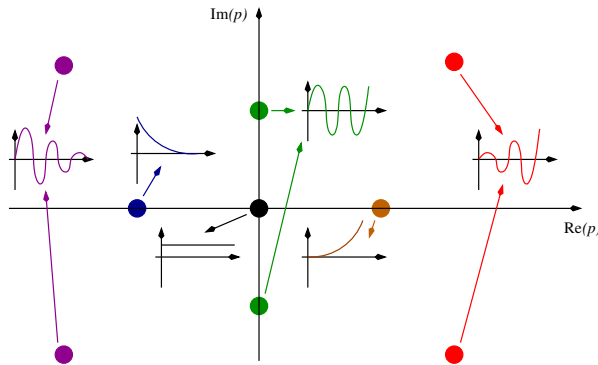


FIGURE 4.1 – Influence des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  sur le régime libre

Les comportements indiqués sur la figure 4.1 se retrouvent aussi en présence de  $u(t)$ , c'est-à-dire sur le régime forcé de la réponse. Même si les pôles sont prépondérants pour analyser ou prévoir le comportement d'un système (comme il apparaîtra d'ailleurs davantage au chapitre suivant), il existe bien sûr d'autres éléments qui peuvent influencer ce régime transitoire et c'est pourquoi l'on revient sur ces diverses influences dans l'annexe B.

## 4.5 Réponse impulsionnelle

Sans détailler ce type de réponse, il est rappelé qu'il s'agit de la réponse à une impulsion de Dirac  $u(t) = \delta(t)$ . Le calcul aboutit, en l'absence de transmission directe ( $D = 0$ ), à :

$$y(t) = Ce^{At}(x_0 + B). \quad (4.10)$$

C'est dans ce cas-ci que l'influence des valeurs propres de  $A$  apparaît clairement telle qu'elle est illustrée par la figure 4.1.

## 4.6 Réponse indicielle

Dans ce cas de figure, l'entrée est un échelon unitaire ( $u(t) = \Gamma(t)$ ) également appelé fonction de Heavyside. L'expression de  $y(t)$  est alors

$$y(t) = Ce^{At}(x_0 + A^{-1}B) - CA^{-1}B \quad (4.11)$$

ce qui suppose ici que  $A$  est inversible. C'est le cas si la réponse est convergente ( $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ). L'on voit clairement que le régime permanent est égal à  $-CA^{-1}B$ . Ceci est cohérent avec la définition du gain statique d'une fonction de transfert :

$$G(0) = C(0 \times I - A)^{-1}B (+D) = -CA^{-1}B (+D).$$

Soit l'exemple du circuit RC de la figure 4.2.

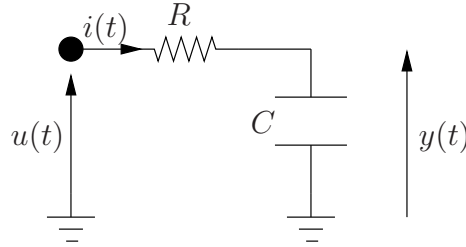


FIGURE 4.2 – Circuit RC

Les équations qui régissent le comportement de ce système RC sont :

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}, \\ u(t) = Ri(t) + y(t). \end{cases}$$

En prenant l'unique variable d'état  $x = y$ , l'on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u \\ y = x. \end{cases}$$

L'application de (4.11) pour un système initialement au repos conduit à l'équation bien connue :

$$y(t) = 1 - e^{-t/RC}.$$

Les résultats obtenus sont évidemment les mêmes que ceux issus de l'approche fréquentielle et le lecteur est invité à se reporter aux formes de réponses des systèmes de premier et deuxième ordre données dans le cours sur la fonction de transfert.

## 4.7 Réponse harmonique

Il s'agit là de la réponse à une excitation sinusoïdale  $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ . L'on peut d'abord noter que  $u(t) = \text{Im}(U_m e^{j\omega t})$ . L'expression de  $y(t)$  est alors

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} \left( \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} BU_m e^{j\omega\tau} d\tau \right) \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} \left( \int_0^t Ce^{At} e^{(j\omega I - A)\tau} BU_m d\tau \right) \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} \left( [Ce^{At} e^{(j\omega I - A)\tau} (j\omega I - A)^{-1} BU_m]_0^t \right) \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + \text{Im} (Ce^{At} (e^{(j\omega I - A)t} - I)(j\omega I - A)^{-1} BU_m) \\ y(t) &= Ce^{At} [x_0 - \text{Im} ((j\omega I - A)^{-1} BU_m)] + \text{Im} [C(j\omega I - A)^{-1} BU_m e^{j\omega t}]. \end{aligned}$$

C'est le régime permanent qui importe dans une réponse harmonique. Or si  $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , alors le premier terme de l'expression de  $y(t)$  ci-dessus tend asymptotiquement vers zéro et constitue le régime transitoire. Le second terme correspond alors à ce qu'il est convenu d'appeler le régime permanent et est ici noté  $y_\infty(t)$ .

En observant l'expression de  $y_\infty(t)$ , l'on constate qu'il est possible de l'écrire

$$y_\infty(t) = \text{Im}(G(j\omega)U_m e^{j\omega t})$$

où  $G(p)$  désigne bien sûr la fonction de transfert du système.

L'on définit :

$$\begin{aligned} \text{Le gain harmonique : } & \rho(\omega) = |G(j\omega)|; \\ \text{Le déphasage harmonique : } & \phi(\omega) = \angle(G(j\omega)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le régime permanent apparaît alors comme un signal sinusoïdal. En effet,

$$y_\infty(t) = \text{Im}(\rho(\omega)e^{j\phi(\omega)}U_m e^{j\omega t})$$

$$y_\infty(t) = \text{Im}(\rho(\omega)U_m e^{j(\omega t + \phi(\omega))})$$

$$y_\infty(t) = \rho(\omega)U_m \sin(\omega t + \phi(\omega)). \quad (4.13)$$

Ce signal sinusoïdal conserve la même pulsation que le signal d'entrée mais possède une amplitude et un déphasage qui sont fonctions de cette pulsation. Ils peuvent être déterminés grâce à la fonction de transfert.

Comme il est impossible de représenter toutes les réponses (c'est-à-dire  $y_\infty(t)$  pour toutes les valeurs de  $\omega$ ), l'on préfère donner une représentation graphique de l'évolution de  $\rho(\omega)$  et de  $\phi(\omega)$  en fonction de  $\omega$ . Il existe plusieurs façons de représenter cette dépendance. Les plus célèbres sont le lieu de Nyquist, celui de Black, ainsi que les diagrammes de Bode. Tous les résultats bien connus de l'approche fréquentielle sont donc ici retrouvés par résolution de l'équation d'état.

## Chapitre 5

# Stabilité des modèles d'état

Ce chapitre traite de la stabilité des représentations d'état linéaires. De ce fait, certaines notions sont communes avec les enseignements relatifs à l'approche fréquentielle.

