

Support de cours

Automatique linéaire continue

1ère année FI-GIL

1ère année FI-GMSI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

I- INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses R à des sollicitations S (figure 1.1). Ainsi, un système électrique pourra être étudié et caractérisé en exprimant une tension de sortie (réponse) en fonction d'une tension d'entrée (sollicitation). Ou encore, la position d'un amortisseur de véhicule (réponse) pourra être étudiée en fonction de l'excitation produite par les irrégularités de la route. Un faisceau de lumière (sollicitation) dirigé vers une face d'un matériau et qui ressort au travers d'une autre face (réponse) peut par exemple renseigner sur l'état du dit matériau.

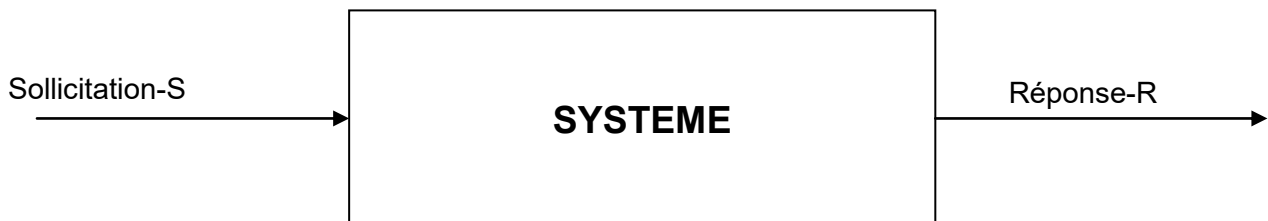


Figure 1.1 : modèle général d'un système

Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la

quasi-totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique, etc.

Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé sur le schéma de la figure 1.1.

Dans la réalité, les systèmes peuvent posséder une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties, certaines sorties pouvant même éventuellement être considérées comme de nouvelles entrées (cas des systèmes bouclés que nous étudierons dans la suite de ce cours).

Nous étudierons dans ce cours, la manière dont le fonctionnement de tels systèmes peut être décrit, à partir de modèles mathématiques plus ou moins sophistiqués (en tout cas adaptés à la complexité du problème). Ceci nous permettra de répondre à différents types de question, par exemple :

- Quelle sera la réponse d'un système quelconque à telle ou telle sollicitation ? (Aspect prédictif.)
- De quoi se compose un système qui fournit telle réponse à telle sollicitation ? (Aspect caractérisation, identification, mais aussi diagnostic et détection de défauts.) ?
- Comment adapter ou régler un système pour qu'il fournisse une réponse donnée à une certaine sollicitation ?

D'autres questions se poseront tout au long de ce cours. Il est d'ores et déjà évident qu'une meilleure connaissance de ces systèmes conditionne non seulement leur utilisation, mais également tous les concepts physiques qui y sont associés.

II- NOTION DE SIGNAL

2-1- Introduction

Nous pouvons donc avoir une première approche des systèmes en considérant le couple (sollicitation - réponse). Imaginons un système optique réfléchissant vers lequel on dirige un faisceau de lumière. Le faisceau réfléchi constitue en quelque sorte une information, au sens où il est porteur d'une certaine signification. Nous le qualifierons de *signal*, tout comme le faisceau incident, puisqu'on ne saurait admettre que la réponse d'un système soit porteuse d'information si la sollicitation ne l'était pas. D'une manière générale, toute sollicitation ou réponse d'un système sera considérée comme un *signal*.

Les sollicitations ou excitations sont des signaux d'entrée et les réponses sont des signaux de sortie.

Pour le moment, nous ne considérerons que des systèmes mono-entrée, mono-sortie. Par convention, l'entrée sera notée e et la sortie sera notée s .

2-2- Signaux temporels

Le moyen qui *a priori* semble le plus naturel pour décrire un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps. Ainsi les formes $e(t)$ et $s(t)$ sont-elles des représentations temporelles des signaux e et s .

Nous verrons un peu plus tard que ce mode de représentation n'est pas toujours le plus intéressant. Toutefois, dans l'immédiat, nous nous limiterons à cette description temporelle de l'information. Ainsi, on peut dire qu'un système quelconque est capable de prendre un signal $e(t)$ et de la transformer en un signal $s(t)$.

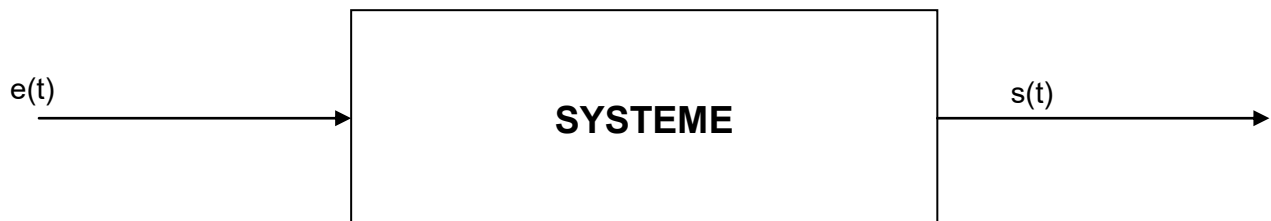


Figure 1.2 : Modèle général d'un système temporel

2-3- Principe de causalité

Les signaux temporels possèdent une propriété essentielle sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir à maintes reprises : un effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause. Il s'agit du principe de causalité qui n'est pas qu'une vérité de Lapalisse comme nous aurons l'occasion de nous en rendre compte.

2-4- Signaux non temporels

La théorie des signaux ne traite pas que des signaux temporels. Si par exemple on considère une image en noir et blanc, statique sur un écran, le signal que constitue cette image peut être considéré comme une luminosité dépendant de deux variables spatiales (x, y) . Dans ce cas, la variable temps n'a rien à voir avec le problème. D'autres cas pourraient être cités en exemple. Dans ces cas où t n'intervient pas, on peut s'attendre à ce que le principe de causalité ne soit pas respecté. Il n'est pas question ici d'ébaucher une classification des différents types de signaux. Celle-ci sera abordée plus tard. Nous utiliserons dans la suite de ce chapitre, l'exemple de signaux temporels appliqués à des systèmes simples : les systèmes linéaires.

III- LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

3-1- Définition

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle $s(t)$ telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace $L(s)$ comme la fonction S de la variable complexe p telle que :

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt}dt$$

La fonction $S(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \tau + j\omega$).

La transformée de Laplace d'une fonction $s(t)$ n'existe pas dans tous les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle τ de la variable p est supérieure à une valeur donnée a appelée seuil de convergence.

D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulles pour $t < 0$) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe.

La fonction $s(t)$ s'appelle l'original de $S(p)$, ou encore sa transformée inverse.

3-2- Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de certains signaux.

a- Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes :

$$L[af + bg] = aL[f] + bL[g]$$

$$\text{En particulier : } L[f + g] = L[f] + L[g]$$

$$\text{et : } L[kf] = kL[f]$$

b- Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Soit $F(p)$ sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de $F(p)$:

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée d'ordre n est :

$$\frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} (p^{n-k} \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} f(0))$$

Par exemple :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Une première constatation s'impose en observant ces expressions : la transformation de Laplace transforme l'opérateur *dérivation* en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en $t = 0$ des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

Remarque : Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) \quad ; \quad \frac{d^2 f}{dt^2} \rightarrow p^2 F(p)$$

c- Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$P(t) = \int f(t)dt \rightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$$

Là encore, l'opérateur *intégration* se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

d- Théorème du retard

Considérons la fonction $f(t - \tau)$, autrement dit la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 1.3), autrement dit un retard d'un temps τ

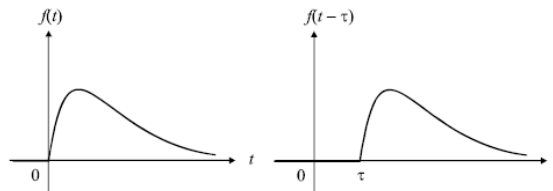


Figure 1.3 : Représentation temporelle d'un signal retardé

Calculons la transformée de Laplace de cette fonction.

On a :

$$f(t) \rightarrow F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $u = t + \tau$:

$$f(t) \rightarrow F(p) = \int_{\tau}^{\infty} f(u - \tau)e^{-p(u-\tau)} du$$

En remarquant que la fonction $f(u - \tau)$ est nulle pour $t < \tau$, on peut, sans changer la valeur de l'intégrale,

lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que τ :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{p\tau} f(u - \tau)e^{-pu} du$$

$$F(p) = e^{p\tau} \int_0^{\infty} f(u - \tau)e^{-pu} du$$

Par définition,

$$F(p) = e^{p\tau} \int_0^{\infty} f(u - \tau)e^{-pu} du \text{ est la transformée de Laplace de } f(t - \tau)$$

D'où :

$$f(t - \tau) \rightarrow F(p)e^{-p\tau}$$

e-Théorème de la valeur finale

Encore plus utile que le théorème précédent:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

f-théorème de la valeur initiale

, le théorème de la valeur initiale permet de calculer la valeur à l'origine des temps d'une fonction temporelle $f(t)$ en connaissant uniquement sa transformée de Laplace

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

g-Propriétés diverses

Sans être fondamentales, les trois propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles lors du calcul de certaines transformées de Laplace :

$$e^{-at} f(t) \rightarrow F(p + a)$$

$$t f(t) \rightarrow -\frac{dF}{dp}$$

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_0^\infty F(p) dp$$

3-3- Transformée de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(p)$ de retrouver son original, autrement dit la fonction $f(t)$ dont elle est la transformée de Laplace. Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe :

Si : $f(t) \rightarrow F(p)$

Alors :

$$f(t) = \int_{c-\infty}^{c+\infty} F(p) e^{pt} dp$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante c supérieure au seuil de convergence a de $F(p)$.

Remarque : Les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares : nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction $F(p)$.

IV-TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE QUELQUES SIGNAUX USUELS

4-1- Échelon unité

L'échelon unité (figure 1.4) est la fonction $u(t)$ telle que $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

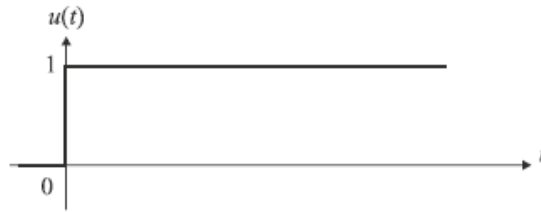


Figure1.4 :echelon unité

$$u(t) \rightarrow U(p) = \frac{1}{p}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire), d'amplitude A , aura pour transformée de Laplace :

$$f(t) = Au(t) \rightarrow U(p) = \frac{A}{p}$$

4-2-Rampe ou échelon de vitesse

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction $u(t)$ précédente. On la note en général $v(t)$. Elle est nulle pour t négatif et est égale à t pour t positif ou nul (figure 1.5).

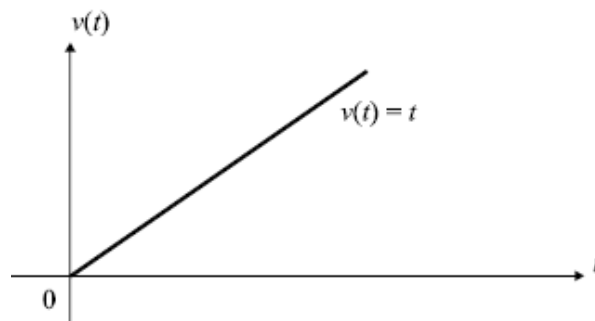


Figure1.5. : rampe

On peut écrire : $v(t) = tu(t)$

On a évidemment :

$$V(p) \rightarrow \frac{U(p)}{p} = \frac{1}{p^2}$$

4-3- Impulsion unitaire

En dérivant cette fois la fonction $u(t)$, on obtient une fonction habituellement notée $\delta(t)$ et appelée impulsion unitaire ou impulsion de Dirac.

Il s'agit en théorie d'une fonction nulle pour tout t sauf pour $t = 0$ où elle a une valeur infinie. L'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction $\delta(t)$ et l'axe des t vaut 1. Le schéma de la figure 1.6 donne une idée de cette impulsion en faisant tendre le paramètre θ vers 0. On a alors :

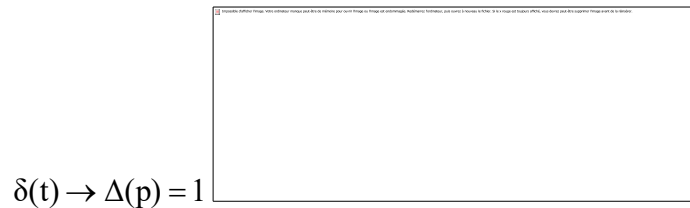


Figure 1.6. : modèle de l'impulsion de Dirac

4-4-Signal sinusoïdal

On considère un signal $s(t)$ nul pour $t < 0$ et valant $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t \geq 0$.

On a alors :

$$S(p) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$$

On retiendra :

$$\sin t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

V-FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

5.1. Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$.

On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales, il vient :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

Soit :

$$S(p)[a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0] = E(p)[b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0]$$

D'où :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée fonction de transfert du système et communément notée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

$$G(p) = \frac{b_m(p - z_m)(p - z_{m-1})(p - z_{m-2})\dots(p - z_1)}{a_n(p - p_n)(p - p_{n-1})(p - p_{n-2})\dots(p - p_1)}$$

Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelés les zéros de la fonction de transfert. Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels. Nous verrons plus loin que, le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes.

5.2. Mise en cascade de deux systèmes

Sur le schéma de la figure 1.7, nous avons placé deux systèmes en cascade, respectivement de fonction de transfert $G_1(p)$ et $G_2(p)$.



Figure 1.7. : mise en cascade de deux systèmes

5-3- Original d'une fonction de transfert

Bien qu'une fonction de transfert $G(p)$ ne soit pas, à proprement parler, la transformée de Laplace d'un signal, on peut calculer sa transformée inverse $g(t)$ que l'on appelle l'original de la fonction de transfert. Le principal intérêt de ce concept réside dans le fait que si on injecte une impulsion de Dirac dans un système de fonction de transfert $G(p)$, le signal de sortie $s(t)$ sera égal à $g(t)$. En effet, si $E(p) = 1$, on a : $S(p) = G(p)$

La réponse impulsionnelle d'un système est donc l'original de sa fonction de transfert. Cette propriété (bien que dans la réalité il soit impossible de construire une impulsion de Dirac parfaite), joue un rôle important dans l'identification des systèmes.

VI- RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME À L'AIDE DE LA FONCTION DE TRANSFERT

6-1- Principe

La première utilisation intéressante du modèle Laplacien réside dans la résolution systématique de problèmes physiques dans lesquels on possède un système linéaire quelconque régi par une équation différentielle clairement identifiée.

On injecte à l'entrée de ce système un signal donné et on souhaite déterminer quel est le signal de sortie.

La connaissance de la fonction de transfert du système (qui s'écrit immédiatement à partir de l'équation différentielle) fournit évidemment la relation entre $S(p)$ et $E(p)$ c'est-à-dire entre les transformées de Laplace respectives de la sortie et de l'entrée du système :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

Il suffit donc de calculer ou de déterminer à partir des tables, la transformée de Laplace de $e(t)$, puis d'effectuer le calcul de $S(p)$ puis, enfin, toujours à partir des tables, de déterminer l'original de $S(p)$.

