ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
MOHAMMEDIA
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

ENSET

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التقني
المحمدية
جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء

Support de cours

Automatique linéaire continue

1ère année FI-GIL

1ère année FI-GMSI

1ère année MRMI

Pr Moulay El houssine ECH-CHHIBAT

Département Génie mécanique

ENSET Mohammedia

Université Hassan II de Casablanca

Adresse : BP 159 Bd Hassan II,
Mohammedia - Maroc
Tél : 0523322220
Fax : 0523322546
Site web : www.enset-media.ac.ma

العنوان : صندوق البريد 159، شارع
الحسن الثاني، المحمدية
الهاتف : **0523322220**
الفاكس : **0523322546**
www.enset-media.ac.ma

Sommaire.

I. Introduction, définitions, position du problème. p. 3

I.1. Introduction. p. 3

I.2. Définitions. p. 5

I.3. Position du problème. p. 6

II. Modélisation des systèmes linéaires. p. 11

II.1. Système du premier ordre. p. 12

II.2. Système du second ordre. p. 21

II.3. Systèmes d'ordre supérieur à 2. p. 31

III. Stabilité des systèmes asservis. p. 33

III.1. Schéma général d'un asservissement. p. 33

III.2. Interprétation géométrique du passage de la boucle ouverte à la boucle fermée. p. 36

III.3. Réponse impulsionnelle d'un système bouclé en régime linéaire. p. 40

III.4. Le critère de Routh-Hurwitz (critère algébrique). p. 41

III.5. Les critères géométriques de stabilité. p. 44

IV. Performances des systèmes asservis. p. 50

IV.1. Précision. p. 50

IV.2. Rapidité des systèmes. p. 56

V. Correction des systèmes asservis. p. 59

V.1. Introduction. p. 59

V.2. Correction proportionnelle et dérivée (P.D.) – Correction à avance de phase. p. 63

V.3. Correction proportionnelle et intégrale (P.I.) – Correction à retard de phase. p. 66

V.4. Correction proportionnelle intégrale et dérivée (P.I.D.). p. 68

V.5. Modèle du second ordre. p. 72

Bibliographie. p. 74

Annexe 1 – Signaux type. p. 75

Annexe 2 – Transformée de Laplace. p. 77

Annexe 3 – Systèmes linéaires du second ordre. p. 80

Annexe 4 – Abaque de Black-Nichols. p. 84

I. Introduction, définitions, position du problème.

I.1. Introduction.

Définition : L'automatique est la discipline scientifique qui étudie les systèmes dynamiques, les signaux et l'information, à des fins de conduite ou de prise de décision.

Pour être compréhensible, cette définition de l'automatique doit être complétée et précisée en définissant les termes : système, dynamique, et conduite.

En automatique, on appelle système l'objet étudié, par exemple, la voiture représentée figure I.1. La définition d'un système est liée aux grandeurs d'entrée et de sortie considérées.

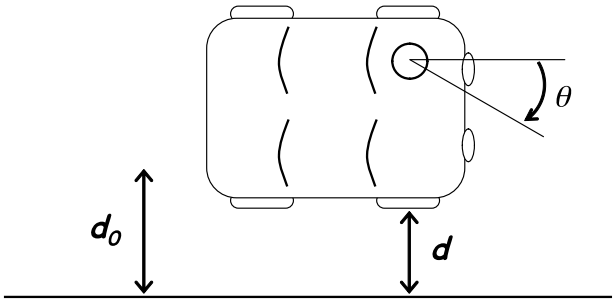


Fig. I.1 – Système constitué d'une voiture.

Dans ce cas, la grandeur de sortie étudiée est la distance d séparant le véhicule du trottoir, et la grandeur d'entrée (ou commande) l'angle de rotation θ du volant. La notion de dynamique est liée à l'évolution des grandeurs étudiées au cours du temps. Cette évolution peut être due à une modification de la commande (l'angle du volant, le conducteur étant distrait ou assoupi) ou à une perturbation extérieure (une rafale de vent, par exemple) entrainant une diminution de d. C'est ici qu'entre en scène l'automatique, en tant que science permettant de maîtriser (ou conduire) le comportement d'un système. Il existe en effet, depuis peu, des dispositifs permettant de corriger automatiquement la trajectoire d'une voiture risquant de mordre sur le bas-côté de la route.

La commande est alors élaborée en fonction de l'écart entre la distance d et une valeur de consigne d_0 (cf. Fig. I.2).

On parle dés lors de **contre-réaction** (ou *feedback*), la contre-réaction permettant de faire évoluer la commande en fonction de son action sur la valeur de sortie du système et également en fonction de la consigne désirée. Elle est utilisée pour optimiser la conduite du système. On dit alors que le système est en **boucle fermée**, par opposition à la **boucle ouverte** qui correspond au cas où la commande est élaborée sans utilisation d'une contre-réaction.