La notion de stabilité est bien entendu fondamentale dans l'étude des systèmes et, à quelques rares exceptions près, les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux. Si la notion de stabilité peut sembler assez intuitive, il n'est pourtant pas trivial d'en donner une définition mathématique uniforme pour tous les systèmes aussi existe-t-il de nombreuses « stabilités » différentes. Une approche intuitive conduit à la notion de stabilité externe ou celle de stabilité BIBO qui est succinctement présentée et qui découle naturellement de l'approche fréquentielle. Dans l'espace d'état il faut avoir une approche interne de la stabilité et c'est cette approche qui est privilégiée au cours du chapitre.

### 5.1 Une approche quasi intuitive : la stabilité BIBO

Comme il est dit en préambule de ce chapitre, la stabilité d'un système est une notion qui peut sembler assez intuitive. L'on comprend que si un système est excité par une entrée, l'opérateur utilisant ce système a sans doute peu envie de voir sa sortie diverger brutalement. Cette façon assez simple d'envisager la stabilité donne naissance à une définition plus rigoureuse qui est celle de la stabilité BIBO (de l'acronyme anglais *Bounded input bounded output*, entrée bornée, sortie bornée).

Un système est stable au sens BIBO (ou encore au sens entrée/sortie) si et seulement si, quelle que soit l'état initial  $x_0 = x(0)$ , pour toute entrée  $u$  bornée, la sortie  $y$  l'est aussi.

Une autre définition de la BIBO-stabilité, plus mathématique et « philosophiquement » quelque peu différente, peut être donnée : en notant  $y^*(t)$  la réponse impulsionnelle du modèle, ce dernier est BIBO-stable si et seulement s'il existe un scalaire  $k$  vérifiant  $0 < k < \infty$  et

$$\int_0^\infty |y^*(\tau)| d\tau \leq k.$$

Un modèle BIBO-stable peut donc être interprété, dans cette seconde définition, comme un modèle dont la réponse impulsionnelle est un signal d'énergie finie. Il n'est pas facile d'exploiter directement cette dernière formulation. Aussi a-t-on recours, en particulier dans l'espace d'état, à l'étude de stabilité d'un système au travers de la notion de stabilité des états d'équilibre.

**Remarque 5.1** La stabilité BIBO est une manière d'envisager la stabilité d'un système au sens de son comportement entrée/sortie c'est-à-dire dans ses interactions avec l'environnement extérieur. L'on parle donc de stabilité externe. Dans les développements qui suivent, la stabilité est étudiée au travers du modèle interne que constitue la représentation d'état. La stabilité est-elle alors qualifiée d'interne.

Exemple : un moteur à courant continu est excité par une tension d'entrée  $u(t)$ . La sortie considérée est la vitesse angulaire de l'arbre du moteur. Si l'on impose un signal borné sur l'induit du moteur, l'on sait que la vitesse reste

bornée donc le moteur est BIBO-stable au sens de la première définition. De même, toute impulsion au niveau de cette tension d'induit entraîne une évolution de la vitesse telle que celle-ci augmente transitoirement pour s'annuler ensuite, son intégrale étant ainsi finie. Le moteur est donc BIBO-stable au sens de la définition alternative. L'on suppose maintenant que la sortie est la position angulaire de l'arbre. Un échelon appliqué sur l'induit du moteur engendre, en régime permanent, une vitesse constante, donc la position angulaire augmente indéfiniment. Le moteur (associé à cette nouvelle sortie) est alors BIBO-instable. Si une impulsion intervient sur l'induit, l'arbre va tourner et ne reviendra pas à sa position angulaire initiale donc l'intégrale de la position dans ce cas n'est pas finie. Le moteur est BIBO-instable.

## 5.2 Stabilité d'un état d'équilibre

Pour envisager rigoureusement d'étudier la stabilité d'un système, il faut donc d'abord définir la notion d'état d'équilibre et celle de stabilité d'un état d'équilibre.

### 5.2.1 Définition et recherche d'un état d'équilibre

Un système se trouve dans un état d'équilibre (par état, l'on entend un point de l'espace d'état c.-à-d. une instance du vecteur d'état) si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

Un tel état d'équilibre se détermine en posant à la fois  $u = 0$  (« livré à lui-même ») et  $\dot{x} = 0$  (« pas modifié »). La recherche des états d'équilibre possibles d'un système modélisé par la représentation (3.5) revient donc à résoudre

$$Ax = 0. \quad (5.1)$$

De cette équation, l'on comprend qu'il peut exister un seul ou plusieurs états d'équilibre selon le rang de  $A$ . Soit  $\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$  (ceci signifie que  $A$  n'a pas de valeur propre nulle) et le seul point d'équilibre est l'origine  $x_e = 0$ . Soit  $\text{rang}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$  (ceci implique l'existence d'au moins une valeur propre nulle de  $A$ ) alors il existe une infinité d'états d'équilibre.

**Remarque 5.2** Même s'il est plus rigoureux de parler de stabilité d'un état d'équilibre, il s'avère que, quel que soit l'état d'équilibre d'un système linéaire, sa stabilité dépend de la matrice  $A$ . Ainsi parle-t-on toujours de la stabilité du système.

### 5.2.2 Stabilité

Un état d'équilibre est dit **asymptotiquement stable** si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).  
L'état d'équilibre est dit **instable**, si après perturbation, le système s'en éloigne davantage.  
L'état d'équilibre est dit **simplement stable** si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Pour illustrer ces trois cas, l'on procède très souvent à une analogie mécanique. Cette dernière consiste à décrire l'état d'équilibre d'une bille dans trois positions différentes comme le montre la figure 5.1.

## 5.3 Critères de stabilité

Analyser la stabilité d'un système revient donc à rechercher ses états d'équilibre et à déterminer leur stabilité. Pour ce faire, il faut disposer de critères de stabilité. La présentation de certains de ces critères fait l'objet de cette partie.

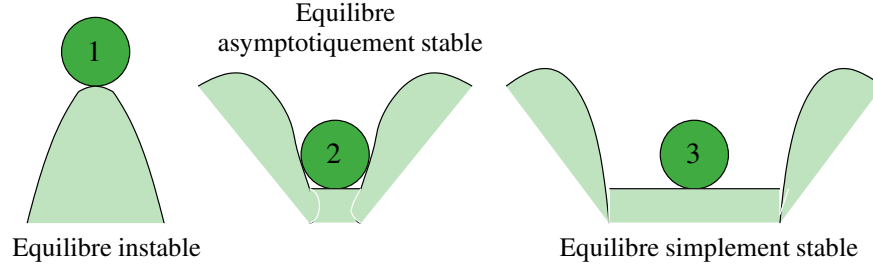


FIGURE 5.1 – Les trois états d'équilibre possibles d'une bille

### 5.3.1 Critère des racines

L'on rappelle que la réponse du système autonome est  $x(t) = e^{At}x_0$ . Si l'on décompose la matrice de passage  $M$  qui diagonalise ou « Jordanise »  $A$  et son inverse  $M^{-1}$  de la façon suivante

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \quad ; \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

alors on peut exprimer  $x(t)$  de deux façons, selon l'ordre de multiplicité des valeurs propres de  $A$ .