VII-DETERMINATION DE LA TRANSFORMEE LAPLACE INVERSE

7-1- Utilisation des propriétés de la transformée de Laplace, et les tables

Les propriétés de la transformée de Laplace peuvent être un moyen très efficace pour déterminer l'original d'une fonction $F(p)$

Pour des transformées simples il est préférable d'utiliser les tables qui fournissent les fonctions et leurs transformées de Laplace, il suffit de lire dans le sens inverse pour déterminer l'origine de la Transformée. (**Annexe 1**):

7-2- Décomposition en éléments simples

Démarche :

On considère une fonction sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

a-Ecrire le dénominateur sous forme de produits de termes fonctions des pôles de $F(p)$

$$D(p) = D_1(p).D_2(p)...D_k(p)...D_n(p)$$

Cas 1 : tous les pôles p_k sont des racines simples (distinctes) :

- Expression de $F(p)$

Dans ce cas : $D(p) = (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)...(p-p_k)...(p-p_n)$ et chaque pôle aura pour fraction rationnelle :

$$\frac{A_k}{(p - p_k)}$$

et $F(p)$ est mise donc sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)...(p-p_k)...(p-p_n)}$$

$$F(p) = \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + .. + \frac{A_k}{(p-p_k)} + .. + .. + \frac{A_n}{(p-p_n)}$$

-

- Détermination des termes A_k

chaque terme est obtenu par l'expression :

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) F(p)$$

Cas 2 : existence des pôles p_k d'ordre supérieur :

a-Expression de $F(p)$:

Le dénominateur sera mis sous la forme :

$D(p) = D_1(p).D_2(p)...D_k(p)...D_n(p)$, et chaque pôle p_k d'ordre supérieur à 1 aura pour fraction rationnelle :

$$\frac{N_k(p)}{D_k(p)}$$

et $F(p)$ est mise donc sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N_1(p)}{D_1(p)} + \frac{N_2(p)}{D_2(p)} + .. + \frac{N_k(p)}{D_k(p)} + .. + .. + \frac{N_n(p)}{D_n(p)}$$

Où $D_k(p)$ est fonction de p_k et $N_k(p)$ est un polynôme, à coefficients constants avec :
 $d^\circ(N_k(p)) < d^\circ(D_k(p))$ (en général on prend $d^\circ(N_k(p)) = d^\circ(D_k(p)) - 1$)

a- Détermination des constantes dans les numérateurs :

Pour déterminer toutes les constantes :

- réduire toutes les fractions rationnelles au même dénominateur
- écrire la somme sous forme rationnelle
- identifier le numérateur avec celui de $F(p)$
- résoudre le système obtenu

7-3- Méthode des résidus

Démarche :

a- Calcul des pôles de $F(p)$

b- Calcul des résidus

Calculer le résidu pour chacun des pôles

- **cas1** : pôle p_k simple (d'ordre 1) :

$$R(p_k) = \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) F(p) e^{pt}$$

- **cas2** : pôle p_k d'ordre n :

$$R(p_k) = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} (p - p_k)^n F(p) e^{pt}$$

$$G(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A_1}{p-1} + \frac{N_1}{D_1} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} = \frac{Ap^2 + A + Bp^2 - Bp + Cp - C}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{(A+B)p^2 + (C-B)p + A-C}{(p-1)(p^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=1 \\ A-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2A=1 \\ C=A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow G(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} + \frac{-p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} \right) \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2} (e^t - \cos t + \sin t) u(t)$$

$$F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)^2}$$

pôles: 0, -1

$$R_0 = \lim_{p \rightarrow 0} (p-0) \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} = 2$$

$$R_{-1} = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dp} \left((p+1)^2 \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} \right) = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} (e^{pt} + 2 \frac{e^{pt}}{p}) = \lim_{p \rightarrow -1} (pe^{pt} + 2e^{pt})$$

c- calcul de f(t)

une fois les résidus de tous les pôles de F(p) sont calculés, on aura :

$$f(t) = \sum R(p_k)$$

7-4- Exemples

Calculer l'original de <f(p) définie par :

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2+1}$$

On applique le théorème du retard et on obtient f(t)=sin(t-1)

$$F(p) = \frac{p+2}{p(p+1)^2}$$

pôles: 0, -1

$$R_0 = \lim_{p \rightarrow 0} (p-0) \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} = 2$$

$$\begin{aligned} R_{-1} &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dp} \left((p+1)^2 \frac{p+2}{p(p+1)^2} e^{pt} \right) = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} (e^{pt} + 2 \frac{e^{pt}}{p}) = \lim_{p \rightarrow -1} (te^{pt} + 2 \frac{te^{pt}p - e^{pt}}{p^2}) = te^{-t} + 2 \frac{-te^{-t} - e^{-t}}{1} = \\ &= e^{-t}(t-2t-2) = -(t+2)e^{-t} \\ f(t) &= -(t+2)e^{-t} + 2 \end{aligned}$$

VIII- ÉTUDE DES SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE

8-1- Mise en équation

Les systèmes du premier ordre sont régis par des équations différentielles du premier degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum un zéro et un pôle. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$T \frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Les deux constantes T et K sont des nombres réels en général positifs.

T est appelée constante de temps du système.

K est appelée le gain statique.

Ces deux appellations trouveront leur justification dans les résultats de l'étude que nous allons mener.

Ces systèmes sont encore parfois appelés systèmes à une seule constante de temps.

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle et pour expression :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

8-2- Réponse à une impulsion de Dirac

On étudie la réponse du système à une entrée $e(t) = \delta(t)$. On a donc :

$$E(p) = 1$$

On a :

$$S(p) = G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

La transformée de Laplace correspond très exactement à la fonction de transfert du système ce qui est la particularité essentielle de la réponse impulsionnelle. On calcule facilement $s(t)$ à partir de la table des transformées de Laplace :

$$s(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

La constante de temps du système, T (qui porte bien son nom) peut être mise en évidence très facilement sur le graphique (figure 7.1). Comme dans toute fonction exponentielle décroissante, la tangente à l'origine coupe l'asymptote (ici, l'axe des abscisses) au point d'abscisse T .

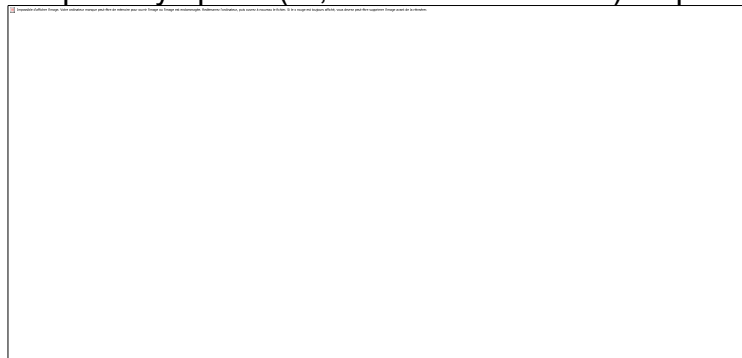


Figure 7.1 Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

7-3- Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire $e(t) = t.u(t)$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{G(p)}{p} = \frac{K}{p(1 + T_p)}$$

On détermine facilement $s(t)$ à partir de la table des transformées de Laplace :

$$s(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

La constante de temps du système peut une fois de plus être facilement mise en évidence sur le graphique (figure 7.2). On remarquera ici aussi la position de la tangente à l'origine ainsi que l'asymptote en K lorsque t tend vers l'infini.

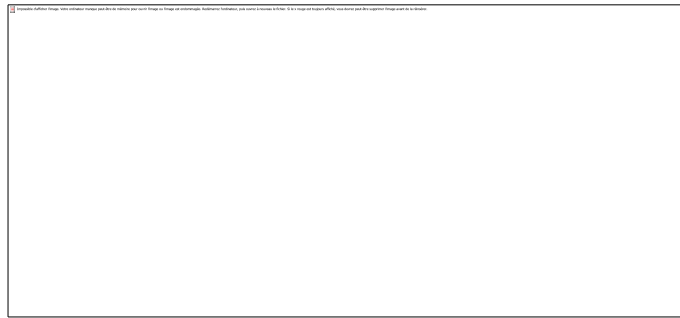


Figure 7.2 : Réponse indicielle d'un système du premier ordre

On peut définir, à partir de ce graphique, le temps de réponse $t_{r5\%}$ du système, par le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur asymptotique (on dit aussi de sa valeur à l'infini) à 5 % près.

Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de $3T$.

$$\text{On a : } s(t_{r5\%}) = K(1 - e^{-\frac{t_{r5\%}}{T}}) = 0.95K \Rightarrow (1 - e^{-\frac{t_{r5\%}}{T}}) = 0.95 \Rightarrow e^{-\frac{t_{r5\%}}{T}} = 0.05$$

$$t_{r5\%} = -T \ln(0.05)$$

D'où finalement : $t_{r5\%} \approx 3T$

Par ailleurs :

$$S(T) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.63K$$

7-4- Réponse à une entrée en rampe

On étudie maintenant la réponse du système à une rampe unitaire $e(t) = v(t) = t$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p^2}$$

d'où :

$$S(p) = \frac{G(p)}{p^2} = \frac{K}{p^2(1 + T_p)}$$

On remarque que cette expression est la transformée de Laplace d'une primitive de la sortie précédemment calculée, en effet :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[\frac{K}{p(1+Tp)} \right]$$

:

Il suffit donc d'intégrer l'expression trouvée pour la réponse indicielle :

$$s(t) = \int K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) dt$$

$$s(t) = Kt - KTe^{-\frac{t}{T}} + Cte$$

La constante est facilement calculable, puisque l'ordonnée à l'origine des temps est forcément nulle. On a alors : $s(0) = KT + Cte = 0$ donc : $Cte = -KT$
finalement :

$$s(t) = K(t - T) + KTe^{-\frac{t}{T}}$$

Comme le terme $KT e^{-t/T}$ est toujours strictement positif, la courbe se trouve en permanence au dessus de son asymptote. Par ailleurs la tangente en 0 à la courbe nous est donnée par le calcul de la dérivée en $t = 0$:

$$\frac{ds}{dt} = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \Rightarrow \frac{ds(0)}{dt} = 0$$

Il est donc facile, à partir de ces éléments, de tracer le graphe de $s(t)$.

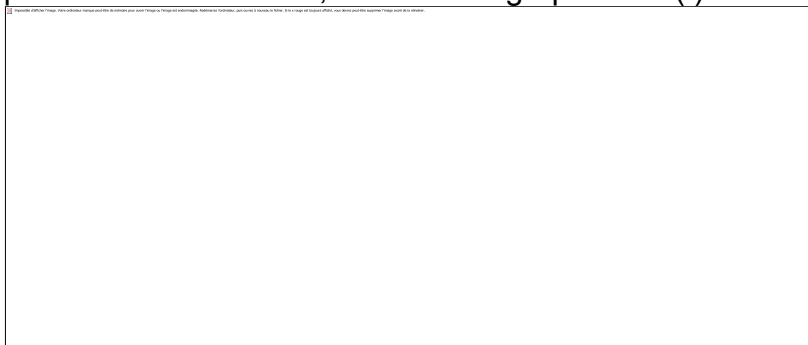


Figure 7.3. : Réponse d'un système du premier ordre à une entrée en rampe

VIII- ÉTUDE DES SYSTÈMES DU SECOND ORDRE

8-1- Définition

Un système est dit du second ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du 2ème ordre.

La forme générale de l'équation différentielle d'un système du deuxième ordre d'entrée e et de sortie s est (on prendra toujours un second membre indépendant de $e'(t)$) :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2(t) = K\omega_0^2 u(t)$$

Les trois constantes ω_0 , m (parfois notée z , ξ *ksi* ou ζ *zéta*) et K sont des nombres réels en général positifs. ω_0 est appelée pulsation propre du système non amorti ; m est appelée coefficient ou facteur d'amortissement. K est le gain statique du système. Ces appellations trouveront leur justification dans les résultats de l'étude que nous allons mener. (N.B. le coefficient d'amortissement peut être noté m ou z)

Remarque : Nous avons placé l'équation sous cette forme pour faire apparaître ces trois paramètres

dont l'importance sera bientôt mise en évidence.

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son

fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres on obtient rapidement l'équation de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

8-1- Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire $e(t) = u(t)$. On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{H(p)}{E(p)} = \frac{K}{p \cdot (1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2})} = \frac{K\omega_0^2}{p(p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

D'où :

On a :

$$\Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

La détermination de $s(t)$ nécessite l'étude de trois cas en fonction de m :

a- $m > 1$, régime apériodique.

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique du dénominateur est alors

$$\Delta = (m^2 - 1)\omega_0^2 > 0$$

Le dénominateur possède donc deux pôles réels distincts :

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

Tous deux négatifs ($p_1 + p_2 = -2m\omega_0$ et $p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 > 0$) tels que :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

On cherche alors à exprimer $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p - p_1} + \frac{\gamma}{p - p_2}$$

afin de calculer aisément la TL inverse de $S(p)$.

on obtient :

$$S(p) = K \left[\frac{1}{p} + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \frac{1}{p - p_1} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \frac{1}{p - p_2} \right]$$

D'où par la transformée inverse de Laplace on a :

$$s(t) = K \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right]$$

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

On a : $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$ ($p_{1,2}$ réels positifs)
 $s'(0) = 0$ pente nulle à l'origine

Dans l'hypothèse où $m \gg 1$, on a :

$$p_1 - p_2 = 2\omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$$

$$\text{cad } |p_1| \ll |p_2|$$

$$\text{et donc } \left| \frac{p_1}{p_2 - p_1} \right| \ll \left| \frac{p_2}{p_1 - p_2} \right|$$

$$p_1 - p_2 = 2\omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$$

$$\text{cad } |p_1| \ll |p_2|$$

$$\frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}$$

Ainsi le terme $\frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}$ devient négligeable devant le terme $\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t}$ d'où

$$s(t) \cong K \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t}$$

ce qui correspond à la réponse d'un premier ordre, on parle alors de **pôle dominant**, ici p_1 c'est le pôle qui a le plus d'influence sur le comportement du système (l'influence de p_2 étant comparativement négligeable)., le pôle dominant est le pôle le plus proche de l'axe imaginaire.

S(t)



Figure8.1. Réponse indicielle d'un 2nd ordre pour un coefficient d'amortissement supérieur à 1, ($m \gg 1$ ($\zeta \gg 1$)).

-Détermination du temps de réponse à 5% pour $m \gg 1$ ($\zeta \gg 1$)

On a :

$$s(t_{r5\%}) = 0.95K = K(1 - e^{-\frac{\omega_0}{2m} t_{r5\%}})$$

$$t_{r5\%} = \frac{2m}{\omega_0} \ln 0.05 \approx \frac{2m}{\omega_0} .3$$

$$t_{r5\%} \approx \frac{6m}{\omega_0}$$

b- $m=1$: régime critique

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique du dénominateur est nul $\Delta = 0$, le dénominateur possède donc une racine double réelle $p_1 = p_2 = -\omega_0$ d'où

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2} = \frac{K}{p(1 + \frac{p}{\omega_0})^2}$$

On en déduit d'après la table de TL⁻¹

$$s(t) \cong K[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}]$$

c- $m < 1$: régime pseudopériodique.