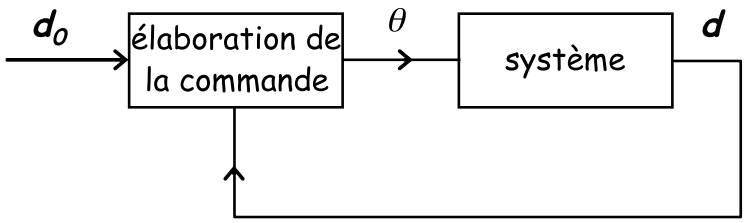


Fig. I.2 – Schéma fonctionnel d'un asservissement en boucle fermée.

La conduite d'une automobile s'effectue bien évidement et naturellement en boucle fermée (il est déconseillé de conduire les yeux fermés).

Domaine d'application.

Le domaine d'application de l'automatique est extrêmement vaste : l'industrie manufacturière, la chimie, la robotique[1], la mécanique, l'électronique, l'aéronautique, l'économétrie, etc.

Objectifs de cours.

L'objectif du cours d'automatique linéaire 1 est l'étude des systèmes linéaires, continus, invariants dans le temps (ces termes étant définis dans la partie suivante). Il s'agit schématiquement de l'*automatique classique* formalisée pendant la première moitié du vingtième siècle.

Pré requis.

Le cours « Mathématique du signal » du premier semestre est un pré requis nécessaire à la compréhension et au suivi du présent cours. En particulier en ce qui concerne :

- les signaux types (Dirac, échelon de Heavyside, etc.),
- le théorème de convolution,
- et le formalisme de Laplace.

I.2. Définitions.

Cette partie rappelle, ou donne, un certain nombre de définitions permettant d'aborder rigoureusement la suite du cours.

Définition 1 : On appelle **modèle** d'un système (ou processus) la **loi** qui relie l'entrée (cause) à la sortie (effet).

Définition 2 : On distingue deux régimes dans le comportement des systèmes :

- le **régime permanent** ou **établi**, caractérisant la réponse stabilisée du système à une entrée quelconque,
- le **régime transitoire**, caractérisant l'évolution de la réponse avant que le régime permanent ne soit atteint.

Le **régime statique** est le régime permanent dans le cas ou l'entrée est constante.

Définition 3 : Un système est **causal** si sa sortie *y(t)* à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée *u(t)* pour $t \leq t_0$ (cf. figure I.3).

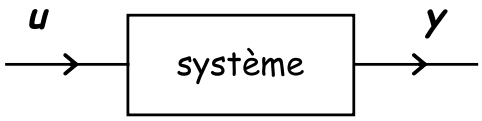


Fig. I.3 – Système.

Un système causal ne répond pas avant d'être excité (système non anticipatif). Les systèmes physiques temporels réalisables sont *causals*.

Un signal *x(t)* est **causal** si $\forall t < 0 \;\; x(t) = 0$.

En pratique un signal temporel est toujours causal, à condition de bien choisir l'origine des temps.

Définition 4 : Un système à **temps invariant** a un modèle identique à tout instant (un retard τ ne change pas la loi du modèle) :

$$u(t) \xrightarrow{système} y(t) \qquad\qquad u(t-\tau) \xrightarrow{système} y(t-\tau)$$

Définition 5 : Un système est dit **instantané** si à un instant donné sa sortie ne dépend que de l'excitation à cet instant : $y(t) = a.u(t)$

Dans tous les autres cas, il est dit, à mémoire ou **dynamique**, par exemple pour : $y(t) = a.u(t-\tau)$

ou : $y(t) = a.u(t) + b.y'(t)$

Définition 6 : Un système est **stable** si et seulement si toute entrée bornée génère une sortie bornée.

Un système physique est stable s'il retourne spontanément vers son état d'équilibre lorsqu'il en est écarté. Il est instable si sa sortie n'a pas de valeur fixe (asymptotiquement) lorsque son entrée est nulle.

Définition 7 : Un système est **linéaire** s'il satisfait au principe de superposition :

$$a.u_1(t) + b.u_2(t) \xrightarrow{syst.\ linéaire} a.y_1(t) + b.y_2(t)$$

Ce cours traite des systèmes causals, linéaires et à temps invariant : les S.L.T.I. Les systèmes étudiés sont analogiques, leurs signaux d'entrée et de sortie sont continus à la fois en temps et en amplitude.
La relation qui lie leur entrée et leur sortie[2] est dès lors une **équation différentielle linéaire à coefficients constants**.

I.3. Position du problème.

a – La commande automatique ou comment remplacer l'homme.

La finalité de l'automatique, telle que nous venons de la définir, est de *remplacer* l'homme ou de suppléer à ses limites dans la conduite d'un système (cf. figure I.4 si l'on revient à l'exemple de la partie I.1 concernant une automobile).
La problématique se réduit dès lors à l'étude et à la modélisation du système considéré dans le but d'élaborer une commande automatique.

[2] Au singulier, on se limitera en effet à l'étude des systèmes monovariables, c'est-à-dire ayant une entrée et une sortie.