◇ Les valeurs propres de  $A$  sont distinctes

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i w_i x_0 e^{\lambda_i t} = \left( \sum_{i=1}^n N_i e^{\lambda_i t} \right) x_0.$$

◇ Les valeurs propres de  $A$  sont multiples

L'on a alors, en supposant que  $J$  fait apparaître  $r$  valeurs propres différentes et  $p \geq r$  blocs de Jordan :

$$e^{Jt} = \text{blocdiag}\{e^{J_k t}\} \quad \text{avec} \quad e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} & \frac{t^{n_k}}{n_k!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \forall k. \quad (5.2)$$

Ceci conduit à déduire que  $x(t)$  répond à la formulation suivante :

$$x(t) = M e^{Jt} M^{-1} = \left( \sum_{i=1}^r N_i(t) e^{\lambda_i t} \right) x_0 \quad (5.3)$$

#### 5.3.1.1 rang( $A$ ) = $n$

Dans ce cas, il n'existe qu'un point d'équilibre : l'origine de l'espace d'état. L'on parle donc indifféremment de stabilité de l'origine ou de stabilité du système. En analysant les formes (5.2) et (5.3), l'on déduit que trois cas se présentent.

- $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$  : le système est asymptotiquement stable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$  : le système est instable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) = 0$  et  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$  :
  - $\lambda_j = 0$  (impossible par hypothèse) ;
  - $\lambda_{j,l} = \pm j\omega \Rightarrow$  comportement oscillatoire d'amplitude constante  $\Rightarrow$  système simplement stable.

### 5.3.1.2 $\text{rang}(A) = n$

Dans ce cas, il n'existe qu'un point d'équilibre : l'origine de l'espace d'état. L'on parle donc indifféremment de stabilité de l'origine ou de stabilité du système. En analysant les formes (5.2) et (5.3), l'on déduit que trois cas se présentent.

- $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$  : le système est asymptotiquement stable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$  : le système est instable ;
- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) = 0$  et  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$  :
  - $\lambda_j = 0$  (impossible par hypothèse) ;
  - $\lambda_{j,l} = \pm j\omega \Rightarrow$  comportement oscillatoire d'amplitude constante  $\Rightarrow$  système simplement stable.

### 5.3.1.3 $\text{rang}(A) < n$

Dans ce cas, il existe plusieurs états d'équilibre dont l'origine. Comme au moins une valeur propre est nulle, la stabilité asymptotique est impossible. Toujours en analysant (5.2) et (5.3), l'on déduit que deux cas se présentent.

- $\exists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$  : le système est instable ;
- $\nexists j \mid \text{Re}(\lambda_j) > 0$  :
  - Les blocs de Jordan relatifs aux éventuelles valeurs propres de partie réelle nulle sont tous scalaires (la multiplicité géométrique de ces valeurs propres à partie réelle nulle est égale à leur multiplicité algébrique)  $\Rightarrow$  le système est simplement stable ;
  - Il existe un bloc de Jordan non scalaire associé à une valeur propre à partie réelle nulle (la multiplicité géométrique de cette valeur propre à partie réelle nulle est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique)  $\Rightarrow$  le système est instable.

## 5.3.1.4 En résumé

- $\exists j \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$  : le système est instable ;
- $\nexists j \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$  :
  - $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$  : le système est asymptotiquement stable ;
  - La multiplicité géométrique des valeurs propres de partie réelle nulle est égale à leur multiplicité algébrique  $\Rightarrow$  le système est simplement stable ;
  - La multiplicité géométrique d'une valeur propre nulle est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique  $\Rightarrow$  le système est instable.

En réalité, la propriété souvent recherchée est la stabilité asymptotique. La condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique d'un système et les propriétés associées se résument à ceci :

Soit le système modélisé par (3.5). Ce dernier est dit asymptotiquement stable si et seulement si le système autonome associé  $\dot{x} = Ax$  est asymptotiquement stable, c'est-à-dire si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative.

## 5.3.1.5 Stabilité interne et stabilité BIBO

L'on peut déduire, par exemple grâce à l'équation (4.8), la relation existant entre la stabilité interne et la stabilité BIBO.

Si  $A$  possède une valeur propre à partie réelle strictement positive et si l'on suppose que l'entrée  $u(t)$  est nulle, tout état initial  $x_0$  conduit à un état non borné (et donc potentiellement à une sortie non bornée).

Au contraire, si  $A$  ne possède que des valeurs propres négatives, dès lors que  $u(t)$  est un signal borné, tous les termes de la réponse  $x(t)$ , et *a fortiori* ceux de  $y(t)$ , convergent vers une valeur finie.

Le système décrit par une représentation (3.5) d'ordre  $n$  et de fonction de transfert  $G(p)$  d'ordre  $n$  est BIBO-stable si il est asymptotiquement stable.  
Il est BIBO instable si il est instable de manière interne.

Dans la proposition ci-avant, l'équivalence entre les deux stabilités n'est pas mentionnée. À choisir entre les deux propriétés, c'est la stabilité interne qui doit être privilégiée. Elle assure de la stabilité BIBO. Il faut noter que deux hypothèses sont implicites dans cette assertion. La première est la linéarité du modèle. Une telle proposition ne peut être formulée pour un modèle non linéaire. La seconde est la dimension commune du modèle interne et du modèle externe, à savoir  $n$ . Il s'agit là d'une différence entre l'approche interne temporelle et l'approche externe fréquentielle sur laquelle il sera revenu au chapitre 6.

**Remarque 5.3** À propos de la non-équivalence des instabilités interne et externe : un intégrateur  $1/p$  est-il instable ? On l'entend souvent dire mais est-ce exact ? La réponse est **oui et non**. Si l'on applique le critère des racines détaillé ci-avant, un intégrateur est un modèle (interne ou externe) d'ordre 1 ayant un pôle nul unique donc le bloc de Jordan associé est scalaire. Le système est donc **simplement stable** mais non asymptotiquement stable. En revanche il est **BIBO-instable** puisqu'il répond à un échelon par une rampe ce qui est logique puisque la BIBO-stabilité est équivalente à la stabilité asymptotique. En résumé :

**Un intégrateur est stable au sens de la stabilité interne et instable au sens de la stabilité externe.**

L'on peut noter en revanche qu'un double intégrateur  $1/p^2$  est instable de manière interne comme de manière externe.

### 5.3.1.6 Les marges de stabilité

Par analogie avec les systèmes de second ordre qui possèdent soit deux pôles réels soit deux pôles complexes conjugués, l'on peut définir une marge de stabilité absolue et une marge de stabilité relative.

Soit un système asymptotiquement stable dont le comportement est décrit par (3.5). Les valeurs propres de  $A$  sont toutes à partie réelle strictement négative. Les marges absolue et relative sont ainsi définies :

Marge de stabilité absolue : distance minimale, dans le plan complexe, entre un point dont l'affixe est une valeur propre de  $A$  et l'axe imaginaire. Mathématiquement, elle s'exprime

$$\sigma = \min_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|. \quad (5.4)$$

Marge de stabilité relative : angle minimal, dans le plan complexe, formé par l'axe imaginaire et par l'axe reliant l'origine et un point dont l'affixe est une valeur propre de  $A$ . Mathématiquement, elle s'exprime

$$\psi = \min_i \left( \operatorname{Atan} \left( \left| \frac{\operatorname{Re}(\lambda_i)}{\operatorname{Im}(\lambda_i)} \right| \right) \right). \quad (5.5)$$

La marge absolue quantifie la stabilité asymptotique alors que la marge relative est liée aux pôles complexes donc permet de quantifier le caractère plus ou moins oscillatoire induit par les pôles et est, à ce titre, reliée au coefficient d'amortissement. Ces marges sont illustrées sur la figure 5.2.