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique du dénominateur est négatif. Le dénominateur de S(p) possède deux pôles complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

$$|p_1| = |p_2| = \omega_0$$

Pour $0 < m < 1$, la transformée inverse de S(p) est donnée dans les tables de TL⁻¹ :

$$s(t) \cong K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \varphi) \right]$$

avec $\varphi = \arccos(m)$

La figure 8.3 présente la réponse en régime pseudopériodique *amorti* ($0 < m < 1$) d'un système linéaire du second ordre pour $K = 1$, $\omega_0 = 0,22 \text{ rad/s}$, et $m = 0,18$.

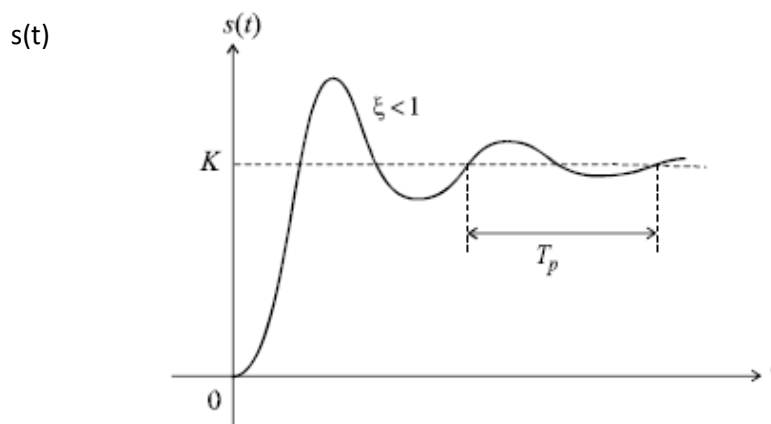


Figure 8.2. : Réponse indicielle d'un système linéaire du 2nd ordre à coefficient d'amortissement inférieur à 1 ($0 < \zeta < 1$).

On note T_p la pseudo-période des oscillations amorties :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

Le premier dépassement correspond à :

$$\begin{cases} t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} \\ D_1 = 100 e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} \end{cases}$$

Le temps de réponse à 5%, $t_{r5\%}$, est donné par l'abaque de la figure 8.3..

Il est minimal pour le coefficient d'amortissement $m \cong 0.7$:

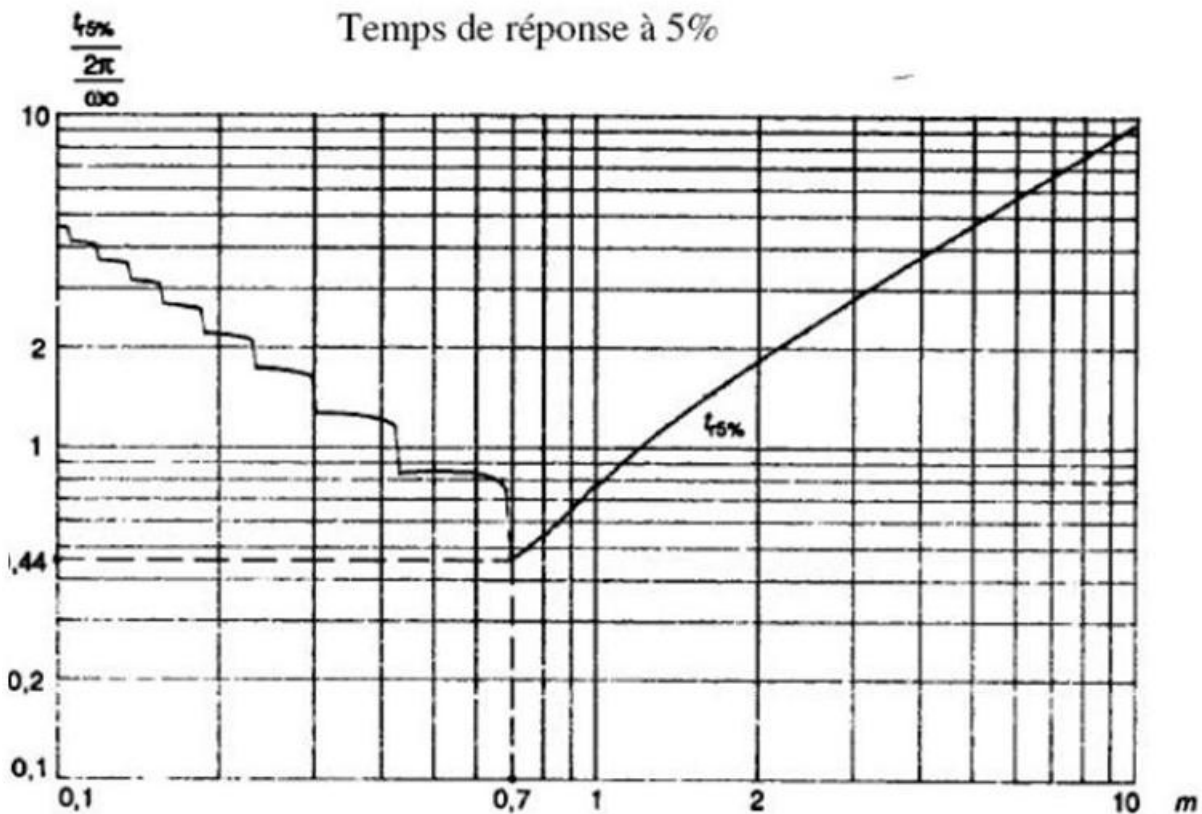


Figure 8.3. Temps de réponse à 5% d'un système linéaire du 2nd ordre

Pour $m < 0$, un calcul similaire au cas du régime apériodique nous amène à : $s(t)$ égal à $s(t)$ pour un régime apériodique

IX-ÉTUDE ET ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

9-1- Définitions

Considérons le traditionnel schéma de fonctionnement d'un système, traduit dans la représentation Laplacienne: $S(p) = G(p)E(p)$

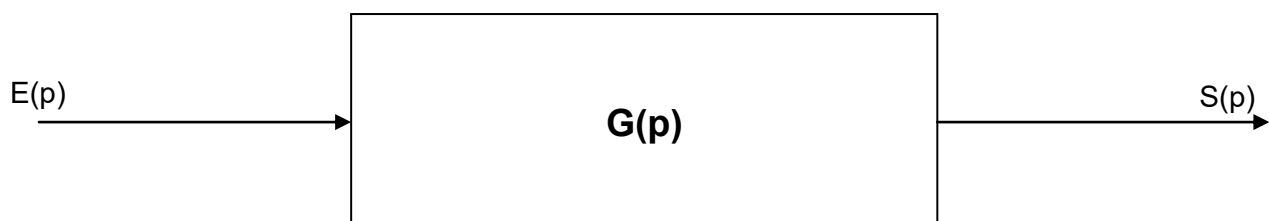


Figure 9.1 Modèle général d'un système linéaire

En posant $p = j\omega$, on obtient :

$$S(j\omega) = G(j\omega)E(j\omega)$$

Dans le cas de signaux à énergie finie, $S(j\omega)$ et $E(j\omega)$ représentent les transformées de Fourier des deux signaux, de sortie et d'entrée. Plus précisément, la relation ci-dessus, réduite à l'égalité des modules, prend un sens tout particulier si l'on constate que $|S(j\omega)|$ et $|E(j\omega)|$ ne sont rien d'autre que les spectres des signaux :

$$|S(j\omega)| = |G(j\omega)| \cdot |E(j\omega)|$$

La fonction $|G(j\omega)|$, que l'on note en général $G(j\omega)$ représente donc le rapport entre le spectre du signal de sortie et celui du signal d'entrée. Autrement dit $|G(j\omega)|$ représente le rapport des amplitudes des sinusoïdes de sortie et d'entrée, pour une pulsation ω donnée. C'est donc le gain fréquentiel du système à cette pulsation, que l'on appelle également le gain réel.

Par ailleurs, l'équation $S(j\omega) = G(j\omega)E(j\omega)$ nous conduit également à l'égalité des arguments :

$$\text{Arg}S(j\omega) = \text{Arg}G(j\omega) + \text{Arg}E(j\omega)$$

$$\text{Soit : } \varphi(\omega) = \text{Arg}G(j\omega) = \text{Arg}S(j\omega) - \text{Arg}E(j\omega)$$

Cette fonction correspond au déphasage, à la pulsation ω donnée, entre la sinusoïde de sortie et celle d'entrée.

Au final, la fonction $G(j\omega)$, que l'on appelle fonction de transfert en fréquence (ou gain complexe du système), nous fournit le gain réel $|G(j\omega)|$ et le déphasage $\varphi(\omega) = \text{Arg}G(j\omega)$ induit par le système vis-à-vis des composantes sinusoïdales.

Elle traduit donc le comportement fréquentiel du système

L'étude et l'analyse des systèmes pourra donc se faire par l'exploitation des diagrammes :

BODE, Niquyst et Black

9-2- DIAGRAMMES DE BODE

9.2.1 Définition

Les diagrammes de BODE consistent à tracer deux graphes correspondant respectivement au gain réel et au déphasage. Pour la courbe de gain, on ne trace pas directement $G(\omega)$ mais $G_{dB} = 20 \log G(\omega)$ défini comme le gain en décibels et, de surcroît, avec une échelle logarithmique en abscisse (figure 9.2).

Outre les raisons historiques qui ont présidé à ce choix, il existe deux intérêts essentiels au choix du tracé logarithmique du gain, intérêts que nous mettrons en évidence dans les pages qui suivent.

L'axe des ordonnées est bien évidemment gradué en décibels. Un gain réel $G(\omega)$ supérieur à 1 correspond à un gain en décibels positif tandis qu'un gain réel inférieur à 1 correspond à un gain en décibels négatif.

On a bien sûr $20 \log G(\omega) = 0 \text{ dB}$ pour $G(\omega) = 1$.

En règle générale, on porte directement les valeurs de ω sur l'axe des abscisses en respectant l'échelle logarithmique et en plaçant la pulsation $\omega = 1$ à l'origine de cet axe (puisque'elle correspond à $\log \omega = 0$).

On notera également que la pulsation $\omega = 0$ ne peut apparaître sur l'axe qu'en « moins l'infini ».

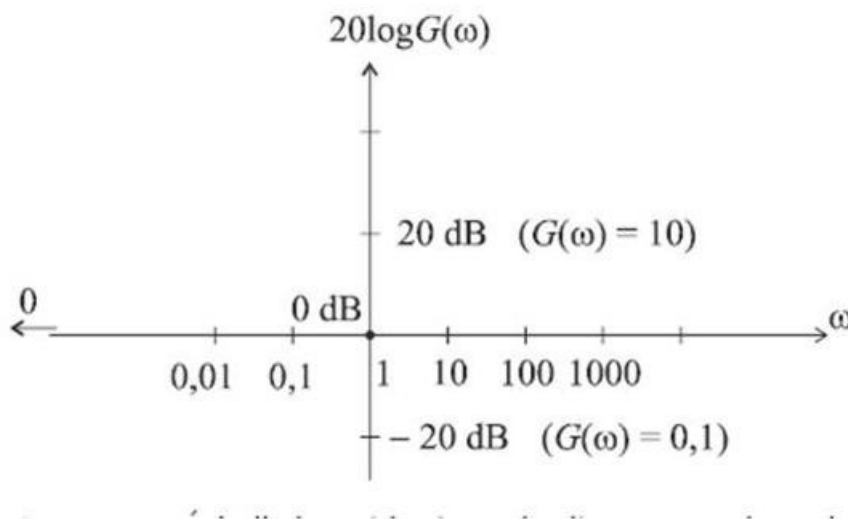


Figure 9.2 Échelle logarithmique du diagramme de BODE

.2.2 Exemple : diagramme de BODE d'un système du premier ordre

Considérons un système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

K et T sont deux constantes positives. K est le gain statique du système, T sa constante de temps.

On a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + Tj\omega}$$

D'où :

$$\begin{cases} G(\omega) = \frac{K}{1 + T^2 \omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan T\omega \end{cases}$$

Contentons-nous d'une étude sommaire de ces fonctions

Pour $\omega \rightarrow 0$, on a : $G(\omega) \rightarrow K$: $20\log G(\omega) \rightarrow 20\log K$

Ceci correspond à une asymptote horizontale

Pour $\omega \rightarrow +\infty$, on a :

$$G(\omega) \approx \frac{K}{T\omega} \Rightarrow 20\log G(\omega) = 20\log G(\omega) = 20\log K - 20\log T - 20\log \omega$$

Cet équivalent de la fonction $G(\omega)$ pour $\omega \rightarrow +\infty$ correspond à une droite puisque l'échelle des abscisses est logarithmique. Cette droite coupe l'autre asymptote au point d'abscisse $\omega=1/T$, coupe l'axe des abscisses au point $\omega = K/T$, et possède une pente de - 20 dB/décade, ce qui signifie que le gain chute de 20 dB lorsque la pulsation est multipliée par 11. Nous allons vite nous rendre compte que dans un diagramme de BODE, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. Ce « 20 dB/décade » est donc en quelque sorte l'unité élémentaire de pente. Nous appellerons pente d'ordre n , une pente égale à $20n$ dB/décade.

Compte tenu de l'effet « lissant » du logarithme, la courbe réelle reste longtemps proche de ses asymptotes (qui par conséquent constituent une approximation suffisante du graphe). Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la vraie valeur du gain pour la pulsation $\omega = 1/T$

$$G\left(\frac{1}{T}\right) = 20\log \frac{K}{\sqrt{1+1}} = 20\log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20\log K - 10\log 2 = 20\log K - 3\text{dB}$$

Le point en question se trouve donc à 3 dB en dessous du gain statique (voir figure 9.3). La pulsation $\omega=1/T$ est appelée pulsation de coupure.

En ce qui concerne la courbe de déphasage, remarquons qu'il s'agit d'une fonction arctangente et que :

Pour $\omega \rightarrow 0 : \phi(\omega) \rightarrow 0$

pour $\omega \rightarrow 0 : \phi(\omega) \rightarrow 0$

pour $\omega \rightarrow +\infty : \phi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$\phi\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Il n'est bien sûr pas question ici d'assimiler les asymptotes (en trait plein) à la courbe (en trait pointillé). On notera que la valeur asymptotique du déphasage vaut 0 sur l'intervalle de pulsations où la direction asymptotique du gain correspond à une pente d'ordre 0, tandis qu'elle vaut $-\pi/2$ lorsque la direction asymptotique du gain correspond à une pente d'ordre -1 . Il s'agit là d'une règle générale :

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant l'ordre de la pente par $\pi/2$.

Remarque : Les deux intérêts fondamentaux du choix du tracé logarithmique apparaissent clairement au travers de cet exemple : grâce à ce type de tracé, la courbe possède des droites asymptotes qui n'apparaîtraient pas dans un tracé cartésien classique. Par ailleurs, l'effet lissant de la fonction logarithme permet de considérer que la courbe réelle se trouve « longtemps » très proche de ses asymptotes. Par conséquent, nous pourrions très souvent nous contenter d'un tracé asymptotique du diagramme de BODE de gain, la plupart du temps suffisant pour obtenir une idée assez fine du comportement fréquentiel du système étudié.