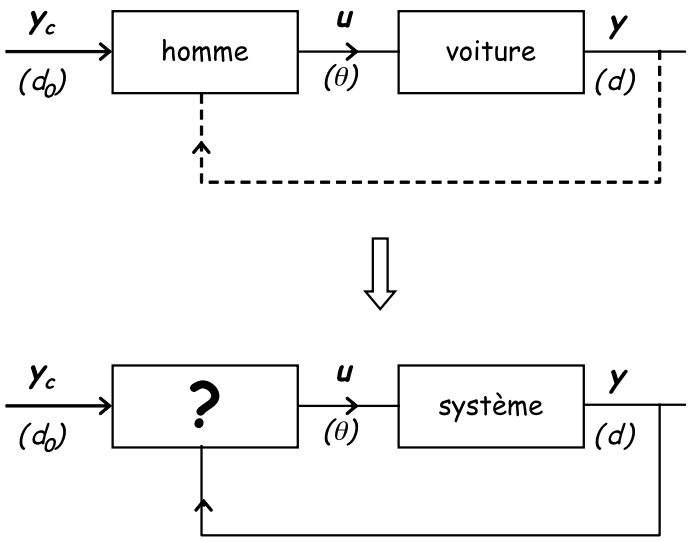


Fig. I.4 – Remplacer l'homme.

Pour se faire, l'utilisation d'une rétroaction est nécessaire. Le système est placé en boucle fermée, ce qui introduit les notions d'asservissement (lors de la poursuite d'une consigne variable) et de régulation (concernant la compensation de perturbations[3] externes).
Le paragraphe suivant donne l'exemple de l'asservissement d'un chauffage central individuel.

b – La boucle d'asservissement.

Considérons le système de chauffage central d'un logement représenté figure I.5.

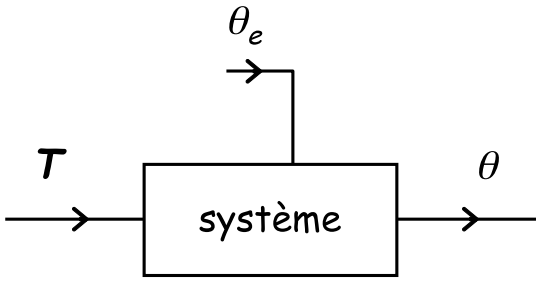


Fig. I.5 – Système de chauffage central.

Avec : θ température intérieure,

T température de l'eau chaude envoyée dans les radiateurs,

θ_e température extérieure (considérée comme une perturbation).

T est réglée par le chauffagiste pour obtenir une température de consigne donnée θ_c = 19°C. Cependant, le réglage est à refaire à chaque variation de θ_e.

[3] On définira comme étant une perturbation une entrée du système imprévisible et/ou sur laquelle on ne peut agir.

Une première tentative de réglage automatique en boucle ouverte est représentée figure I.6.

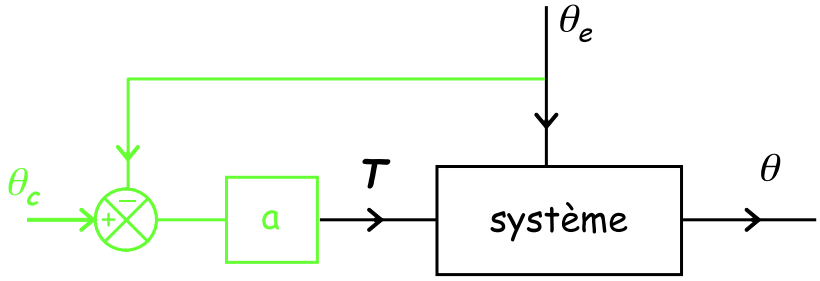


Fig. I.6 – Asservissement en boucle ouverte.

Une sonde est installée afin de mesurer θ_e et la mesure est soustraite à la température souhaitée θ_c (la consigne) pour élaborer la loi de commande fixant la température T de l'eau :

$$T = a.(\theta_c - \theta_e) \qquad a \text{ : constante réglable.}$$

Ainsi, toute évolution de la température extérieure est prise en compte et la température de l'eau du circuit de chauffage ajustée en conséquence. Le savoir-faire du chauffagiste réside alors dans le choix de la constante a, l'ajustement pouvant être fait par essai-erreur.

Cette première approche présente une amélioration notable. Malheureusement, elle n'est pas encore optimale. En effet, lors d'une journée d'hiver ensoleillée (θ_e faible), T va être réglée à une valeur élevée, alors que le soleil entrant par les fenêtres va surchauffer le logement. Les habitants vont alors ouvrir les fenêtres entrainant un gaspillage d'énergie important.

La solution consiste à réaliser un asservissement en boucle fermé (cf. figure I.7) du système de chauffage en exploitant une mesure de la température intérieure θ plutôt que d'essayer d'anticiper l'effet de la température extérieure θ_e sur le système.

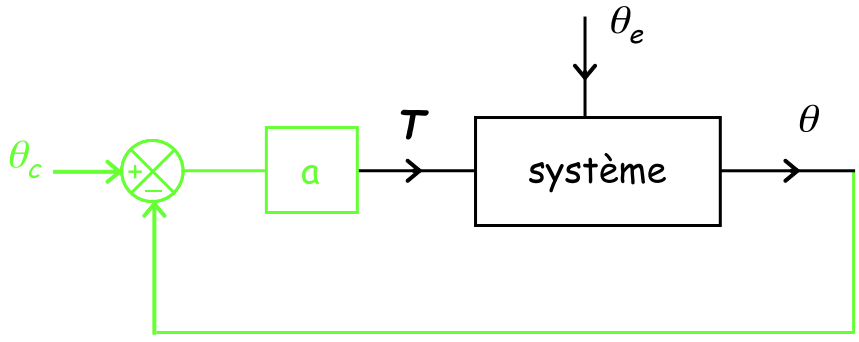


Fig. I.7 – Asservissement en boucle fermée d'un système de chauffage.