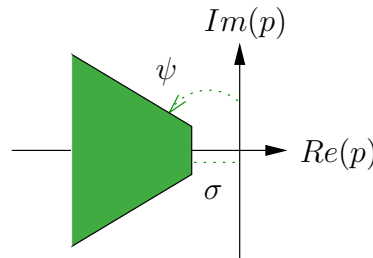


FIGURE 5.2 – Marges de stabilité absolue et relative

### 5.3.2 Critère de Routh/Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz permet d'attester ou non de la stabilité asymptotique d'un modèle grâce au polynôme caractéristique  $D(p)$ . Ce critère algébrique est plutôt utilisé lorsqu'une approche fréquentielle est privilégiée puisque  $D(p)$  est le dénominateur de la fonction de transfert. Cependant, il convient de rappeler que  $D(p)$  s'exprime aussi  $D(p) = \det(pI - A)$  et qu'il peut, de ce fait, être déduit de  $A$ . En outre, si  $A$  est de forme compagne, les coefficients de  $D(p)$  sont directement lisibles sur la dernière ligne ou la première colonne de  $A$  ce qui permet de dresser directement la table de Routh et d'appliquer ainsi le critère.

Toutefois, ce critère n'est pas rappelé ici. Il a déjà été étudié lors des enseignements relatifs à l'approche fréquentielle.

### 5.3.3 Méthode de Lyapunov

Comme il a été dit précédemment, la popularisation de la représentation d'état est née d'une volonté de certains chercheurs de promouvoir la théorie de Lyapunov. Lyapunov s'intéressait à la stabilité d'un système mécanique en mouvement. Son étude se révèle néanmoins fort utile pour l'étude de la stabilité de n'importe quel système.

La théorie de Lyapunov est très complète et parfois assez sophistiquée. Il n'est pas utile, dans le cadre de ce cours,

de la détailler. Il faudrait de toute façon beaucoup de temps et d'efforts pour y parvenir. Cependant, l'on peut en extraire des résultats intéressants. Ils sont empruntés à ce qu'il est convenu d'appeler « seconde méthode » (ou « méthode directe ») de Lyapunov. En voici, de manière résumée, la teneur.

Soit le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ f_i(0, \dots, 0) = 0 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x = 0 \text{ état d'équilibre.} \end{cases}$$

Il s'agit là d'un modèle de système autonome qui possède l'origine pour état d'équilibre. Lyapunov propose une condition suffisante pour vérifier la stabilité de cet état d'équilibre. S'il existe une fonction  $V$  telle que  $V(x) > 0 \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $0 \subset \Omega$ , ( $V(0) = 0$ ) et telle que

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega, x \neq 0$$

alors le modèle d'état non linéaire est asymptotiquement stable pour des conditions initiales dans un voisinage  $\Omega$  de 0.

Si l'on s'intéresse à la stabilité asymptotique d'un système linéaire autonome

$$\dot{x} = Ax,$$

la seconde méthode permet de voir qu'un tel système est asymptotiquement stable **si et seulement si** il existe une fonction de Lyapunov (quadratique)  $V = x'Px > 0$  ( $\Leftrightarrow P = P' > 0$ ) telle que  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x'(A'P + PA)x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow A'P + PA < 0 \tag{5.6}$$

$$\Leftrightarrow \exists Q = Q' < 0 \text{ et } P = P' > 0 \mid A'P + PA = Q. \tag{5.7}$$

Plusieurs points sont notables dans ce résultat. En premier lieu, il n'est plus question de faire référence à l'origine de  $\mathbb{R}^n$  qui est de toute façon l'unique point d'équilibre. En deuxième lieu, la condition devient nécessaire et suffisante. En troisième lieu, il n'est pas restrictif de supposer que  $V(x)$  est une fonction quadratique de  $x$  ce qui permet d'aboutir, soit à une inégalité matricielle donnée en (5.6), soit à une égalité matricielle donnée en (5.7), dont l'inconnue est, dans les deux cas, une matrice symétrique strictement définie positive.

Résoudre une inégalité matricielle linéaire telle que (5.6) est possible depuis le début des années 1990 grâce à des outils numériques. Toutefois, l'on préfère, lorsqu'aucun outil numérique sophistiqué n'est disponible, manipuler l'égalité (5.7). La difficulté peut sembler *a priori* de choisir  $Q = Q' < 0$  pour que la solution  $P = P'$  existe et soit définie positive. En fait, en 1974, E. I. Jury et S. M. Ahn prouvèrent qu'un choix arbitraire de la matrice  $Q$  était possible. L'on peut donc résumer l'application de la théorie de Lyapunov à ceci :

Un modèle d'état linéaire (3.5) est asymptotiquement stable si et seulement si, quelle que soit la matrice symétrique définie négative  $Q$ , l'unique solution de l'équation

$$A'P + PA = Q \tag{5.8}$$

est définie positive.

L'habitude consiste à choisir  $Q = -I$  pour effectuer le test.

Lorsque le système (3.5) est le linéarisé tangent d'un système non linéaire, le test ci-dessus peut permettre d'affirmer que le modèle initial non linéaire est aussi asymptotiquement stable dans un voisinage autour du point de fonctionnement (le point d'équilibre du modèle linéaire est alors l'origine et celui du modèle non linéaire est le point de fonctionnement). En effet, sans détailler ces concepts, lorsque le linéarisé tangent est tel que  $\text{rang}(A) = n$ , alors le point de

fonctionnement est qualifié de point d'équilibre *hyperbolique*. Pour ce genre de points d'équilibre, il y a *équivalence topologique* entre le modèle non linéaire et son linéarisé tangent. De ce fait, la stabilité du linéarisé tangent est celle du non linéaire dans un voisinage du point de fonctionnement. Or, tout modèle linéaire asymptotiquement stable correspond à un point d'équilibre hyperbolique pour le modèle non linéaire original qui est donc lui aussi asymptotiquement stable dans un voisinage du point de fonctionnement.

En revanche, si le modèle non linéaire fait apparaître un point d'équilibre non hyperbolique alors on ne peut déduire la stabilité du modèle non linéaire à partir de son linéarisé tangent.

L'annexe E reprend quelques aspects évoqués ci-avant.

**En conclusion**, il faut noter que tous ces critères de stabilité ne font intervenir que  $A$ . Ainsi, seule la matrice d'évolution détermine la stabilité du système.

## Chapitre 6

# Commandabilité et observabilité

Ce chapitre introduit des concepts nécessaires pour établir des lois de commande telles que celles qui seront étudiées dans les chapitres suivants. Ces concepts sont ceux de commandabilité et d'observabilité. Il furent introduits par Kalman.