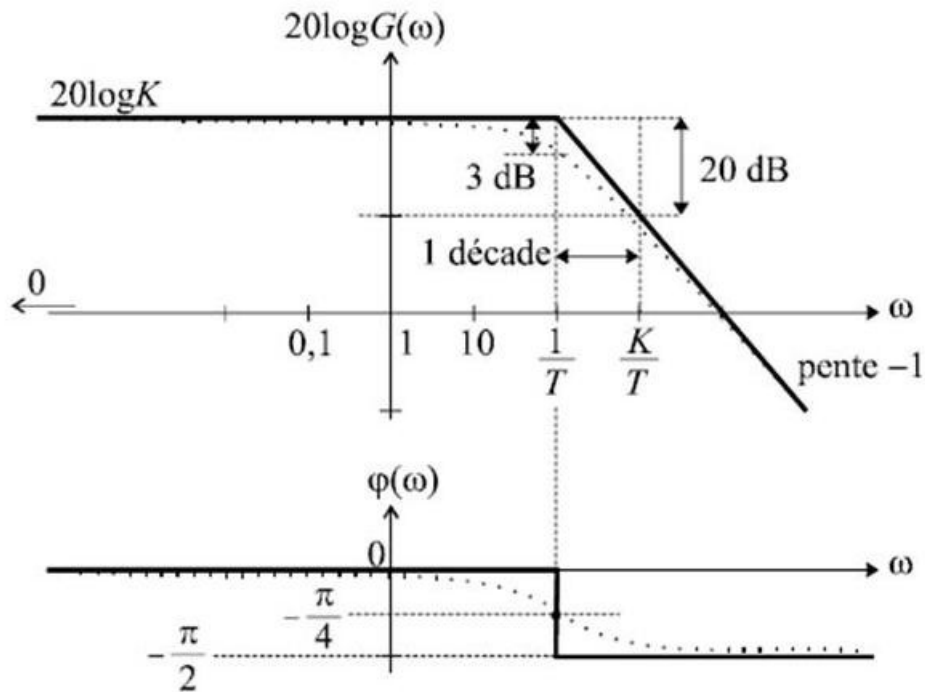


Figure 9.3 Diagramme de BODE d'un système du premier ordre

9-3- APPROCHE MÉTHODIQUE DU TRACÉ DES DIAGRAMMES DE BODE

9.3.1 Objectif

Nous allons tenter de tirer profit des deux intérêts fondamentaux que nous venons de mettre en évidence. L'objectif consiste à acquérir une bonne maîtrise du tracé rapide de n'importe quel diagramme de BODE (gain et phase). Les lignes qui suivent présentent, à partir d'un exemple simple, la méthode à utiliser.

9.3.2 Construction d'un diagramme de gain asymptotique

Considérons, pour l'exemple, un système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{(p+1)(p+100)}{p+10}$$

La fonction de transfert en fréquence de ce système a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega+1)(j\omega+100)}{j\omega+10}$$

d'où :

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2} + \sqrt{100^2 + \omega^2}}{\sqrt{10^2 + \omega^2}}$$

Considérons les équivalents des trois expressions

$$\sqrt{1+\omega^2}; \sqrt{100^2 + \omega^2}; \sqrt{10^2 + \omega^2}$$

$$\omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1+\omega^2} \approx 1; \omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1+\omega^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 10 \Rightarrow \sqrt{10^2 + \omega^2} \approx 10; \omega \gg 10 \Rightarrow \sqrt{10^2 + \omega^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 100 \Rightarrow \sqrt{100^2 + \omega^2} \approx 100; \omega \gg 100 \Rightarrow \sqrt{100^2 + \omega^2} \approx \omega$$

L'idée consiste à déterminer un équivalent asymptotique (approché) de $G(\omega)$ pour chaque intervalle compris entre deux pulsations de coupure.

Rassemblons les résultats précédents dans le tableau 9.1.

ω	0	1	10	100	$+\infty$
$\sqrt{1+\omega^2}$	1	ω	ω	ω	ω
$\sqrt{100^2 + \omega^2}$	100	100	100	ω	ω
$\sqrt{10^2 + \omega^2}$	10	10	ω	ω	ω
$G(\omega)$	10	10ω	100	ω	ω
$20\log G(\omega)$	20dB	$20\text{dB} + 20\log\omega$	40dB	$20\log\omega$	$20\log\omega$
pente	0	20dB/dec	0	20dB/dec	

Tableau 9.4 calcul des équivalents asymptotiques du gain

On réalise alors un diagramme de BODE asymptotique en approximant la courbe entre deux pulsations de coupures, par ses segments asymptotiques calculés dans le tableau (figure 9.4).

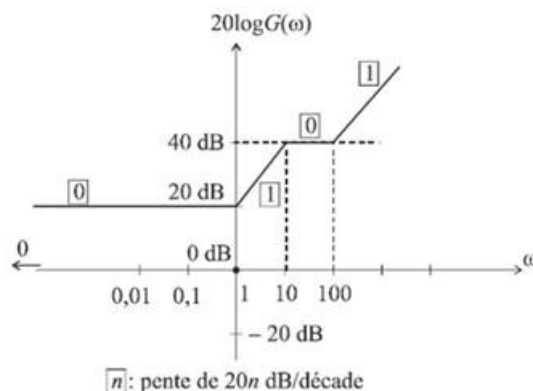


Figure 9.4 Diagramme de BODE de gain du système

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant la pente n de ce dernier par $\pi/2$ (figure 9.5).

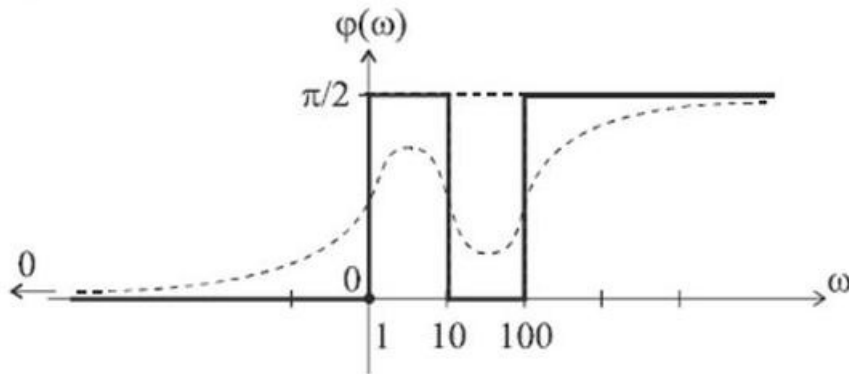


Figure 9.5 Diagramme de BODE de phase du système

Il suffit alors d'un peu d'intuition pour imaginer l'allure de la courbe réelle (en pointillé sur la figure 9.5), ce qui dispense de l'étude complète de la fonction $\varphi(\omega)$. On peut encore affiner le tracé en calculant les extrema relatifs de la fonction. On veillera, lors d'un tracé intuitif, à ne pas tracer la courbe réelle jusqu'aux directions asymptotiques calculées, compte tenu que ces valeurs sont... asymptotiques !

9- 4- DIAGRAMME DE NYQUIST

Le diagramme de BODE constitue un moyen très efficace et facile d'accès pour représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système. Toutefois, il est nécessaire de toujours effectuer deux graphes :

gain et déphasage.

Le diagramme de NYQUIST permet d'obtenir une représentation graphique de ce comportement sur un graphe unique. Plus délicat à tracer, il revêt néanmoins un intérêt primordial en automatique, comme nous le verrons au à propos de l'étude la stabilité des systèmes asservis.

9.4.1 Définition

Le diagramme de NYQUIST, ou lieu de NYQUIST d'un système est le lieu, en coordonnées polaires, des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (figure 9.6).

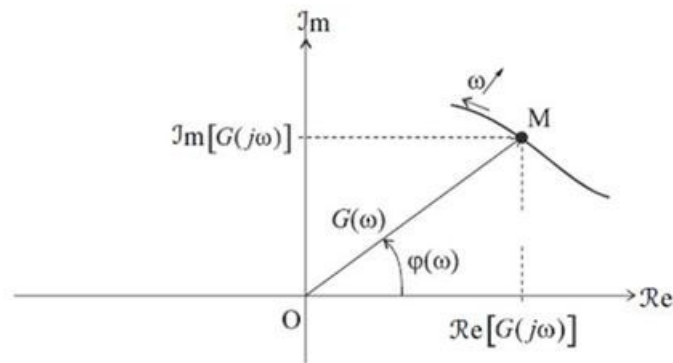


Figure 9.6 Définition du diagramme de NYQUIST

C'est aussi le lieu, dans le plan complexe, des points d'affixe $G(j\omega)$, donc de coordonnées $(\text{Re}[G(j\omega)], \text{Im}[G(j\omega)])$ dans ce plan.

Il est d'usage d'orienter le graphe dans le sens des ω croissants et parfois, de graduer la courbe en ω .

9.4.2.Méthode de tracé rapide

On peut certes, pour tracer le diagramme de NYQUIST d'un système, réaliser l'étude complète en coordonnées polaires du lieu des points M de coordonnées $G(j\omega)$ et $\varphi(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à ∞ , voire même faire cette étude en coordonnées cartésiennes paramétrées $\text{Re}[G(j\omega)]$, $\text{Im}[G(j\omega)]$.

On peut néanmoins réaliser un tracé sommaire d'un lieu de NYQUIST quelconque à partir du diagramme de BODE en reportant dans le plan complexe, du mieux possible et en balayant les axes des pulsations de 0 à $+\infty$, chaque couple de points $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ relevés respectivement sur le diagramme de BODE de gain et sur celui de phase.

prenons un exemple avec :

$$G(p) = \frac{1000(p+1)}{(p+10)^2}$$

Les figures 9.7 et 9.8 représentent le diagramme de BODE en gain et en phase de ce système

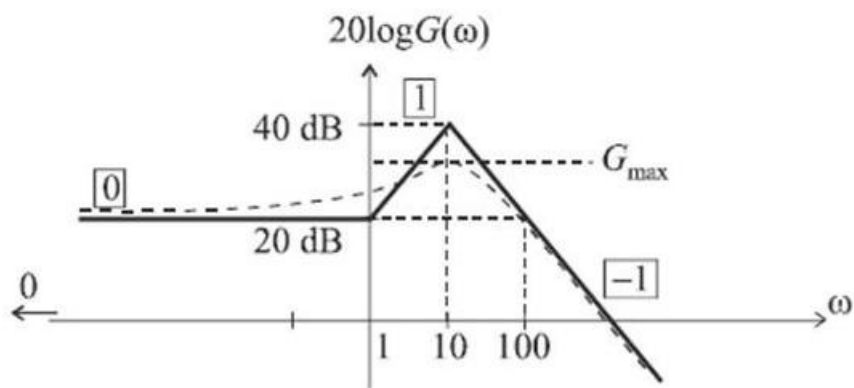


Figure 9.7. : Diagramme de BODE de gain du système

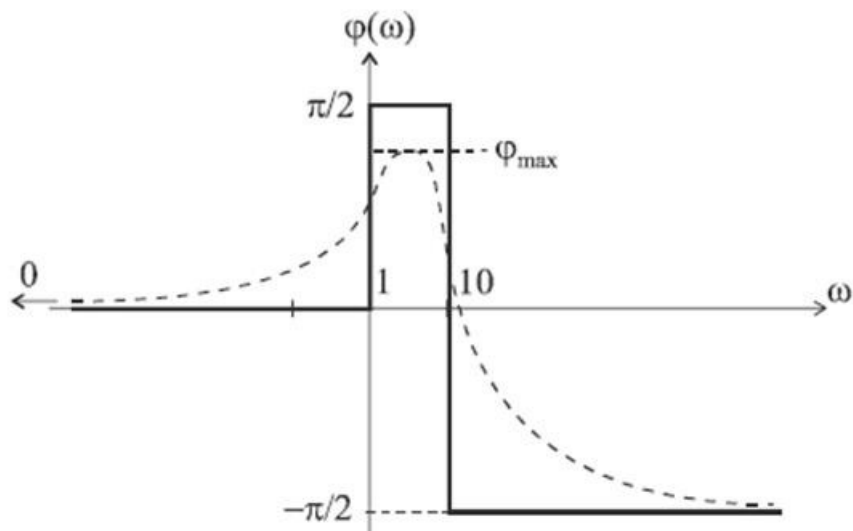
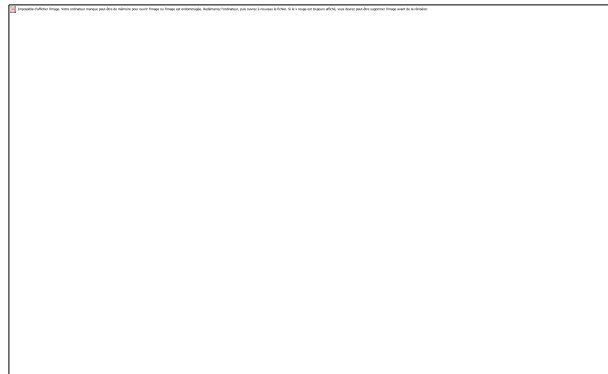


Figure9.8.Diagramme de BODE de phase du système

Nous pouvons déjà tracer ce segment de droite horizontal qui constitue l'équivalent asymptotique considéré comme valable entre les pulsations 0 et 1 ($\omega = 1$ étant la première coupure détectée dans la fonction de transfert).

Le tracé du segment suivant est immédiat (figure 9.7) : le terme en $(p + 1)$ se trouvant au numérateur, la pente du segment s'incrémente d'une unité au passage de la pulsation 1. Le segment ainsi déterminé est valable jusqu'à la coupure suivante $\omega = 10$, pulsation à laquelle la pente de la courbe se décrémente de deux unités étant donné que le terme en $(p + 10)$ est au dénominateur et se trouve élevé au carré. Compte tenu du choix des valeurs des pulsations de coupure, il est facile de positionner les pentes des segments avec précision, la pente d'ordre 1 correspondant à une croissance de 20 dB par décade, celle d'ordre -1 correspondant à une chute de 20 dB par décade.

Le diagramme de phase se déduit des pentes des segments dans le diagramme de gain : la pente d'ordre 0 nous donne une direction asymptotique de phase égale à 0, celle d'ordre 1 correspond à une direction asymptotique de $\pi/2$ et la pente d'ordre -1 correspond à une direction asymptotique de phase égale à $-\pi/2$. On peut, intuitivement, esquisser la courbe réelle (en pointillé sur la figure 9.8). Le tracé réel ne peut bien évidemment se faire de manière précise qu'en calculant des points particuliers (par exemple la valeur maximale $\varphi_{\max}$).

Les figures 9.7 et 9.8 présentent les fonctions $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Nous pouvons déjà placer dans le plan complexe le point de départ du lieu de NYQUIST, en relevant, dans les diagrammes de BODE, les valeurs du gain et du déphasage pour $\omega = 0$.

On a : $G(0) = 10$ et $\varphi(0) = 0$ soit A ce point de départ.