Le recours à une loi de commande proportionnelle est alors adapté :

$$T = a.(\theta_c - \theta) \qquad a \text{ : constante réglable.}$$

Réalisé ainsi, l'asservissement est à même de réagir aux variations de la température extérieure et aux changements de la consigne.

La figure I.8 donne une vue plus générale d'un asservissement en boucle fermée.

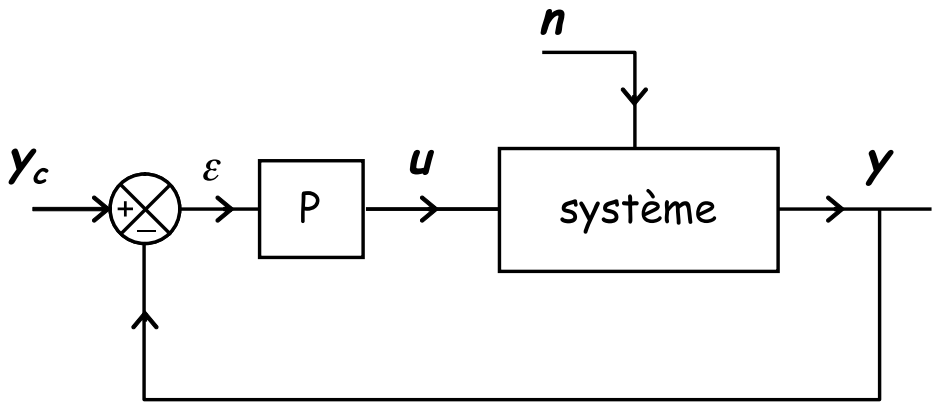


Fig. I.8 – Asservissement en boucle fermée.

Avec :

y_c	consigne,	
y	sortie (ou image de la sortie obtenue par un capteur),	
u	commande ou action,	
ε	erreur ou écart,	tel que $\varepsilon = y_c - y$
n	perturbation extérieure,	
P	système automatique de commande.	

La loi de commande étant $u = P(\varepsilon)$.

c – Qualités d'un asservissement, nécessité de la boucle fermée.

Les principales qualités d'un asservissement sont au nombre de trois : stabilité, précision, et rapidité.

Concernant la stabilité, si on considère une loi de commande proportionnelle telle que :

$u = K.(y_c - y)$ avec K constante

Si K est choisi trop grand, une petite valeur de l'erreur $\varepsilon = y_c - y > 0$ suffira à créer une commande u élevée. La correction apportée pourra alors être telle que la consigne soit dépassée : $y > y_c$, et que la nouvelle erreur, ε', soit telle que $|\varepsilon'| = |y_c - y| > \varepsilon$; entrainant une correction inverse elle aussi disproportionnée. Dans cette hypothèse, il y a apparition d'oscillations divergentes (croissantes), le système devient instable. D'autres sources

potentielles d'instabilité sont le retard à l'exécution des ordres reçus, ou pire l'existence d'une contre réaction positive ($\varepsilon = y_c + y$). La stabilité des systèmes asservis est étudiée au chapitre III.

La précision s'exprime par l'écart ε entre la consigne y_c et la sortie y du système. Dans le cas d'une loi de commande proportionnelle du type $u = K.\varepsilon$, l'obtention d'une bonne précision nécessite d'avoir un gain élevé (en effet pour obtenir une valeur de commande u donnée, K devra être d'autant plus importante que ε sera faible). De même, une perturbation n sera d'autant plus efficacement corrigée (erreur résiduelle faible) que K sera grand.
Or, on a vu qu'un grand K peut être source d'instabilité.
D'où le fait (à mémoriser) que la stabilité et la précision soient des paramètres potentiellement contradictoires.

La troisième qualité essentielle d'un asservissement est sa rapidité. La rapidité d'un processus peut se mesurer par son temps de réponse à un échelon de commande comme défini au IV.2.
Les notions de précision et de rapidité des systèmes font l'objet du chapitre IV.

D'une façon générale, la synthèse d'un asservissement résulte d'un **compromis** stabilité – précision – rapidité.

L'automatisation des processus requiert l'utilisation d'une boucle fermée (rétroaction), celle-ci est nécessaire afin de pouvoir :

- stabiliser un système instable en boucle ouverte,
- compenser des perturbations externes,
- compenser des incertitudes liées au système lui-même (vieillissement, imprécision du modèle, etc.).

II. Modélisation des systèmes linéaires.

La caractéristique **statique** (c'est-à-dire la relation entre l'entrée et la sortie en régime permanent) d'un système linéaire est une droite (cf. figure II.1).