### 6.1 Définitions

#### 6.1.1 Commandabilité ou gouvernabilité

Soit le modèle d'état (3.5) d'un système linéaire dont l'état initial est à une valeur quelconque  $x_0 = x(t_0)$ . L'on peut supposer sans restriction que la transmission directe est nulle ( $D = 0$ ).

Le modèle est commandable ou gouvernable si pour toute instance  $x_1$  du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée  $u(t)$  d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état  $x_0$  à l'état  $x_1$  en un temps fini.

Il est possible que, si la commandabilité n'est pas vérifiée sur tout le vecteur d'état, elle puisse néanmoins l'être sur une partie de ses composantes. L'on dit alors des variables d'état concernées que ce sont les états commandables du système.

La commandabilité peut être vue comme la possibilité de modifier les dynamiques d'un modèle en agissant sur ses entrées. À ce titre cette propriété ne se réfère qu'à l'état et à l'entrée du système. Il est donc clair qu'elle ne dépend que des matrices  $A$  et  $B$ .

#### 6.1.2 Observabilité

L'on s'intéresse toujours au même modèle que dans la partie précédente.

Le modèle est observable si, quel que soit  $t_0$ , il existe un intervalle de temps fini  $[t_0, t_1]$  tel que la connaissance de l'entrée  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$  sur cet intervalle permet de reconstituer  $x(t_0)$ .

Encore une fois, il est possible que cette propriété ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état que constituent alors les états observables du système.

La définition de l'observabilité ne fait pas d'hypothèse particulière sur la nature de l'entrée. Cette propriété peut être interprétée comme la capacité d'un système à révéler l'historique de son vecteur d'état au travers de celui de ses sorties. Elle ne dépend en fait que des matrices  $A$  et  $C$ .

## 6.2 Critère de Kalman

En plus d'introduire les concepts de commandabilité et d'observabilité, R. E. Kalman est aussi l'auteur d'un critère éponyme.

### 6.2.1 Commandabilité

La paire de matrices  $(A, B)$  (ou le système (3.5)) est commandable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_c) = n \quad \text{où} \quad Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

La matrice  $Q_c$  est dite matrice de commandabilité.

Ce résultat est basé sur l'*interpolation de Sylvester* qui permet d'affirmer que  $e^{A\tau}$  peut s'écrire ainsi :

$$e^{A\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad \text{où} \quad \alpha_k(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

En effet, si l'on revient à la définition de la commandabilité, l'on peut, sans perte de généralité, considérer que  $x_1$  est l'origine de  $\mathbb{R}^n$  et que  $t_0$  est nul. Dès lors, la solution de l'équation d'état s'écrit

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

et conduit à

$$x_1 = x(t_1) = 0 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Leftrightarrow x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau.$$

Compte tenu de (6.2), il vient

$$x_0 = - \sum_{k=1}^{n-1} A_k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (6.3)$$

En posant

$$\beta_k = \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau,$$

l'on peut récrire (6.3) de la façon suivante :

$$x_0 = -Q_c \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Le système est commandable si et seulement si le système (6.4) peut être résolu quel que soit  $x_0$  c'est-à-dire si et seulement si  $\text{rang}(Q_c) = n$ .

### 6.2.2 Observabilité

L'on s'intéresse maintenant à l'observabilité du système (3.5) qui se résume à l'observabilité de

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx. \quad (6.5)$$

En effet, si l'on regarde la solution complète de l'équation d'état (4.7), connaissant  $A, B, C, D$  ainsi que  $u(t)$ , les deux derniers termes du membre de droite sont connus et peuvent être soustraits de la valeur mesurée de  $y(t)$ , ce qui revient à considérer le système (6.5). La sortie s'écrit alors

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

ce qui, en tenant compte de (6.2), donne

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x_0 = \text{blocdiag}\{\alpha_k I\} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0.$$

L'on voit clairement que la détermination de  $x_0$  en fonction de  $y(t)$  ne sera possible que si le système d'équations ci-dessus ne présente pas de déficience de rang ce qui conduit au critère d'observabilité de Kalman :

La paire de matrices  $(A, C)$  (ou le système (3.5)) est observable si et seulement si

$$\text{rang}(Q_o) = n \quad \text{où} \quad Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

La matrice  $Q_o$  est dite matrice d'observabilité.

Exemple 1 :

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

La matrice de commandabilité est

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est commandable.

La matrice d'observabilité est

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 2 donc le système est observable.

Exemple 2 :

Soit le système électronique représenté par le schéma de la figure 6.1. Le vecteur d'état choisi est  $x = [x_1 \ x_2] = [v_{s_1} \ (v_{s_2} - V_{ref})]$ . L'entrée est la tension  $u = v_1$  et la sortie est la tension  $y = v_s$ . Ce choix, ainsi que l'application des règles d'électronique, en considérant les amplificateurs opérationnels de puissance comme parfaits, conduisent à la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} x. \end{cases} \quad (6.7)$$

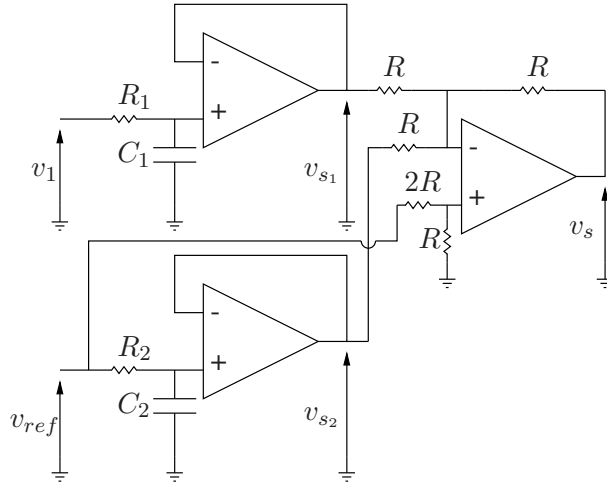


FIGURE 6.1 – Circuit électronique

La matrice de commandabilité de Kalman est

$$Q_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{(R_1 C_1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et comme elle est de rang 1, le système n'est pas complètement commandable. Ceci traduit le fait que, dans ce montage électronique,  $v_1$  ne peut influencer sur  $v_{s2}$ .

La matrice d'observabilité de Kalman est

$$Q_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

Elle est de rang plein donc le système est observable.

Si l'on décide de considérer  $v_{s1}$  comme la sortie du système, alors la matrice de mesure devient  $C = [1 \ 0]$  et celle d'observabilité devient :

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle est de rang 1 et le système n'est donc plus observable. Ceci traduit le fait que l'on ne peut déduire  $v_{s2}$  de  $v_{s1}$  car  $v_{s2}$  n'agit en rien sur  $v_{s1}$ .

### 6.2.3 Dualité des deux concepts

Il est important de noter l'analogie entre les structures de  $Q_c$  et  $Q_o$ . Elle permettent de comprendre que la commandabilité et l'observabilité sont deux notions duales comme le soulignent les propositions suivantes :

#### Dualité :

La paire  $(A, B)$  est commandable si et seulement si la paire  $(A', B')$  est observable.  
La paire  $(A, C)$  est observable si et seulement si la paire  $(A', C')$  est commandable.