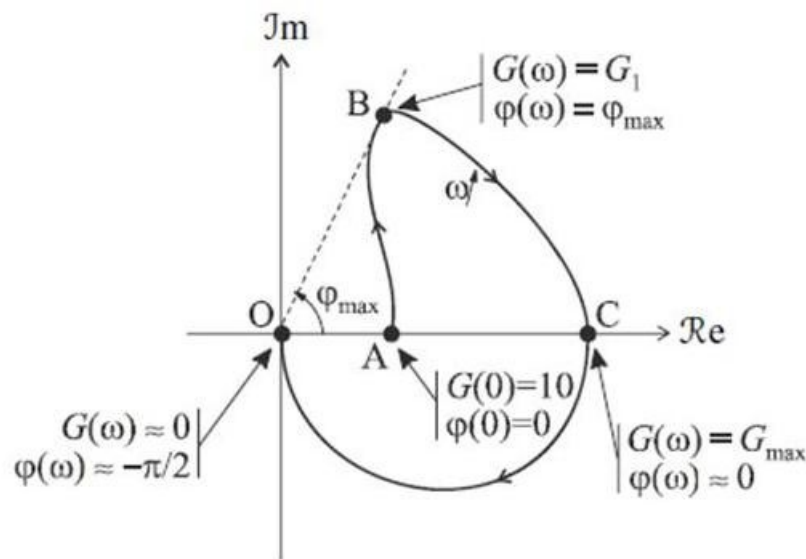


Figure 9.10 Diagramme de NYQUIST du système

Lorsque ω commence à croître, le gain augmente tandis que l'angle $\varphi(\omega)$ croît jusqu'à une valeur $\varphi_{\max}$ (figures 9.7 et 9.8). Cette évolution nous permet d'effectuer (intuitivement quant à la forme) le tracé de la portion AB de la courbe de NYQUIST (figure 9.10).

On remarquera, sur les diagrammes de BODE, que ce maximum de phase ne correspond pas au maximum de gain : le gain continue de croître jusqu'à sa valeur maximale, tandis que $\varphi(\omega)$ se remet à décroître. La valeur maximale $G_{\max}$ du gain est atteinte pour une valeur de $\varphi(\omega)$ visiblement voisine de 0, ce qui nous amène au point C.

Enfin, tandis que le gain décroît de cette valeur maximale jusqu'à 0 ($-\infty$ en décibels), le déphasage continue sa décroissance jusqu'à $-\pi/2$. La dernière portion de courbe nous conduit donc au point O tangentiellement à l'axe des imaginaires puisque $\varphi(\omega)$ tend vers $-\pi/2$.

Remarque : Hormis les diagrammes de BODE et de NYQUIST, il existe d'autres modes de représentation du comportement fréquentiel d'un système linéaire. Nous nous limiterons toutefois à ces deux types de graphe qui constituent les outils qui nous seront nécessaires lorsque nous aborderons l'étude des systèmes asservis.

X-STABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES

11.1 Critère mathématique de stabilité

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

Dans certains cas, notamment celui des systèmes non linéaires, on peut tolérer la présence d'oscillations dans les signaux, du moment qu'elles restent d'amplitudes limitées.

La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la figure 11.1. Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

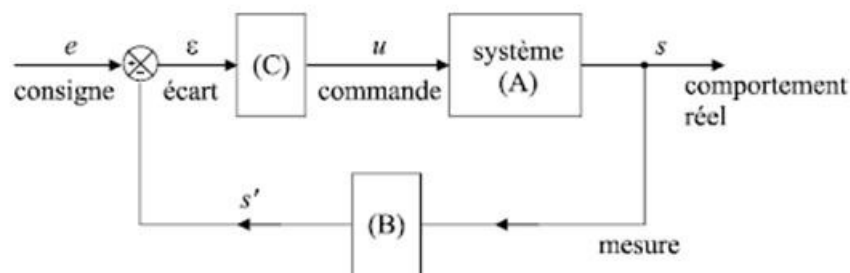


Figure10.1.Schéma général d'une boucle de régulation

Cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , factorisables dans le corps des complexes :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Les p_i sont les n pôles de $H(p)$. Les z_j sont ses m zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels ou complexes.

Si un échelon de consigne unitaire est placé à l'entrée du système, on a :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{p \prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Imaginons une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle et séparons, dans cette décomposition, les termes correspondant à des pôles réels r_i et ceux correspondant à des pôles complexes

$\tau_k + j\omega_k$:

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{(p - r_i)} + \sum_k \frac{b_k}{(p - (\tau_k + j\omega_k))}$$

La transformée inverse de $S(p)$ est :

$$s(t) = au(t) + \sum_i b_i e^{r_i t} + \sum_k b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$$

Cette expression nous montre déjà que la présence d'un pôle réel positif r_i introduit dans le signal de sortie, une exponentielle croissante tendant vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Le système ne peut donc pas être stable s'il existe un pôle réel positif.

10-2-Critère algébrique de Routh

Le critère algébrique de Routh ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît, un ou plusieurs paramètres :

Soit $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée et soit $D(p)$ le dénominateur de $H(p)$. $D(p)$ est un polynôme de degré n :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients a_i dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des n décroissants, alternativement une ligne sur deux. On effectue ensuite

un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
 b_m & & b_{m-1} & & b_{m-2} & b_0 & 0 \\
 \hline
 \frac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} & & \frac{b_m a_{n-5} - a_{n-3} b_{m-2}}{b_m} & & \cdots & &
 \end{array}$$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes.

On complète alors cette troisième ligne, à droite, par des zéros.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
 b_m & & b_{m-1} & & b_{m-2} & b_0 & 0 \\
 \hline
 \frac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} & & \frac{b_m a_{n-5} - a_{n-3} b_{m-2}}{b_m} & & \cdots & &
 \end{array}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ai plus que des 0 sur la ligne.

Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert $H(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.

En conséquence, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

Exemple :

soit $G(p)$ un fonction de transfert d'un un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire définie par :

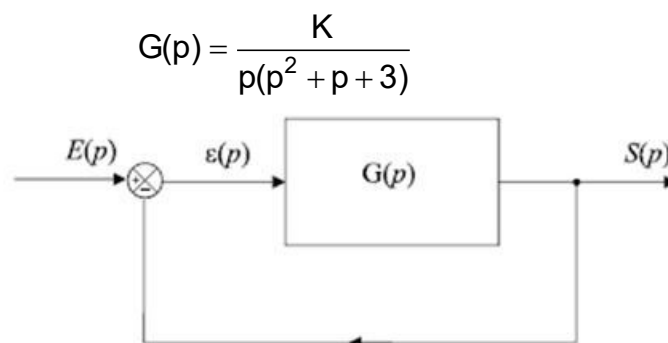


Figure 10.2. Boucle de régulation étudiée

Calculons la fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$:

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{K}{p(p^2+p+3)}}{1+\frac{K}{p(p^2+p+3)}} = \frac{K}{K+p(p^2+p+3)}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = K + p(p^2 + p + 3) = p^3 + p^2 + 3p + K$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

1	3
1	K
3-K	0
K	0

Remarque : Une cinquième ligne ne serait composée que de 0.

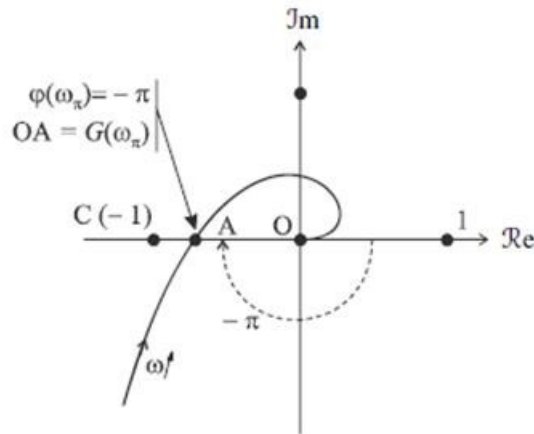
Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc que $3 - K > 0$.

Le système est donc stable si $K < 3$.

10-3-Marges de stabilité

10-3-1-Marge de gain

Considérons le diagramme de NYQUIST d'un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$. Formulons l'hypothèse que cette fonction de transfert en boucle ouverte ne possède que des pôles à partie réelle négative, ce qui nous permet d'appréhender sa stabilité en boucle fermée à l'aide du critère du revers. En vertu de ce critère, le système est stable en boucle fermée si et seulement si son lieu de NYQUIST en boucle ouverte laisse constamment le point critique à sa gauche (figure 11.3).



10.3 Évaluation de la marge de gain

Très intuitivement, le système sera d'autant plus stable, c'est-à-dire, plus sûr, que la courbe « passera » loin du point critique. Une des possibilités, pour chiffrer cet éloignement, consiste à évaluer la distance entre le point critique C et le point A défini comme le point d'intersection de la courbe avec l'axe réel.

Plus la distance CA est importante, plus le système est stable. On pourrait définir la marge de stabilité par cette distance, mais on préfère, en général utiliser la distance OA qui correspond aux coordonnées :

$$\begin{cases} G(\omega) = OA \\ \varphi(\omega) = -\pi \end{cases}$$

Remarque : L'angle formé par l'axe des réels et le segment OA pourrait tout aussi bien valoir $+\pi$.

Toutefois, la plupart des systèmes réels rencontrés dans la pratique présentent en fait des déphasages négatifs. En règle générale, le point de concours entre la courbe de NYQUIST en boucle ouverte et l'axe des réels correspond donc à un déphasage égal à $-\pi$.

Appelons ω_π la pulsation pour laquelle se produit cette intersection

On a : $OA = G(\omega_\pi)$

On définit alors la marge de gain par :

$$\Delta G = -20 \log OA = -20 \log G(\omega_\pi)$$

Cette définition permet de chiffrer une marge gain en décibels d'autant plus importante que le système est stable.

En considérant que l'on a toujours $G(\omega_\pi) < 1$ (car sinon le point A se trouverait à gauche du point C et le système serait donc instable), on a :

$$0 < \Delta G < +\infty$$

Remarque : Il est possible de localiser la mesure de la marge de gain sur le diagramme de BODE. Il suffit de repérer, grâce au diagramme de phase, la pulsation correspondant au déphasage égal à $-\pi$, puis, dans le diagramme de gain, à cette pulsation, de mesurer ΔG , directement en décibels (figure 11.4).

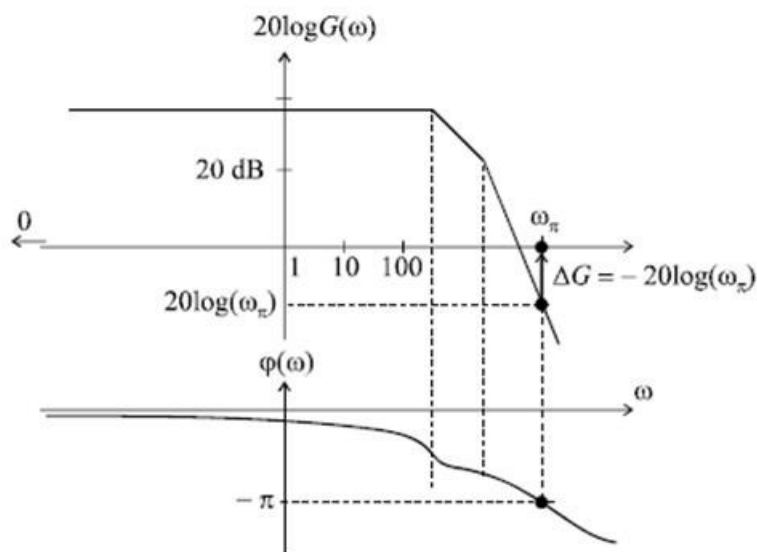


Figure 10.4 Mise en évidence de la marge de gain sur le diagramme de BODE

Exemple

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de gain consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_π , puis à calculer

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi).$$

$$\omega_\pi \text{ est telle que : } \varphi(\omega) = -\pi$$

On a :

$$G(j\omega) = \frac{5}{(\frac{j\omega}{100} + 1)^3}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi \Rightarrow -3 \arctan \frac{\omega}{100} = -\pi \Rightarrow \omega_\pi = 100 \tan \frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3}$$

$$\text{On a alors : } \Delta G = -20 \log G(100\sqrt{3}) = -20 \log \frac{5}{(\sqrt{\frac{(100\sqrt{3})^2}{100^2} + 1})^3} = -20 \log \frac{5}{(\sqrt{3} + 1)^3} = -20 \log \frac{5}{8}$$

$$\text{On a alors : } \Delta G = 4 \text{ dB}$$

10-3-2- Marge de phase

Une marge de gain importante ne garantit pas obligatoirement une excellente stabilité. On peut effectivement observer des systèmes présentant un point d'intersection A entre le lieu de NYQUIST est l'axe des abscisses suffisamment éloigné du point critique C, tout en ayant une courbe qui peut passer au voisinage

de ce point critique. La figure 11.5 en est une illustration. Dans ce cas de figure, un modèle trop imprécis ou des perturbations de fonctionnement du système peuvent bien évidemment s'avérer dangereux.

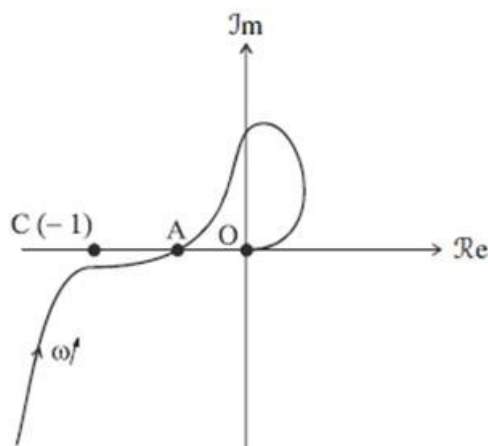


Figure 10.5 Diagramme de NYQUIST

C'est pour cette raison que l'on introduit également la notion de marge de phase qui permet de chiffrer « l'éloignement angulaire » entre le lieu de NYQUIST et le point critique. Considérons, sur la figure 11.6, le diagramme de NYQUIST d'un système stable (le lieu de NYQUIST laisse constamment le point critique C sur sa gauche). Traçons le cercle de rayon 1 passant par O. Ce cercle passe bien sûr par le point critique C. Le point B situé à l'intersection du lieu de NYQUIST et de ce cercle est le point du lieu qui correspond à la pulsation ω_{c0} puisque, par définition, $G(\omega_{c0}) = 1$. En évaluant l'éloignement de ce point B par rapport au point C, nous pouvons à nouveau définir une marge de stabilité. Cette marge, mesurée par l'écart angulaire COB, est appelée marge de phase du système et notée $\Delta\varphi$.

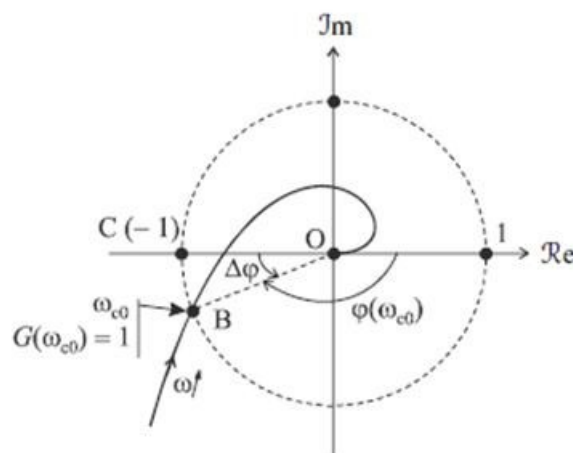


Figure 10.6. Définition de la marge de phase.