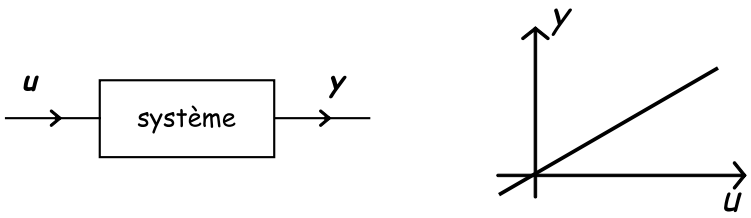


Fig. II.1 – Caractéristique statique d'un système linéaire.

Cela ne doit pas amener de confusion avec le comportement **dynamique** du système en régime transitoire. La figure II.2 représente la réponse en sortie d'un système linéaire à un échelon *u(t)* sur son entrée (on constate bien que le tracer de *y(t)*en fonction de *u(t)* ne serait pas une droite).

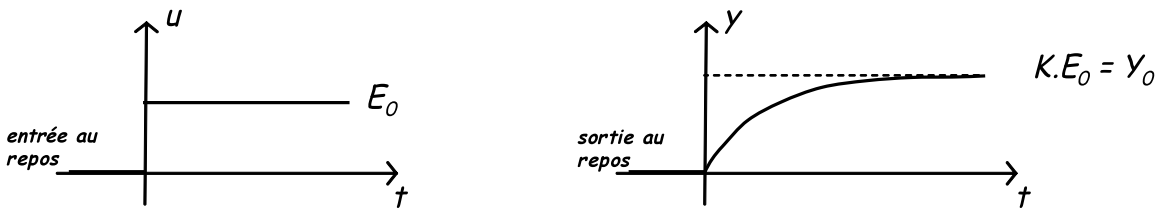


Fig. II.2 – Réponse de la sortie d'un système linéaire à un échelon en entrée.

Nous avons déjà énoncé précédemment que l'équation liant la sortie et l'entrée d'un système linéaire, continu et invariant dans le temps est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette équation traduit aussi bien le comportement dynamique du système que son comportement statique (il suffit pour cela d'annuler les dérivées). Les parties suivantes traitent de la modélisation et du comportement des systèmes du premier ordre, du second ordre et d'ordre supérieur.

Cependant, les systèmes physiques (réels) ne sont pas nécessairement linéaires. Il est néanmoins souvent possible de les étudier avec les outils classiques de l'automatique linéaire après avoir *linéarisé* leur comportement autour d'un point de repos. Cette façon de procéder est familière aux électroniciens, ils l'utilisent par exemple, pour étudier les transistors en amplification ; la figure II.3 donne l'exemple de la linéarisation autour d'un point de repos, $M_0(V_0, I_0)$, d'une diode. Le modèle linéaire obtenu permet d'étudier les variations de i_d et v_d autour de M_0, dès lors que ces grandeurs restent dans le domaine de validité du modèle.

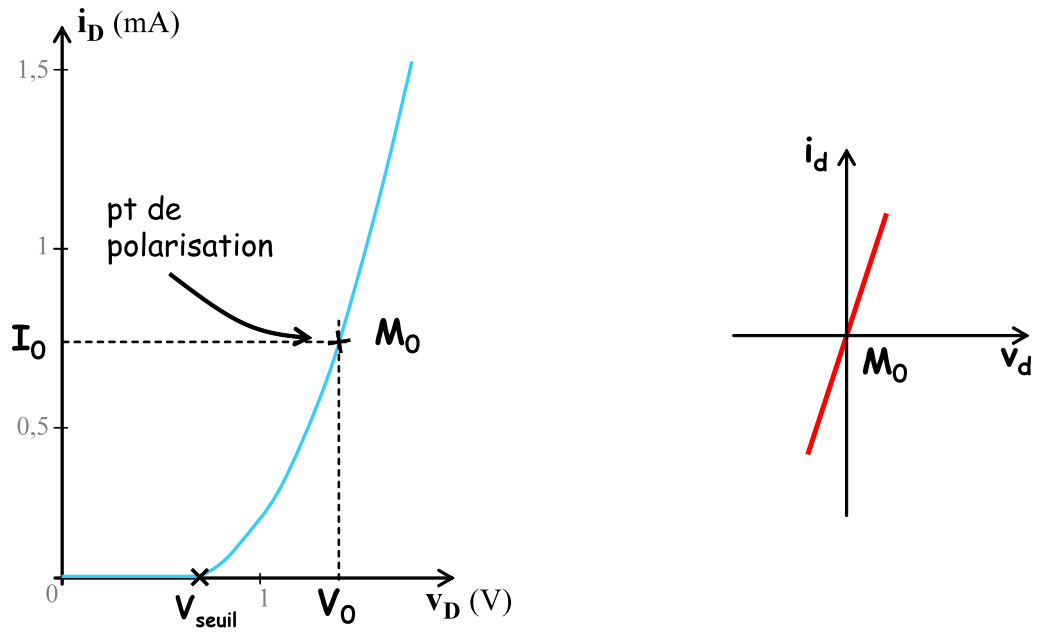


Fig. II.3 – Linéarisation d'un système autour d'un point de repos.

Il y a deux façons d'obtenir le modèle linéaire d'un système :

- par la mise en équation du système à partir de ces lois physiques (équations électriques, mécaniques, etc.),
- ou par identification, le modèle étant déterminé expérimentalement en étudiant la réponse du système à des stimuli classiques.