Les critères de Kalman ont un grand intérêt théorique et permettent de comprendre un peu mieux ces notions fondamentales de commandabilité et d'observabilité. Cependant, lorsqu'ils ne sont pas satisfaits ( $\text{rang}(Q_c) < n$  ou  $\text{rang}(Q_o) < n$ ), ils ne donnent aucune information sur les composantes du vecteur d'état qui sont commandables et/ou observables.

## 6.3 Critères s'appliquant aux formes de Jordan

Comme toujours, il faut distinguer deux cas selon la multiplicité géométrique des valeurs propres de  $A$ .

### 6.3.1 $A$ diagonalisable

Dans ce cas, il existe une matrice de passage  $M$  qui permet de changer de base et d'obtenir la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] x + Du. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'on peut assimiler la commandabilité d'un mode  $\lambda_i$  à celle de la composante  $x_i$  du vecteur d'état associé. Il en est de même pour l'observabilité. Clairement, sur cette forme diagonale simple, l'on voit que l'on peut agir sur  $x_i$  lorsque la composante  $b_i$  est non nulle de même que l'on peut constater une évolution de  $x_i$  si la composante  $c_i$  est non nulle.

Le mode  $\lambda_i$  est commandable (respectivement observable) si et seulement si  $b_i \neq 0$  (resp.  $c_i \neq 0$  par dualité).

### 6.3.2 $A$ non diagonalisable

Pour simplifier, l'on considère uniquement le sous-système associé à la valeur propre multiple  $\lambda$ . Une réalisation de Jordan est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_{n-1} \ c_n] x + \bar{D}u. \end{cases}$$

Le mode  $\lambda$  associé à un unique bloc de Jordan est commandable (respectivement observable) si et seulement si  $b_n \neq 0$  (resp.  $c_1 \neq 0$ ). Dans le cas où plusieurs blocs de Jordan lui sont associés, il ne peut être ni commandable, ni observable.

Il faut noter que la dernière affirmation concernant les modes multiples associés à plusieurs blocs de Jordan n'est pas forcément vraie pour un système multivariable.

Exemple :

L'on reconsidère l'exemple électronique de la figure 6.1. La représentation d'état en est donnée en (6.7). Elle

est diagonale. L'on s'aperçoit en appliquant les critères ci-avant que la seconde composante du vecteur d'état ( $v_{s_2} - V_{ref}$ ) (donc le pôle associé) n'est pas commandable par la tension  $v_1$ . En revanche, la composante  $v_{s_1}$  (donc son pôle associé) l'est. Les deux composantes sont observables. Ce résultat est compatible avec celui obtenu grâce au critère de Kalman.

## 6.4 Grammiens de commandabilité et d'observabilité

Soit le modèle LTI donné en (3.5) et supposé **asymptotiquement stable**. L'on se propose ici de présenter un critère de commandabilité et d'observabilité qui repose sur les notions de grammiens.

### 6.4.1 Définition des grammiens

Le grammien de commandabilité  $W_c$  et le grammien d'observabilité  $W_o$ , également appelés matrices grammiennes, sont respectivement définies par

$$W_c = \int_0^\infty e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau, \quad (6.8)$$

$$W_o = \int_0^\infty e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau, \quad (6.9)$$

d'où l'on retrouve bien que les deux propriétés sont duales l'une de l'autre.

### 6.4.2 Interprétation des grammiens

L'interprétation d'un grammien ainsi défini n'est pas chose aisée. Cependant, les grammiens peuvent aussi être définis pour des modèles LTI à temps discret et sont dans ce cas plus faciles à interpréter. En procédant par analogie pour les modèles à temps continu, l'on déduit que le grammien de commandabilité  $W_c$  est lié à l'énergie minimale du signal de commande  $u(t)$  nécessaire pour amener l'état d'une condition initiale à une condition finale en un temps infini.

Plus précisément,  $W_c$  est une matrice symétrique semi-définie positive donc il existe une matrice de passage unitaire  $U$  et telle que  $W_c = U W_c^D U'$  telle que, dans la nouvelle base,  $W_c^D$  est diagonale et ses éléments diagonaux  $d_i$  sont positifs ou nuls. Ces éléments sont représentatifs de la commandabilité de chaque variable d'état  $\bar{x}_i$  dans la nouvelle base. En effet,  $d_i^{-1}$  quantifie l'énergie minimale nécessaire pour atteindre  $e'_i = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$ , le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base. Ainsi, si  $d_i$  est faible, cette énergie est grande et l'état  $\bar{x}_i$  est faiblement commandable. Si  $d_i$  est nul,  $\bar{x}_i$  n'est pas commandable du tout (voir annexe F).

Le raisonnement sur le grammien d'observabilité  $W_o$  se fait par dualité.

La paire  $(A, B)$  (respectivement la paire  $(A, C)$ ) est commandable (resp. observable) si et seulement si le grammien de commandabilité  $W_c$  (resp. d'observabilité  $W_o$ ) est strictement défini positif.

Ainsi, les grammiens fournissent-ils des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité ou de commandabilité d'un modèle LTI. Mais de plus, à l'instar des critères basés sur les formes de Jordan, ils indiquent le nombre de variables d'état non commandables et non observables. En outre, ils permettent de quantifier cette propriété c'est-à-dire de savoir si chaque variable d'état est très ou peu commandable ou observable. En revanche, ils se limitent à l'étude des modèles LTI asymptotiquement stables.

**Remarque 6.1**  $W_c$  est égal à la variance de  $x(t)$  en régime stationnaire lorsque l'entrée  $u(t)$  est un bruit blanc.

**Remarque 6.2** L'on peut démontrer que, quelle que soit la base de l'espace d'état considérée, le produit  $W_c W_o$  conserve le même spectre.

### 6.4.3 Calcul des grammians

Les intégrales définies en (6.8) et (6.9) ne sont pas utilisées pour le calcul des grammians. En réalité,

$$AW_c + W_c A' = \int_0^\infty (Ae^{A\tau} BB' e^{A'\tau} + e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} A') d\tau = \begin{bmatrix} e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} \end{bmatrix}_0^\infty.$$

Sous l'hypothèse de stabilité de  $A$ , la quantité ci-dessus est égale à  $-BB'$ . En résumé, prenant en compte la dualité, l'on peut proposer l'assertion suivante :

Soit la réalisation (3.5), supposée asymptotiquement stable. Le grammien de commandabilité  $W_c$  et celui d'observabilité  $W_o$  sont les solutions respectives des équations de Lyapunov

$$AW_c + W_c A' = -BB', \quad (6.10)$$

$$A'W_o + W_o A = -C'C. \quad (6.11)$$

Il est plus facile, à l'aide des outils numériques d'aujourd'hui de résoudre les équations (6.10) et (6.11) que de calculer les intégrales (6.8) et (6.9).