Comme : $\varphi(\omega_{c0}) - \Delta\varphi = -\pi$

On a : $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$

Remarque : Il est possible de localiser la mesure de la marge de phase sur le diagramme de BODE. Il suffit de repérer, grâce au diagramme de gain, la position de la pulsation de coupure à 0 dB puis, dans le diagramme de phase, à cette pulsation, de mesurer la marge de phase comme l'écart entre $-\pi$ et le déphasage correspondant (figure 11.7)

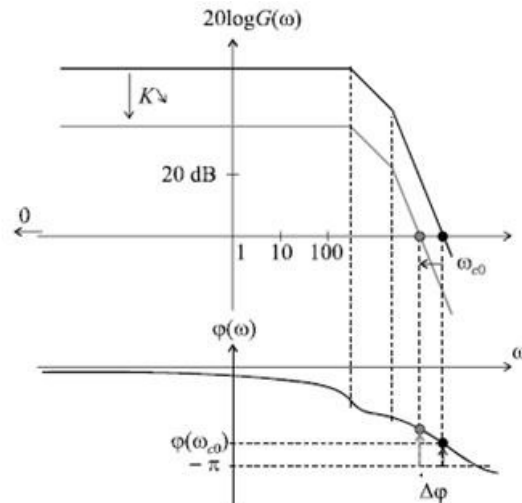


Figure 10.7. Marge de phase mesurée sur le diagramme de Bode

Remarque : En général, la marge de phase est exprimée en degrés. On considère qu'une marge de phase supérieure à 45° correspond à une bonne stabilité.

Exemple :

Considérons à nouveau le système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de phase consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_{c0} , puis à calculer

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}).$$

ω_{c0} est telle que : $G(j\omega_{c0}) = 1$

On a : $G(j\omega) = \frac{5}{(\frac{j\omega}{100} + 1)^3}$

de plus $G(\omega_{c0}) = \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_{c0}^2}{10^4} + 1}\right)^3} = 1$

donc $\sqrt{\frac{\omega_{c0}^2}{10^4} + 1} = \sqrt[3]{5}$

soit $\omega_{c0}^2 = 10^4 (\sqrt[3]{5} - 1)$

d'où $\omega_{c0} \approx 138 \text{ rad/s}$

Comme $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0 - 3 \arctan \frac{\omega}{100}$

on a : $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \frac{\omega_{c0}}{100} = \pi - 3 \arctan \frac{138}{100} = \pi - 3 \arctan 1.38 = 0.3 \text{ rad}$

d'où $\Delta\varphi = 17^\circ$

Exercice d'application

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+10)^3}; K > 0$$

$$H(p) = \frac{\frac{K}{(p+10)^3}}{1 + \frac{K}{(p+10)^3}} = \frac{K}{(p+10)^3 + K}$$

$$D(p) = p^3 + 30p^2 + 300p + K + 1000$$

$$1 \quad 300$$

$$30 \quad K+1000$$

$$(9000-K-1000)/30$$

$$8000-K > 0$$

$$K < 8000$$

Déterminer la valeur de K qui assure au système une marge de gain égale à 6 dB. Calculer la marge de phase pour cette valeur de K . Tracer les diagrammes de BODE du système en boucle ouverte en y faisant apparaître ces marges.

Calculons ω_π

$$\varphi(\omega_\pi) = -\pi$$

$$\varphi(\omega_\pi) = -\pi = -3 \arctan\left(\frac{\omega_\pi}{10}\right)$$

$$\arctan\frac{\omega_\pi}{10} = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega_\pi = 10 \tan\frac{\pi}{3} = 17.3 \text{ rad/s}$$

$$G(\omega_\pi) = \frac{K}{\left(\sqrt{\omega_\pi^2 + 100}\right)^3} = \frac{K}{\sqrt{400^3}} = \frac{K}{8000} =$$

$$\Delta G = -20 \log \frac{K}{8000} = -20 \log K + 20 \log 8000 = -20 \log K + 78$$

$$-20 \log K + 78 = 6 \Rightarrow -20 \log K = -72 \Rightarrow \log K = \frac{72}{20}$$

$$K = 3981$$

$$G(\omega_{c0}) = 1 = \frac{3981}{\left(\sqrt{\omega_{c0}^2 + 100}\right)^3} = 1 \Rightarrow 3981 = \left(\sqrt{\omega_{c0}^2 + 100}\right)^3 \Rightarrow \sqrt{\omega_{c0}^2 + 100} = \sqrt[3]{3981}$$

$$\omega_{c0} = 12.3 \text{ rad/s}$$

$$\Delta \varphi = \pi + \varphi(12.3) = \pi - 3 \arctan\frac{\omega_{c0}}{10} = 0.48 \text{ rad} = 27^\circ$$

$$\Delta \varphi = 27^\circ$$

XI-PRECISION DES SYSTEMES ASSERVIS

11.1 Position du problème

Le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $s(t)$ une loi déterminée en général par l'entrée $e(t)$.

Un système est jugé par sa stabilité, par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée.

Les sources d'erreur sont à la fois les variations de l'entrée mais aussi les effets des perturbations

On distingue deux types d'erreurs

-L'erreur statique : C'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée.

Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques:

- échelon, on parle alors d'erreur indicielle (statique);
- rampe , erreur de traînage ou erreur de poursuite;
- accélération, erreur en accélération.

L'erreur dynamique : C'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation.

Dans la suite, on supposera que la fonction de transfert en boucle ouverte du système étudié peut être mise sous la forme :

$$(FTBO=O(p)=F(p)R(p) \cdot \text{(retour non unitaire)})$$

$$(FTBO=O(p)=F(p) \text{ (retour unitaire)})$$

La FTBO peut donc s'écrire sous la forme :

$$O(p) = \frac{KN(p)}{p^\alpha D(p)}$$

Avec : $N(0)=1$; $D(0)=1$; $\alpha=\text{classe}$; $\alpha \geq 0$

11.2. Erreur statique

11.2.1. Ecart en régime permanent - erreur statique

a)-Définition,

L'écart en régime permanent est la limite quand t tend vers l'infini de $e(t)-s(t)$.

Un système sera précis si cet écart tend vers 0, c'est à dire que la sortie tend vers la valeur spécifiée de l'entrée.

Remarque: dans le cas d'un retour non unitaire, l'écart se mesure entre $e(t)$ et $m(t)$, avec $m(t)$ mesure de $s(t)$.

Par la suite nous considérons le cas des systèmes à retour unitaire.

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - \frac{O(p)}{1 + O(p)} \cdot E(p)$$

En remplaçant $O(p)$ on obtient :

$$\varepsilon(p) = \left[1 - \frac{\frac{KN(p)}{p^\alpha D(p)}}{1 + \frac{KN(p)}{p^\alpha D(p)}} \right] \cdot E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left[1 - \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \right] \cdot E(p)$$

Donc :

$$\varepsilon(p) = \left[1 - \frac{p^\alpha D(p) + KN(p) - p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \right] \cdot E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left[\frac{KN(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \right] \cdot E(p)$$

Nous supposons pour la suite que le système est stable, donc nous pouvons utiliser le théorème de la valeur finale:

Ici on peut donc écrire pour l'écart :

$$\varepsilon_s = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} E(p)$$

On le voit l'erreur statique dépend de la nature de l'entrée mais aussi de la fonction de transfert en boucle ouverte, Nous allons dans la suite étudier en fonction des entrées types (échelon, rampe, accélération) et de la nature du système l'erreur statique

11.2.2. Réponse à un échelon : Erreur indicielle

L'erreur indicielle est l'erreur entre une entrée en échelon et la sortie du système.

L'entrée est donc de la forme, $e(t) = E_0 u(t)$

Donc :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \frac{E_0}{p}$$

Ce qui donne finalement :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^\alpha}{p^\alpha D(p) + KN(p)}$$

On voit que la précision est fonction de la classe du système

a-Système de classe $\alpha=0$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^0}{p^0 D(p) + KN(p)} = \frac{E_0}{1+K}$$

b-Système de classe $\alpha>0$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0 p^\alpha}{p^\alpha D(p) + KN(p)} = 0$$

11.2.3. Réponse à une rampe : Erreur de poursuite, erreur de traînage

L'écart de poursuite est l'erreur entre la sortie et une entrée de type rampe $e(t)=a.tu(t)$

D'où :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \frac{a}{p^2}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{a.p^{\alpha-2}D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)}$$

En fin :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a.p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}$$

a- système de classe $\alpha = 0$

La FTBO ne possédant pas d'intégration donc :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a.p^{-1}}{D(p) + KN(p)} = \infty$$

Le système n'est pas précis, il n'est pas capable de rejoindre l'entrée souhaitée

b- système de classe $\alpha = 1$

La FTBO possède une intégration

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{pD(p) + KN(p)} = \frac{a}{K}$$

c-système de classe $\alpha > 1$

La FTBO possède plus d'une intégration

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a.p^{\alpha-1}}{p^\alpha D(p) + KN(p)} = 0$$

11.2.4. Réponse à une entrée parabolique : Erreur en accélération

Echelon d'accélération $e(t) = a.t^2 u(t)$ d'où :

$$E(p) = \frac{2a}{p^3}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \frac{2a}{p^3}$$

a- système de classe $\alpha < 2$

$$\varepsilon_s = +\infty$$

b- système de classe $\alpha = 2$

$$\varepsilon_s = \frac{2a}{K}$$

c- système de classe $\alpha > 2$

$$\varepsilon_s = 0$$

11.3. Exercice d'application :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+3)^2}$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire. Déterminer la valeur de K qui assure au système en boucle fermée une erreur de position égale à 5 %.

$$G(p) = \frac{K}{(p+3)^2}$$

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{(p+3)^2 + K}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[1 - \frac{K}{(p+3)^2 + K} \right] = 1 - \frac{K}{9+K}$$

$$1 - \frac{K}{9+K} = 0.05 \Rightarrow 0.95 = \frac{K}{9+K} \Rightarrow K - 0.95K = 0.95 * 9 = 8.55$$

$$8.55 = K - 0.95K \Rightarrow K = \frac{8.55}{0.05} = 171$$

$$D(p) = p^2 + 6p + 9 + K$$

$$1 \quad 9+K$$

$$6 \quad 0$$

$$(54+6K)/6$$

$$54+6K > 0$$

$$K > -9$$

XII-RAPIDITE DES SYSTEMES ASSERVIS

12-1- Définition

Considérons un système peu amorti d'un ordre supérieur à deux (approximé par deux pôles complexes conjugués dominants), soumis à une entrée échelon, dont la réponse est donnée ci-après(Figure11.1.):

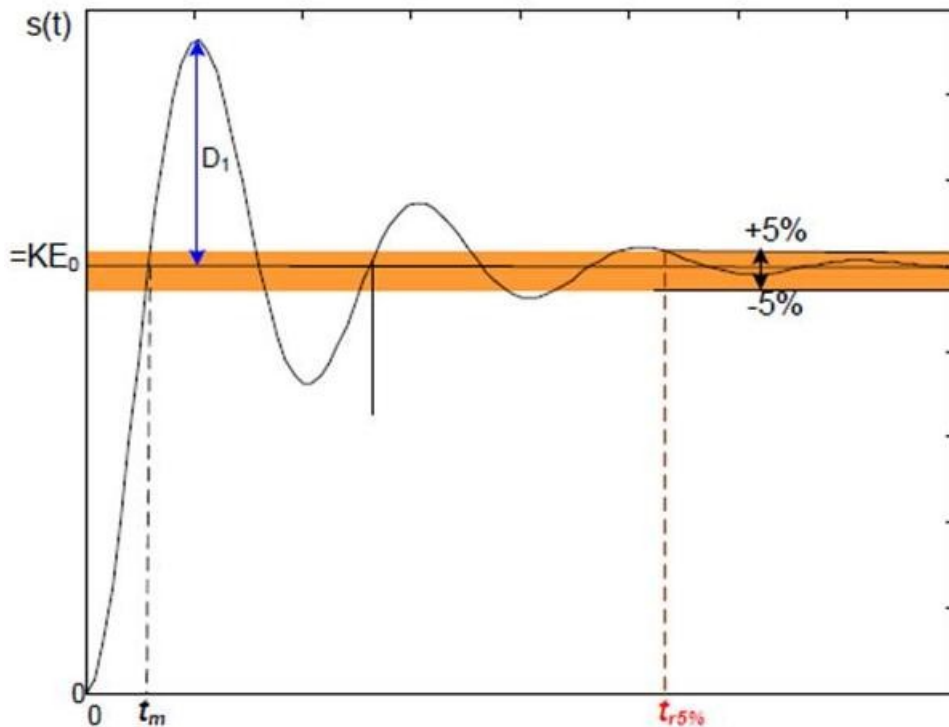


Figure 12.1.: Réponse indicielle d'un système peu amorti

Le temps de réponse à 5% noté $t_{r5\%}$ est défini comme le temps à partir duquel la réponse du système entre définitivement dans la zone des 5% autour de sa valeur finale.

Le temps de montée t_m est le temps au bout duquel la réponse passe pour la première fois à sa valeur finale. Il est défini lorsque le régime transitoire est oscillant.

Généralement ces deux grandeurs sont utilisées pour caractériser la rapidité d'un système.

Plus ces grandeurs sont faibles, plus le système est rapide.

12-2- Bande passante

On appelle bande passante à -3dB (ou à -6dB) d'un système l'ensemble des pulsations pour lesquelles le signal de sortie subit un affaiblissement inférieur à 3dB (ou 6 dB) par rapport à sa valeur pour $\omega=0$.

12-3-Relation entre la bande passante et la rapidité d'un système

Soit un système asservi à retour unitaire de fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$:

$$T(p) \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Sa fonction de transfert en boucle fermée à retour unitaire $F(p)$ vaut :

$$F(p) \frac{T(p)}{1+T(p)} = \frac{N(p)}{N(p)+D(p)} = \frac{\frac{K}{1+\tau p}}{1+\frac{K}{1+\tau p}} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{\tau}{1+K}p}$$

$F(p)$ est une fonction de premier ordre de gain :

$$\frac{K}{1+K}$$

et de constante de temps :

$$\frac{\tau}{1+K}$$

Si l'on trace le diagramme de gain de $F(p)$:

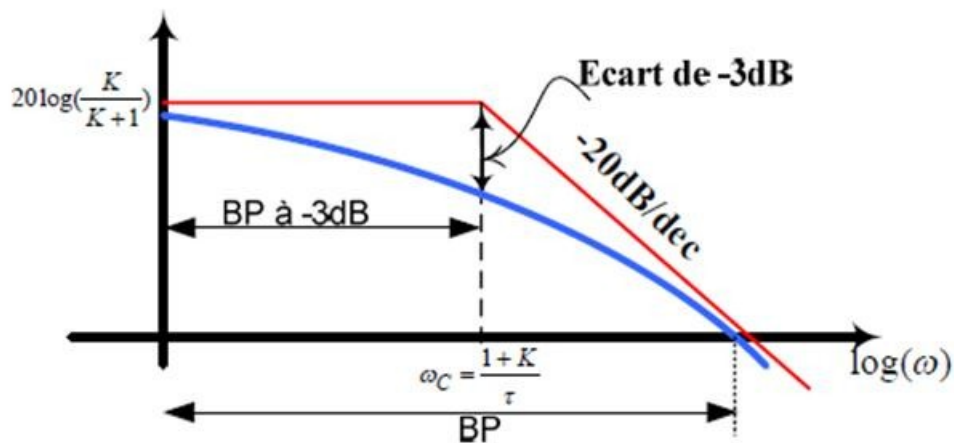


Figure 12.2. Bande passante représentée dans le diagramme de BODE

Dans ce cas, la bande passante à -3dB est l'intervalle :

$$\left[0, \frac{1+K}{\tau}\right]$$

Remarque : La bande passante est définie sur le diagramme de gain de la fonction $F(p)$ et non sur le diagramme de gain de la $T(p)$ utilisée pour l'étude de la stabilité.