II.1. Système du premier ordre.

Définition 8 : Un système est dit du 1er ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du 1er ordre.

Exemple : établir l'équation différentielle du circuit RC de la figure II.4.

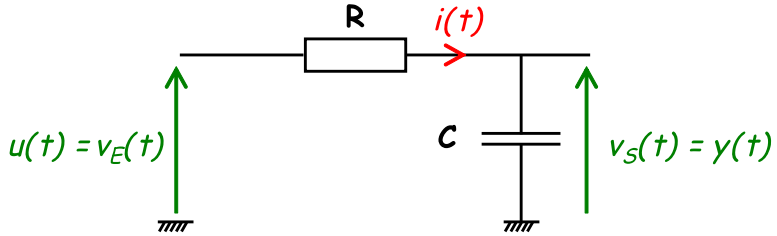


Fig. II.4 – Circuit RC.

Les équations électriques du système sont :

$$v_E = Ri + v_S$$

$$i = C\frac{dv_S}{dt}$$

D'où l'équation différentielle du premier ordre liant l'entrée et la sortie du système :

$$RC\frac{dv_S}{dt} + v_S = v_E$$

La forme générale de l'équation différentielle d'un système du premier ordre d'entrée *u* et de sortie *y* est :

$$\boxed{\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)} \qquad \text{Eq. II.1}$$

Avec :

τ	constante de temps du système,
K	gain statique.

a – Fonction de transfert.

Définition 9 : la **fonction de transfert** (ou transmittance) d'un système linéaire est le rapport entre la transformée de Laplace de sa sortie et celle de son entrée, en considérant des conditions initiales nulles.

Le lecteur trouvera en annexe 2 quelques rappels utiles sur la transformée de Laplace (TL) et les TL usuelles.

Par application de la TL à l'équation II.1 :

$$\tau.\left(p.Y(p) - y(0^-)\right) + Y(p) = K.U(p)$$

soit $$Y(p) = \frac{K}{1+\tau.p}U(p) + \frac{\tau}{1+\tau.p}y(0^-)$$

Ainsi, *Y(p)* dépend non seulement de l'entrée, *U(p)*, mais aussi de la valeur de la condition initiale $y(0^-)$.

On en déduit l'expression de la fonction de transfert, *H(p)*, en considérant $y(0^-) = 0$:

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1+\tau.p}}\ ^{4} \qquad \text{Eq. II.2}$$

[4] Attention *p* est noté *s* dans la littérature scientifique anglo-saxonne.

Rappel : la réponse impulsionnelle (i.e. réponse à un Dirac), *h(t)*, d'un S.L.T.I. vérifie :

$$y(t) = (u * h)(t)$$

Ainsi, comme suggéré par l'équation II.2, pour déterminer la réponse d'un système linéaire (quel que soit son ordre) à une excitation *u(t)*, plutôt que de résoudre l'équation différentielle associée, il est souvent plus simple de passer en représentation de Laplace. Il faut alors calculer la TL de *u(t)* : *U(p)*, la multiplier par H(p) pour obtenir *Y(p)*, puis repasser dans le domaine temporel pour obtenir *y(t)*. La détermination des TL et TL inverses, est facilitée par l'utilisation des tableaux de TL usuelles donnés en annexe 2. Les paragraphes b, c, et d illustrent ce mécanisme.

b – Réponse impulsionnelle.

La détermination en trois étapes de la réponse à une impulsion d'amplitude A_0 d'un système du 1er ordre est illustrée ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} u(t) = A_0\,\delta(t) & & & & \boxed{y(t) = \dfrac{K.A_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}} \quad \text{Eq. II.3} \\ \Downarrow\ {\scriptstyle 1} & & & & \Uparrow\ {\scriptstyle 3} \\ U(p) = A_0 & & \overset{2}{\Rightarrow} & & Y(p) = H(p).U((p) = \dfrac{K.A_0}{1+\tau.p} \end{array}$$

Le tracé de *y(t)* est donné figure II.4 (son allure en $t = 0$ est caractéristique d'un système du 1er ordre).

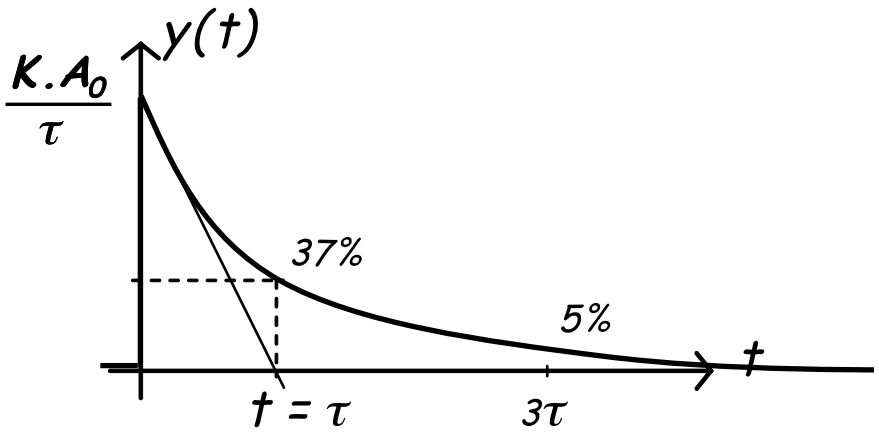


Fig. II.4 – Réponse impulsionnelle d'un système du 1er ordre.