**Remarque 6.3** Il existe une base de l'espace d'état dans laquelle les grammians de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux. Ainsi, chaque élément diagonal de ce double grammien quantifie à la fois la commandabilité et l'observabilité de la variable d'état associée dans la base considérée, c'est-à-dire son influence sur le comportement entrée/sortie du système. La réalisation correspondante est dite équilibrée. Elle se révèle particulièrement utile pour réduire le modèle à savoir trouver une réalisation d'ordre moindre dont le comportement entrée/sortie se rapproche de celui du modèle initial. Il suffit pour ce faire de négliger la dynamique des variables d'état faiblement commandables et observables. Cette technique de réduction de modèle a même été étendue au cas d'une réalisation instable.

## 6.5 Modèles et structures

Ces notions de commandabilité n'étaient pas étudiées lors des enseignements relatifs à l'approche fréquentielle. L'objectif de cette partie est d'expliquer pourquoi elles n'étaient pas requises et ce que l'approche temporelle peut apporter de plus que l'approche fréquentielle sur ce point.

### 6.5.1 Différence entre les modèles

L'on considère le système composite de la figure 6.2, formé de trois systèmes en cascade.

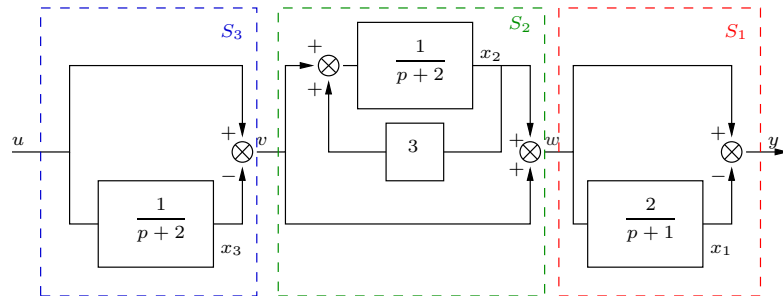


FIGURE 6.2 – Système composite

Une représentation d'état est d'abord établie en utilisant  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  comme variables d'état. Le sous-système  $S_3$  fait clairement apparaître

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + u.$$

Le sous-système  $S_2$  amène

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_2 + v = x_2 - x_3 + u.$$

Enfin, le sous-système  $S_1$  conduit à

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2w = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2u.$$

Ces trois équations différentielles permettent, en exprimant parallèlement  $y = x_1 + w$ , d'écrire la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + u \end{cases}$$

Le système est donc d'ordre 3 et a pour modes  $\{-1; 1; -2\}$ . Les matrices de commandabilité et d'observabilité sont

$$Q_c = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad Q_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Elles sont toutes deux de rang 2 ce qui indique qu'il existe un mode non commandable et un mode non observable. En effet, la déficience de rang renseigne quant au nombre de modes non commandables/observables. En revanche, l'on ne sait si ces modes sont confondus c'est-à-dire si c'est le même mode qui est non commandable et non observable. Pour le savoir, l'on peut diagonaliser la représentation d'état. En utilisant la matrice de passage

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

une réalisation diagonale possible est la suivante :

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CV = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D = 1.$$

Cette réalisation diagonale, selon les critères du paragraphe 6.3.1, fait apparaître que le mode  $-1$  est non commandable et que le mode  $1$  est non observable.

L'on cherche maintenant à établir l'équation différentielle unique reliant  $u$  et  $y$ .

Le sous-système  $S_1$  correspond en fait à un bloc

$$S_1(p) = \frac{p-1}{p+1},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{y} + y = \dot{w} - w.$$

Le sous-système  $S_2$  correspond à un bloc

$$S_2(p) = \frac{p}{p-1},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{w} - w = \dot{v}.$$

Enfin, le sous-système  $S_3$  correspond à un bloc

$$S_3(p) = \frac{p+1}{p+2},$$

ce qui se traduit de manière temporelle par

$$\dot{v} + 2v = \dot{u} + u.$$

Ces trois équations différentielles obtenues conduisent à :

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} + \dot{u}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 qui laisse penser que le système est d'ordre 2. Les modes associés sont  $-1$  et  $-2$ .

La fonction de transfert globale du système est

$$G(p) = S_1(p)S_2(p)S_3(p) = \frac{p}{p+2}.$$

Elle laisse présumer que le système est d'ordre 1 et que son seul mode est  $-2$ .

Que s'est-il donc passé ? L'équation différentielle a perdu le mode non observable et la fonction de transfert a perdu le mode non commandable. Un tel processus se vérifie toujours.

L'équation différentielle ne représente que la partie observable du système.

La fonction de transfert ne représente que la partie commandable et observable du système.

L'on constate ici que l'équation d'état est un modèle plus complet que l'équation différentielle unique qui est elle-même un modèle plus complet que la fonction de transfert. Toute réalisation restreinte à la partie commandable et observable d'un système est dite *minimale*.

Il doit être clair dans l'esprit du lecteur qu'une fonction de transfert dont les racines du dénominateur sont à partie réelle strictement négative peut laisser penser que le système décrit est asymptotiquement stable alors qu'il peut exister un mode instable qui est non commandable et/ou non observable. Un tel mode apparaîtrait dans une représentation d'état.

## 6.5.2 Systèmes composites

Soit le système correspondant à la mise en cascade de plusieurs sous-systèmes (schéma-bloc de la figure 6.3). Dans ce cas, le mode  $a$  est non commandable.

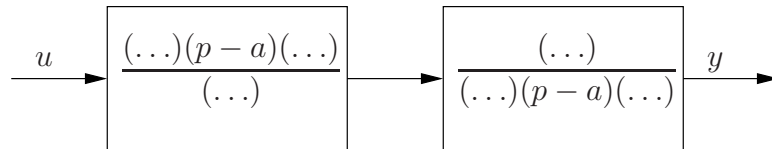
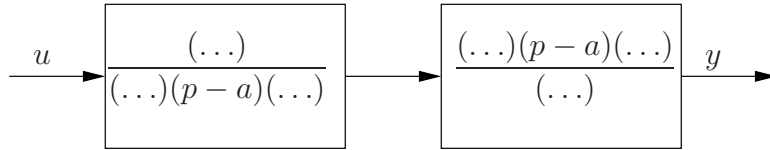
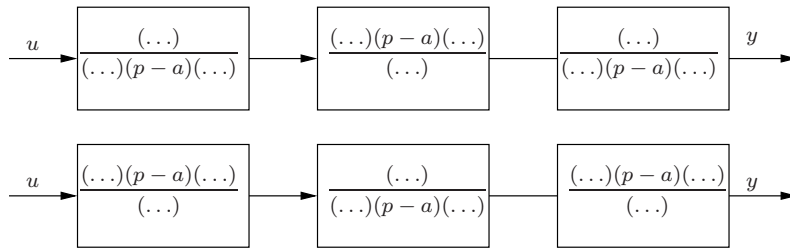


FIGURE 6.3 – mode  $a$  non commandable

FIGURE 6.4 – mode  $a$  non observable

Si l'on considère maintenant une inversion des blocs telle qu'illustrée sur la figure 6.4, alors le mode  $a$  redevient commandable mais est non observable. Dans les deux cas, il n'apparaîtra pas dans la fonction de transfert et dans le premier cas, il ne sera pas non plus révélé par la résolution de l'équation différentielle.