Il est alors nécessaire de réaliser un lien entre les bandes passantes de la FTBO et de la FTBF.

D'une manière générale, on montre que la bande passante à -3 dB d'un système en BF peut être approchée par la pulsation de coupure à 0 dB de sa FTBO (si $K \gg 1$).

Dans le cas particulier du système du 1^{er} ordre, plus τ est faible, plus $t_{r5\%} = 3\tau$, le temps de réponse à 5% est faible et donc plus le système est rapide. La réponse harmonique du système du 1^{er} ordre, montre que plus τ est faible, plus la bande passante est élevée. On peut déduire que le système est d'autant plus rapide que la bande passante est élevée. C'est le cas pour tous les autres systèmes physiques.

Exercice d'application :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+3)^2}$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire. Déterminer la valeur de K qui assure au système en boucle fermée une erreur de position égale à 5 %.

12-3-influence du gain statique en boucle ouverte sur les performances en boucle fermée

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ caractérisé par un gain statique variable K

Soit

$$G(p) = \frac{K}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}$$

Nous savons déjà que l'augmentation de K réduit la marge de phase, donc diminue la stabilité du système.

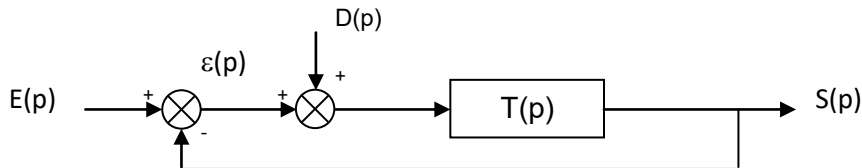
Comme cette augmentation du gain statique aura également pour conséquence la diminution du facteur d'amortissement en boucle fermée, donc l'augmentation du dépassement.

À l'inverse, en diminuant le gain statique, on augmente la stabilité et on limite le dépassement en boucle fermée. Ces deux performances sont donc liées et évoluent positivement dans le même sens lorsque l'on réduit le gain.

Malheureusement, agir sur le gain statique en boucle ouverte influence aussi la rapidité et la précision du système en boucle fermée. En effet, nous savons déjà qu'une bonne précision est liée à un gain statique important. Réduire le gain statique en boucle ouverte contribue donc à rendre le système moins précis en boucle fermée.

XIII-Synthèses des systèmes automatisés :Les correcteurs**XIII-1- Introduction**

Les performances d'un système automatique se traduisent généralement en termes d'écart entre la sortie $y_m(t)$ du système réel et une valeur désirée pour cette sortie appelée consigne $y_c(t)$. Le système doit donc atteindre deux objectifs :



a- Suivi de consignes :

Lorsque la consigne varie, on souhaite que la sortie du système commandé la suive « correctement ». Cet objectif correspond à la maîtrise de la dynamique entre la consigne et la sortie du système commandé. C'est l'objectif **d'asservissement**.

b- Réjection des perturbations :

Dans les spécifications de poursuite, la prise en compte des perturbations $d(t)$ n'apparaît pas clairement. Pourtant on devine que cet effet risque de ne pas être négligeable. C'est la raison pour laquelle on se fixe généralement un objectif supplémentaire appelé objectif de **régulation**. Cet objectif définit l'aptitude du système commandé à rejeter les perturbations.

Chacun de ces deux objectifs va contribuer à définir des spécifications sur le régime permanent (ou statique) et sur le régime transitoire (ou dynamique) du système commandé. Les performances d'un système de commande se jugera donc par :

- ✓ **la qualité de son régime transitoire** : rapidité et amortissement du système.
- ✓ **la qualité de son régime permanent** : erreur de position, erreur de traînage, réponse en fréquence.
- ✓ **sa stabilité**

Le principe est de prendre en compte la sortie dans la commande. Plusieurs paramètres définissent un asservissement :

- 1- **le temps de réponse** : la vitesse à laquelle la valeur finale sera atteinte.
- 2- **la stabilité** : Un système est stable si la sortie tend vers une valeur finie. Si elle oscille, l'asservissement est instable.
- 3- **le dépassement** : Souvent exprimé en pourcent. Même lorsqu'un système est stable, il arrive que la sortie dépasse la consigne avant de se stabiliser.
- 4- **la précision** : c'est à dire la capacité de l'asservissement à atteindre la consigne. On l'appelle l'écart de positionnement à l'infinie.

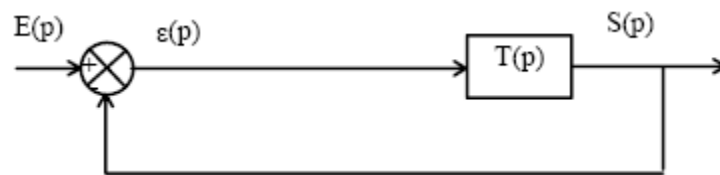
On caractérisera donc les performances d'un système par la manière dont il répond à un certains nombres d'entrées typiques (échelon, rampe, impulsion et sinusoïde). Si ces performances ne satisfont pas au cahier des charges fixé, il sera nécessaire d'ajouter un système de correction permettant de modifier et d'améliorer les performances du système commandé.

Les correcteurs, usuellement utilisés en pratique sont les régulateurs à effet proportionnel, intégral et dérivé (P.I.D.). Les correcteurs P.I.D. permettent d'engendrer à partir de la sortie du

comparateur (c'est-à-dire l'écart existant entre la consigne et la grandeur à réguler) un signal proportionnel à l'erreur et à sa dérivée d'une part, et à son intégrale d'autre part.

XIII-2- schéma général

Nous avons vu que les systèmes asservis pouvaient présenter des défauts, une précision insuffisante, une stabilité trop relative, un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservis un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer ces un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sur le faire au détriment des autres. Soit un système défini par le schéma bloc ci-dessous :



Si l'on souhaite améliorer les caractéristiques de précision stabilité, rapidité du système il est nécessaire d'introduire dans la boucle de commande un correcteur.

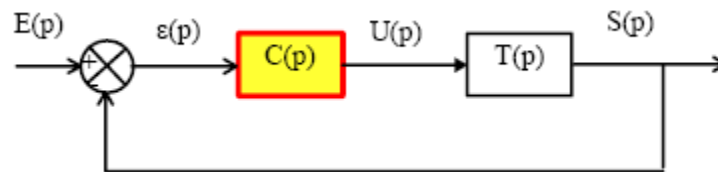


Figure 13.1.insertion d'un correcteur

Les correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié.

XIII-3 Principaux systèmes correcteurs

Il existe trois actions correctives élémentaires qui permettent, individuellement, de corriger telle ou telle performance. Elles sont relativement simples à réaliser mais, en général, dégradent d'autres performances.

Elles sont utilisables lorsque le cahier des charges est peu exigeant. Dans le cas contraire, il faut envisager de combiner ces différentes actions au sein d'un correcteur plus complexe

XIII-3-1-Correcteur proportionnel

1- Définition

Le correcteur est un simple amplificateur de gain réglable de fonction de transfert :

Il a pour mission de modifier le gain statique initial du système. Nous connaissons déjà, pour l'avoir étudiée au chapitre précédent, l'influence du gain statique sur les performances

Si $K < 1$, autrement dit s'il s'agit d'un atténuateur, on améliore la stabilité du système et on diminue son dépassement en boucle fermée. En revanche, la rapidité et la précision sont dégradées.

Ce correcteur élémentaire est le correcteur de base, il agit principalement sur le gain du système asservi, il permet donc améliorer notablement la précision.

Dans le cas d'un correcteur proportionnel, la loi de commande corrigée $u(t)$ est proportionnelle à l'écart $\varepsilon(t)$:

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) \quad U(p) = K_p \varepsilon(p)$$

La fonction de transfert du correcteur est donc :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \text{ donc } C(p) = K_p$$

2- Action du correcteur

Ce correcteur équivaut à une translation de la courbe de module dans le plan de BODE.

Avantages :

- ✓ corrige de manière instantanée, donc rapide.
- ✓ permet de vaincre les grandes inerties du système.
- ✓ augmente le gain.

Inconvénients :

- ✓ amplification sur toute la bande de fréquence.
- ✓ la précision n'est pas importante.
- ✓ « rapproche » le point critique -> instabilité

XIII-3-2- Correcteur intégral

1- Définition

Le correcteur est un intégrateur de fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{1}{p}$$

Il a pour mission d'ajouter un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Nous savons déjà qu'un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte possède un pôle nul sera caractérisé par une erreur de position nulle.

Seule la précision du système est améliorée par l'introduction d'un correcteur à action intégrale. Toutes les autres performances sont diminuées.

XIII-3-3-Correcteur à action dérivée

Le correcteur est un dérivateur de fonction de transfert :

$$C(p) = p$$

qui a pour mission d'ajouter un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Intuitivement, nous

pouvons imaginer que son action est l'inverse de celle de l'intégrateur. Vérifions cela sur un diagramme de BODE.

Le dérivateur aura tendance à accélérer le système en boucle fermée.

XIII-3-4-Inconvénient fondamental des actions correctives élémentaires

Pour une meilleure précision, il faudrait pouvoir augmenter le gain statique uniquement au voisinage des basses fréquences. Pour une meilleure rapidité, il nous faudrait choisir une pulsation de coupure à 0 dB un peu plus grande et pour améliorer la marge de phase, l'idéal serait de pouvoir corriger la courbe de phase uniquement au voisinage de ω_0 ; toutes ces modifications devant, bien sûr, être localisées uniquement dans certaines zones de fréquence. Car telle est l'inconvénient majeur de chacune des actions correctives

élémentaires que nous venons d'étudier : leur action porte sur l'ensemble du spectre de fréquences de 0

à l'infini et toute action corrective menée à un endroit précis pour corriger telle ou telle performance agit

également à d'autres endroits en dégradant certaines autres. Les correcteurs idéaux, s'ils existent, devront être caractérisés par une action localisée en vue de corriger une des performances, sans influencer les autres, chose que ne peuvent pas réaliser des correcteurs simples qui modifient l'ensemble du diagramme de BODE

XIII-3-5- Action proportionnelle intégrale :Correcteur à retard de phase

1- Définition

Le correcteur à retard de phase est un correcteur qui, permet d'augmenter le gain uniquement aux basses fréquences. Il sera donc utilisé pour améliorer la précision d'un système asservi. Sa fonction de transfert est :

$$C(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp}$$

Pour mieux comprendre l'action de ce correcteur, traçons son diagramme de Bode. Il y a deux pulsations de coupure : $1/T$ et $1/aT$, telles que : $1/T > 1/aT$, on a :

$$C(\omega) = \frac{a\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{\sqrt{1 + a^2T^2\omega^2}}$$

et

$$\varphi(\omega) = \arctan T\omega - \arctan aT\omega$$

Lorsque $\omega \rightarrow 0$ $C(\omega) \rightarrow a$

Cet équivalent de pente nulle est valable de 0 jusqu'à la première pulsation de coupure qui a pour expression: $1/aT$. La pente du diagramme de BODE asymptotique se décrémente alors d'une unité et ce nouvel équivalent est valable jusqu'à la seconde pulsation de coupure ($1/T$) à partir de laquelle nous retrouvons une pente nulle (Figure 3.1).

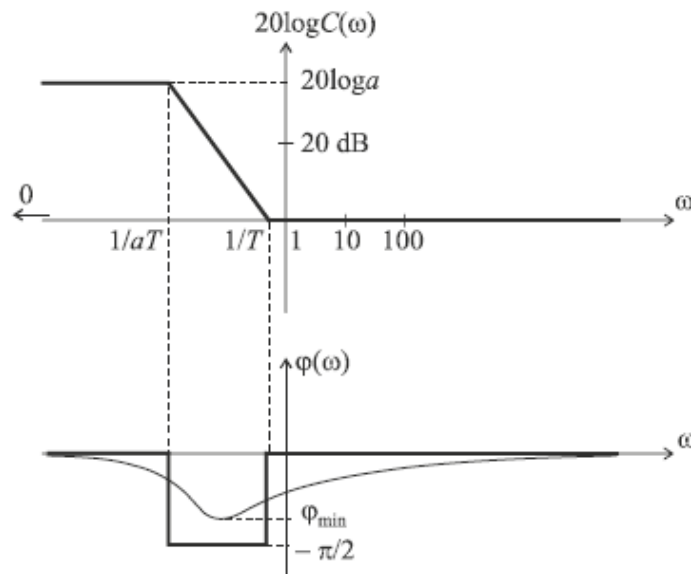


Figure 13.2. Diagramme de Bode d'un correcteur à retard de phase

- Exemple

Considérons un système de fonction de transfert $G(p)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)^3}$$

Le paramètre K , gain statique du système en boucle ouverte est positif et réglable. On souhaite que ce système présente en boucle fermée une erreur de position $\varepsilon_p = 5\%$, tout en ayant une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$.

On commence par régler K pour satisfaire à la condition sur la marge de phase :

Comme :

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)^3}$$

On a :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} = \frac{\pi}{4}$$

Soit : $\omega_{c0} = 10 \text{ rad/s}$

On a donc :

$$G(\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega_{c0}}{10}\right)^3} = 1 \Rightarrow K = \sqrt{2}^3 = 2,8$$

Donc : $K = 2,8$ et $20\log K = 8,9 \text{ dB}$

On a dans ce cas :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{1+2,8} = 0,26$$

$$\varepsilon_p = 26\%$$

La précision constatée ne satisfait pas au cahier des charges. Pour obtenir une erreur de position de 5 %, il est nécessaire de disposer d'un gain statique K' tel que :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1+K'} = 0,05$$

Ce qui donne $K'=19$ et $20\log K'=25,6\text{dB}$

Introduisons un correcteur à retard de phase dans la chaîne directe(Figure3.2)

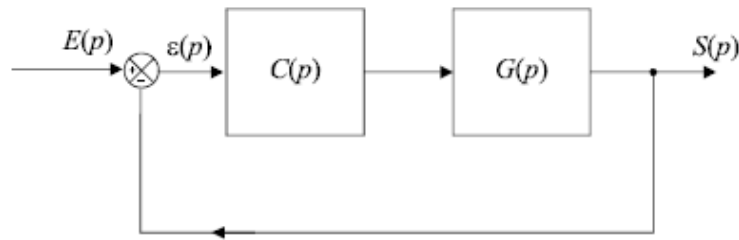


Figure 13.3. Introduction d'un correcteur à retard de phase dans la chaîne directe

On a :

$$C(p) = \frac{a(1+Tp)}{1+aTp}$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G_c(p)G(p)C(p) = \frac{a(1+Tp)}{1+aTp} \frac{2,8}{\left(1+\frac{p}{10}\right)^3}$$

Le nouveau gain statique est : $K' = 2,8a$.

Par conséquent, il est nécessaire de régler le paramètre a de sorte que :

$$2,8a = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{2,8} = 6,8$$

On a : $a=6,8 \Rightarrow 20\log a = 16,7\text{dB}$

Il suffit, pour finir, de choisir T de manière à ce que $1/T$ soit très inférieur à la pulsation de coupure à 0 dB.