Pour $t = \tau$, la réponse a décru à 37% de sa valeur initiale ; à $t = 3\tau$, elle n'en représente plus que 5%. Sa dérivée à l'origine coupe l'axe des abscisses pour $t = \tau$ (la pente de la tangente à l'origine vaut : $-KA_0/\tau^2$).

c – Réponse indicielle.

La réponse indicielle, c'est-à-dire à un échelon (d'amplitude A_0), d'un système du 1er ordre est (on note $\Gamma(t)$ l'échelon unitaire[5]) :

$$u(t) = A_0.\Gamma(t) \quad \Downarrow 1 \quad U(p) = A_0/p \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad Y(p) = \frac{K.A_0}{p.(1+\tau.p)} \quad \Uparrow 3 \quad \boxed{y(t) = K.A_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)} \qquad \text{Eq. II.4}$$

La réponse indicielle est représentée figure II.5.

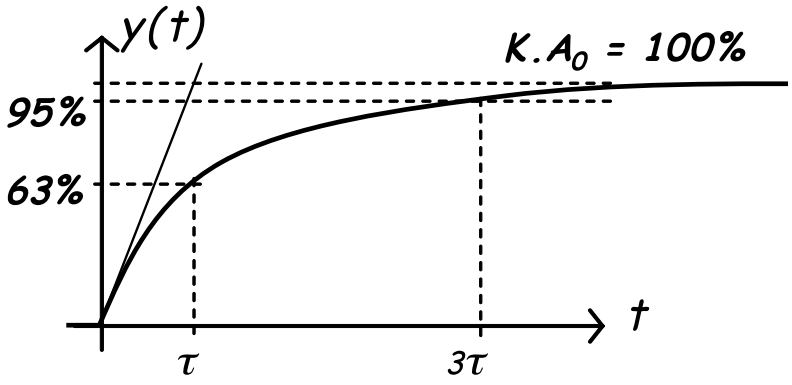


Fig. II.5 – Réponse indicielle d'un système du 1er ordre.

La valeur finale atteinte en régime permanent par $y(t)$ est K fois la valeur de l'entrée (K est le gain statique).

Pour $t = \tau$, $y(\tau)$ atteint 63% de la valeur finale. Le temps de réponse à 5% (le temps au bout duquel $y(t)$ approche la valeur finale à 5% près, et y reste) est $t = 3\tau$.

La tangente à l'origine (cf. Fig. II.5) a une pente de KA_0/τ, on observe effectivement une *cassure* assez nette de $y(t)$ qui est caractéristique de la réponse indicielle d'un système du 1er ordre.

d – Réponse à une rampe.

La réponse à une rampe de pente a d'un système du premier ordre est :

$$u(t) = at.\Gamma(t) \quad \Downarrow 1 \quad U(p) = a/p^2 \quad \overset{2}{\Rightarrow} \quad Y(p) = \frac{K.a}{p^2.(1+\tau.p)} \quad \Uparrow 3 \quad \boxed{y(t) = K.a\left(t-\tau+\tau e^{-t/\tau}\right)} \qquad \text{Eq. II.5}$$

[5] Le lecteur trouvera en annexe 1 quelques rappels sur les signaux type.

Le tracé de la réponse à une rampe est donné figure II.6.

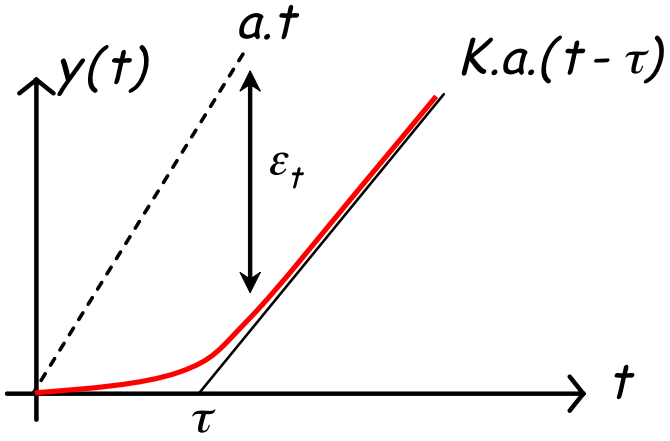


Fig. II.6 – Réponse à une rampe d'un système du 1er ordre.

En régime permanent ($t >> \tau$) on a $y(t) = Ka(t - \tau)$: la sortie tend vers une rampe de pente : Ka.

Pour $K = 1$, $y(t)$ suit la rampe d'entrée avec un retard τ. La différence entre l'entrée et la sortie est appelée erreur de trainage, ε_t, elle vaut $\varepsilon_t = a\tau$.

Pour $K \neq 1$, les pentes étant différentes, ε_t tend vers l'infini (divergence).

e – Réponse harmonique.