Soit le système de la figure 6.5. Dans ces deux cas, le mode  $a$  n'est ni commandable, ni observable. Il ne sera révélé ni par la fonction de transfert, ni par l'équation différentielle.

FIGURE 6.5 – mode  $a$  non commandable et non observable

**Remarque 6.4** Lorsque l'on pratique un asservissement de type PI sur un système de premier ordre par la technique de la compensation de pôle (voir cours sur l'approche fréquentielle), l'on rend la constante de temps du procédé non commandable. En effet, si le procédé et le régulateur sont respectivement décrits par

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad R(p) = \frac{A}{p}(1 + \tau p),$$

soit deux systèmes de premier ordre, la chaîne directe  $L(p)$ , qui devrait a priori être de second ordre, par compensation de  $(1 + \tau p)$ , est en réalité de premier ordre :

$$L(p) = \frac{AK}{p}.$$

C'est un simple intégrateur qui cache le pôle  $-1/\tau$ . Pourtant les dynamiques liées à  $\tau$  sont toujours effectives dans le système.

Soient deux sous-systèmes en parallèle comme indiqué sur la figure 6.6.

L'association de  $S_1$  et  $S_2$  constitue alors un système commandable (respectivement observable) si  $S_1$  et  $S_2$  sont tous deux commandables et s'ils ne possèdent pas de mode commun. L'hypothèse de commandabilité et d'observabilité de  $S_1$  et  $S_2$  est bien sûr nécessaire mais dans le cas où les deux sous-systèmes ont un mode en commun, il se peut que le système global soit tout de même commandable (observable).

Enfin, si  $S_2$  constitue un organe de contre-réaction sur  $S_1$  comme l'illustre la figure 6.7,

alors, le système global est :

- commandable si la cascade  $S_1 S_2$  est commandable ;
- observable si la cascade  $S_2 S_1$  est observable.

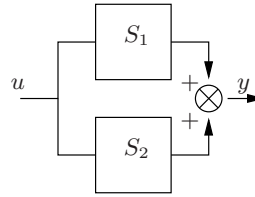


FIGURE 6.6 – Deux systèmes en parallèle

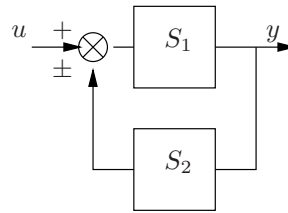


FIGURE 6.7 – Deux systèmes en contre-réaction

## 6.6 Réalisation minimale

Cette partie définit la notion de réalisation minimale et ce qu'elle induit sur les concepts de pôles et de stabilité.

### 6.6.1 Définition

Comme l'on vient de le voir, l'ordre de la représentation d'état n'est pas toujours le même que celui de la fonction de transfert. Tout dépend de la commandabilité et de l'observabilité de ce dernier. Lorsqu'il est complètement commandable et observable, les deux ordres sont égaux. L'on peut cependant restreindre la représentation d'état du système à un sous-vecteur d'état, de dimension maximale, qui soit entièrement commandable et observable.

On appelle réalisation minimale ou irréductible d'un système LTI toute représentation d'état ne décrivant que la dynamique commandable et observable du système.

### 6.6.2 Réalisation minimale et notion de pôles

Jusqu'alors, il a été opéré à une identification systématique des pôles de la fonction de transfert aux valeurs propres de la matrice d'état. Cette assimilation apparaît maintenant peu rigoureuse.

En effet, soit une réalisation  $(A, B, C, D)$  d'ordre  $n$  d'un système LTI. Soit également une réalisation minimale  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  d'ordre  $\bar{n}$  de ce système. Si le système est entièrement commandable et observable alors les deux réalisations sont de même ordre ( $n = \bar{n}$ ) et les matrices  $A$  et  $\bar{A}$  sont semblables. Les deux réalisations sont alors minimales. S'il existe une partie non commandable et/ou non observable dans le système, alors  $\bar{n} < n$ . La fonction de transfert admet, entre autres, les deux expressions

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D = \bar{C}(pI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

mais est toujours d'ordre  $\bar{n}$ . Ceci conduit tout naturellement, dans le cas où  $\bar{n} < n$ , à comparer le nombre de pôles au cardinal du spectre de la matrice d'état pour constater qu'il n'y a pas nécessairement identité des deux ensembles. Ainsi les valeurs propres de  $\bar{A}$  sont les pôles de  $G(p)$  mais celles de la matrice  $A$  ne le sont pas forcément. En revanche, tout pôle de  $G(p)$  est bien valeur propre des deux matrices. Ceci résulte de la perte de commandabilité ou d'observabilité qui conduit à la compensation de pôles et de zéros dans la fonction de transfert. Il faut donc distinguer pôles de la fonction de transfert et valeurs propres de la matrice d'état. De même il faut faire la nuance entre dénominateur de fonction de transfert et polynôme caractéristique associé à la matrice dynamique.

Les pôles de la fonction de transfert d'un système sont égaux aux valeurs propres de toute matrice d'état d'une réalisation minimale du système.

Exemple :

Soit la réalisation :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

Une telle réalisation correspond à la fonction de transfert

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B = \frac{(p-1)}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{p+1}$$

d'où il apparaît que la valeur propre 1 n'est ni commandable ni observable puisqu'elle est à la fois pôle et zéro de la fonction de transfert. L'on peut construire une réalisation à partir de la fonction de transfert d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x. \end{cases}$$

Cette réalisation d'ordre 1 est minimale.

### 6.6.3 Réalisation minimale et stabilité

Au paragraphe 5.3.1, il avait été pris soin, dans les explications relatives à l'équivalence entre BIBO-stabilité et stabilité asymptotique, de préciser que fonction de transfert et modèle d'état étaient de même ordre. Ceci pouvait sembler un peu redondant mais la précision est nécessaire comme le montre l'exemple du paragraphe précédent.

En effet, si l'on considère la fonction de transfert  $G(p) = 1/(p+1)$ , il ne fait pas de doute que ce système de premier ordre ayant un pôle dans le demi-plan gauche répond à une impulsion par une exponentielle décroissante. Il est BIBO-stable. Toutefois, si l'on applique le critère des racines à la réalisation initiale, la présence de la valeur propre  $+1$  atteste de l'instabilité de ce dernier.

En réalité, tout est une question de minimalité de la réalisation ou si l'on préfère, de commandabilité et d'observabilité. Le pôle  $+1$ , parce qu'il n'est ni commandable ni observable, n'est pas sensible à l'entrée du système et n'agit pas sur la sortie. Il est indiscernable dans le comportement entrée/sortie du système et n'altère donc pas la BIBO-stabilité du système. L'équivalence entre stabilité asymptotique d'une réalisation et BIBO-stabilité du système associé n'est vraie que si la réalisation est minimale.

De même que l'on avait vu qu'il était possible de dire qu'un système est simplement stable de manière interne mais BIBO-instable (donc instable de manière externe), tel l'intégrateur, un système peut également être instable de manière interne et stable de manière externe à l'instar de l'exemple ci-dessus.