Nous pouvons prendre, par exemple, $T = 10$ s.

On a finalement :

$$C(p) = 6,8 \frac{1+10p}{1+68p}$$

XIII-3-6-Action proportionnelle dérivée : Correcteur à avance de phase

1-Définition

Le correcteur à avance de phase est un correcteur qui, comme son nom l'indique, permet d'augmenter la marge de phase d'un système. Il s'agit de compenser un trop faible déphasage autour de la pulsation de coupure à 0 dB

Le correcteur Intégrateur est en général associé au correcteur proportionnel et la loi de commande corrigée est de la forme :

$$C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp} \quad a > 1$$

Pour mieux comprendre l'action de ce correcteur, traçons son diagramme de BODE. Il y a deux pulsations de coupure : $1/T$ et $1/aT$, avec : $1/T > 1/aT$

On a :

$$C(\omega) = \frac{\sqrt{1+a^2T^2\omega^2}}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

Et

$$\Delta\varphi = \arctan aT\omega - \arctan T\omega$$

Lorsque $\omega \rightarrow 0$ on a $C(\omega) \rightarrow 1$

Cet équivalent de pente nulle est valable de 0 jusqu'à la première pulsation de coupure qui a pour expression: $1/aT$. La pente du diagramme de BODE asymptotique s'incrémente alors d'une unité et ce nouvel équivalent est valable jusqu'à la seconde pulsation de coupure ($1/T$) à partir de laquelle nous retrouvons une pente nulle (figure 3.4.).

Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, on a $20\log C(\omega) \rightarrow 20\log a$

L'intérêt de ce correcteur est visible sur son diagramme de phase : à la pulsation $\omega_{\text{Max}} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ le

déphasage présente un maximum que nous pouvons facilement calculer :

$$\varphi_{\text{Max}} = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$$

Le principe de l'action correctrice consiste à faire coïncider ω_{max} avec la pulsation de coupure à 0 dB ω_{c0} du système à corriger et à régler ω_{max} , que l'on appelle la remontée de phase, de manière à obtenir la marge de phase voulue.

2- Exemple

Considérons un système de fonction de transfert $G(p)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec : $G(p) = \frac{100}{(p+1)^2}$

On souhaite corriger ce système de manière à ce que sa marge de phase soit égale à 45° . Calculons sa marge de phase avant correction.

On a : $G(\omega_{c0}) = \frac{100}{1+\omega_{c0}^2} = 1 \Rightarrow \omega_{c0} = \sqrt{99} = 9.95 \text{ rad/s}$

$\omega_{c0} = 9.95 \text{ rad/s}$, d'où :

$$\Delta\varphi = \pi - 2\arctan \omega_{c0} = \pi - 2\arctan 9.95 = 0.2 \text{ rad} = 11^\circ$$

La marge de phase est insuffisante. Pour la corriger, nous devons procéder à une remontée de phase de 34°

à la pulsation ω_{c0} . On introduit donc un correcteur à avance de phase que l'on règle de manière à ce que :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} = 9,95 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \varphi_{\max} = 34^\circ = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$$

$$a = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3,54$$

Ou encore $20 \log a = 11 \text{ dB}$

et

$$\frac{1}{T\sqrt{3,54}} = 9,95 \Rightarrow T = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s}$$

Soit :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{0,053} = 18,9 \text{ rad/s}; \quad \frac{1}{aT} = \frac{1}{3,54 \cdot 0,053} = 5,3 \text{ rad/s}$$

Finalement :

$$C(p) = \frac{1 + 0,19p}{1 + 0,0053p}$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est : $G_c(p) = C(p)G(p) = \frac{1 + 0,19p}{1 + 0,0053p} \frac{100}{(1+p)^2}$

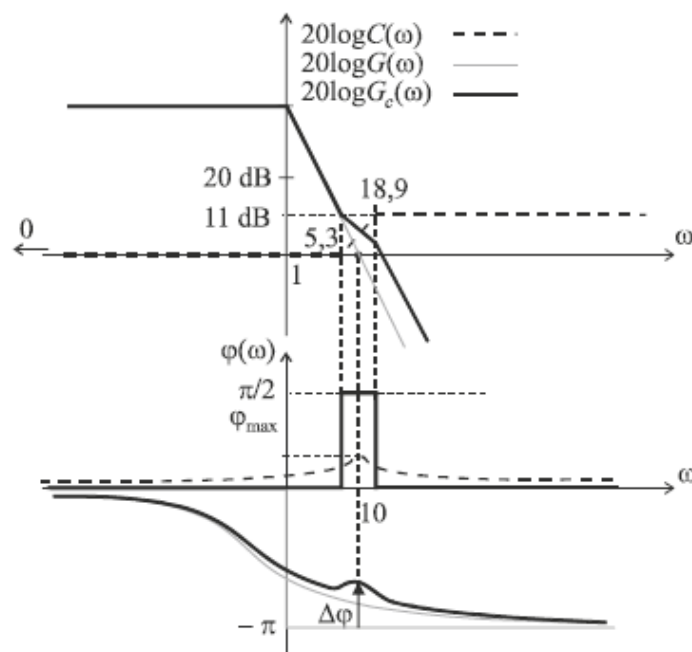


Figure13.4. Diagramme de BODE du système corrigé

XIII-3-7-Stratégie de réglage d'un asservissement

En règle générale, le cahier des charges d'une boucle de régulation impose 4 performances : la précision, matérialisée par une valeur maximale de l'erreur de position : $\varepsilon_p < \text{seuil}$, la rapidité, matérialisée par une valeur maximale du temps de montée : $t_m < \text{seuil}$, la marge de stabilité, matérialisée par une valeur minimale de la marge de phase : $\Delta\varphi < \text{seuil}$, la limitation du dépassement : $d \% < \text{seuil}$, ce qui se traduit par une valeur minimale du coefficient d'amortissement en boucle fermée, donc, étant donné que $\zeta_{BF} \approx \Delta\varphi^\circ/100$ par une valeur minimale de la marge de phase. Entre cette valeur et celle dictée précédemment, on prend bien sûr la plus élevée.

Une des méthodes les plus intéressantes pour régler le système de sorte qu'il satisfasse au cahier des charges est la suivante :

On commence par corriger la précision et la rapidité, soit en réglant le gain statique, soit en ajoutant un correcteur proportionnel. Si la précision parfaite est exigée, on introduit un intégrateur et on règle ensuite la rapidité.

Le réglage de la précision et de la rapidité a pour conséquence une détérioration de la marge de phase. On estime alors la valeur de la marge de phase et on introduit un correcteur à avance de phase qui remonte $\Delta\varphi$ à la valeur voulue.

XIII-3-8- Correcteur proportionnel Intégrateur Dérivateur PID

1- Principe

L'intérêt du correcteur PID est d'intégrer les effets positifs des trois correcteurs précédents. La détermination des coefficients K_p , T_i et T_d du correcteur PID permet d'améliorer à la fois la précision (T_d et K_p) la stabilité (T_d) et la rapidité (T_d , K_p).

Le réglage d'un PID est en général assez complexe, des méthodes pratiques de réglages permettent d'obtenir des bons résultats.

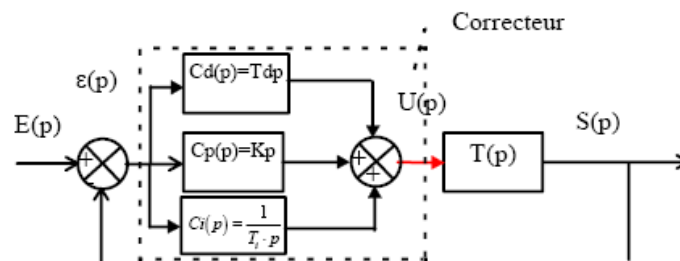


Figure 13.5. Structure d'un correcteur P.I.D

2- Fonction de transfert

$$C(p) = K \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{\tau_i \cdot p} \cdot \frac{1 + a \cdot \tau_d \cdot p}{1 + \frac{\tau_d \cdot p}{a}} \quad \text{avec } K > 0, \tau_d < \tau_i \text{ et } a > 0.$$

3- Action du correcteur

Ce correcteur correspond à la mise en cascade d'un correcteur P.I. suivi d'un correcteur P.D.

Il en résulte qu'il a une action sur toutes les fréquences. En basse fréquence, il a une action intégrale qui permet d'annuler l'erreur statique. Aux moyennes fréquences, il aura aussi un effet stabilisateur (autour de ω_u). Il permet de répondre au compromis *précision* – *rapidité* – *stabilité*.

Avantages :

- ✓ annule l'erreur statique
- ✓ améliore la rapidité du système.
- ✓ améliore la stabilité du système.

4- Effet

On voit sur les diagrammes de BODE que le correcteur P.I.D se comporte pour les basses fréquences comme un intégrateur donc le système sera précis d'un point de vue statique, aux hautes fréquences l'avance de phase est de $+90^\circ$ donc une amélioration de la stabilité.

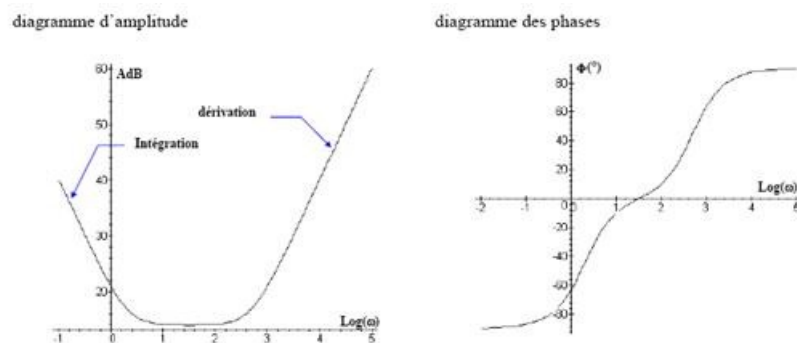


Figure 13.6 Diagrammes de BODE d'un correcteur P.I.D

5- Réglage du correcteur P.I.D

L'objectif du réglage est de placer le correcteur de telle sorte que, autour de la pulsation de résonance du système non corrigé, l'avance de phase soit positive et suffisante pour ne pas rendre le système instable.

Il n'y a pas de réelle méthode analytique permettant de calculer les composantes du correcteur, par contre des méthodes pratiques permettent une évaluation correcte des coefficients du correcteur.

-6- Placement – dimensionnement

Une méthode de placement simple consiste à dimensionner d'abord la cellule P.I. puis la cellule P.D. On fixe la pulsation ω_i dans le domaine des basses fréquences par rapport à ω_d ($\omega_i \ll \omega_d$). On évalue le comportement du système en boucle ouverte avec la cellule P.I. puis on dimensionne la cellule P.D. adéquate.

- 1- Fixer $\omega_d = \omega_u$ et $\omega_i = \frac{\omega_u}{10}$
- 2- Evaluer la phase et la module du système en boucle ouverte avec la cellule P.I.
- 3- Calculer l'avance de phase φ à apporter pour respecter la marge de phase du cahier des charges.

4- Calculer $a = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$

5- Calculer K pour avoir le gain de la boucle ouverte corrigée à ω_u égale à 0 dB.

XIII-3-9- Méthode pratique de réglage d'un correcteur P, P.I ou P.I.D - Méthode de Ziegler Nichols

Les correcteurs PI et P.I.D sont parmi les correcteurs analogiques les plus utilisés. Le problème principal réside dans la détermination des coefficients K_p , T_i , T_d du correcteur. Plusieurs méthodes expérimentales ont été développées pour déterminer ces coefficients.

La méthode développée par Ziegler et Nichols n'est utilisable que si le système étudié supporte les dépassements.

La méthode consiste à augmenter progressivement le gain d'un correcteur proportionnel pur jusqu'à la juste oscillation. On relève alors le gain limite (K_{lim}) correspondant et la pulsation des oscillations ω_{osc} .

À partir des ces valeurs Ziegler et Nichols proposent des valeurs permettant le réglage des correcteurs P, P.I et P.I.D

Correcteur	P	P.I	P.I.D
K_p	$0.5 \cdot K_{lim}$	$0.45 \cdot K_{lim}$	$0.6 \cdot K_{lim}$
T_i	∞	$0.83 \cdot T_{osc}$	$0.5 \cdot T_{osc}$
T_d	0	0	$0.125 \cdot T_{osc}$

XIII-3-10-Exercices d'application**Exercice01 :**

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+8)^2}$$

1-1-Déterminer les conditions de stabilité de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

1-2-Pour annuler l'erreur statique, on introduit un intégrateur dans la chaîne directe. Déterminer les nouvelles conditions de stabilité et conclure.

Exercice02 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+4)}$$

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel $C(p) = K$.

2-1- Calculer la valeur de K qui assure au système une marge de phase égale à 45° .

2-2-Calculer alors la valeur du temps de montée en boucle fermée.

2-3-Déterminer la valeur de K qui assure un temps de montée égale à 0,2 s.

Calculer la nouvelle valeur de la marge de phase. Conclure.

Solution exercice 01

1-1-

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+8)^2}$$

$$H(p) = \frac{K}{(p+1)(p+8)^2 + K} = \frac{K}{p^3 + 17p^2 + 80p + 64 + K}$$

$$D(p) = p^3 + 17p^2 + 80p + 64 + K$$

Le tableau de Routh :

1	80
17	64+K
$(17 \cdot 80 - 64 \cdot K)/17$	0
64+K	0

Condition de stabilité :

$$1296 - K > 0 \Rightarrow K < 1296$$

1-2-En introduisant un intégrateur on aura :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+8)^2}$$

$$H(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+8)^2 + K} = \frac{K}{p^4 + 17p^3 + 80p^2 + 64p + K}$$

$$D(p) = p^4 + 17p^3 + 80p^2 + 64p + K$$

La table de Routh :

1	80	K
17	64	0
1296/17	K	0
64-0,223K	0	0
K	0	0

Condition de stabilité :

$$64 - 0,223K > 0 \Rightarrow K < 287$$

L'introduction d'un intégrateur pour annuler l'erreur de position réduit considérablement l'intervalle de réglage du gain K , preuve que la correction intégrale dégrade sensiblement la stabilité d'un système.

Solution exercice 02

La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

2-1-

On a :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

$$KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase de 45° on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\tan \left[\arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

$$\Delta = 25 + 16 = 41$$

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1 \Rightarrow K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

La valeur de K qui assure un marge de phase de 45° est K=40,3

2-2- On utilise la fonction approchée :

$$\omega_{c0} \cdot t_m = 3 \Rightarrow t_m = \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Le temps de montée est donc $t_m=0,53 \text{ s}$

2-3-

$$\omega_{c0} \cdot t_m = 3 \Rightarrow \omega_{c0} = \frac{3}{t_m} = \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1 \Rightarrow K = \sqrt{1 + 15^2} \sqrt{16 + 15^2} = 233,5$$

La valeur de K permettant un temps de montée de 0,2s est K=233,4

ANNEXE 1 :Table des transformées deLaplace

Fonctions temporelles	Transformées de Laplace
$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \frac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$S(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{p+a}$
$s(t) = t e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \frac{a}{p(p+a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a}$	$S(p) = \frac{1}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$S(p) = \frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - at e^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$