La réponse harmonique d'un système est sa réponse à une sinusoïde permanente, $u(t) = U_m.sin(\omega.t)$, le régime transitoire étant éteint.

Rappel : La réponse harmonique d'un système linéaire (quel que soit son ordre) est une sinusoïde de **même pulsation**, d'amplitude Y_m, déphasée d'un angle φ par rapport à l'entrée :

$$y(t) = Y_m.cos(\omega.t + \varphi)$$

Les signaux étant périodiques, l'analyse de la réponse harmonique se fait en complexe ($p = j\omega$), et plus précisément en étudiant H(jω).

Soit :

$$\underline{Y}(j\omega) = \underline{H}(j\omega)\underline{U}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}\underline{U}(j\omega) \qquad \left(\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}\right)$$

qui donne :

$$\begin{cases} Y_m = |\underline{Y}(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\, U_m & \text{(Module)} \\ \varphi = Arg\left(\underline{Y}(j\omega)\right) = -\arctan(\omega\tau) & \text{(Argument)} \end{cases}$$

L'étude des propriétés fréquentielles des systèmes linéaires (c'est-à-dire leur réponse à une action sinusoïdale permanente dont on fait varier la fréquence) permet d'en déduire les propriétés dynamiques temporelles (c'est-à-dire leur évolution dans le temps en fonction des actions subies) comme nous le verrons par la suite. C'est la raison pour laquelle on attache tant d'importance à cette étude.

En général les paramètres étudiés sont le gain et le déphasage :

$$Gain = \frac{Y_m}{U_m} = |\underline{H}(j\omega)| \qquad Déphasage = \varphi = Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$$

que l'on représente sous forme de diagramme de Bode, de Black, ou de Nyquist (cf. ci-après).

Diagramme de Bode.

Le diagramme de Bode d'une fonction de transfert comporte deux courbes :

- son module exprimé en décibels (dB),

$$H_{dB} = 20.log|\underline{H}(j\omega)|$$

- et sa phase (ou argument),

$$Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$$

tracées en fonction de la pulsation ω (axe gradué suivant une échelle logarithmique).

Pour un système linéaire du 1er ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau}$$

On en déduit :

$$H_{dB} = 20.log|\underline{H}(j\omega)| = 20.\log|K| - 20.\log\left|\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\right|$$

$$ArgH = -\arctan(\omega\tau)$$

La pulsation de coupure à *-3 dB*, ω_c, est la pulsation pour laquelle le gain exprimé en dB est inférieur de 3 dB au gain statique (gain pour $\omega = 0$).

Les tracés du gain et de la phase sont donnés figure II.7 en pointillés rouge, pour un axe des abscisses gradué en pulsation réduite ω / ω_c. On trouve $\omega_c = 1/\tau$.

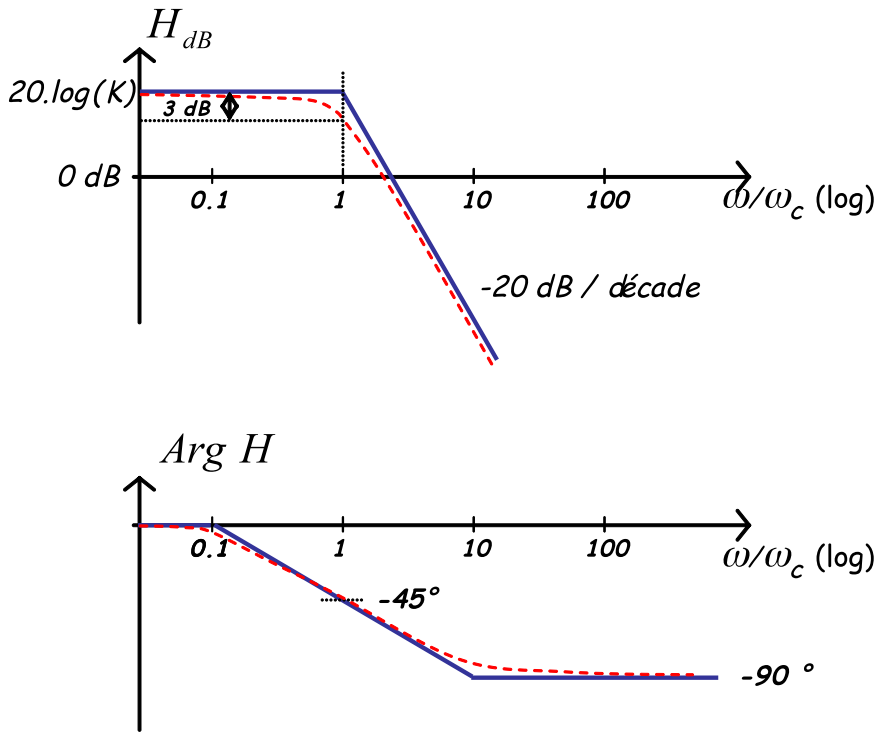


Fig. II.7 – Diagramme de Bode d'un système du 1er ordre.

Le tracé du diagramme de Bode est simplifié par une étude asymptotique préalable (en bleu sur la fig. II.7) :

- pour $\omega << \omega_c$: $\underline{H}(j\omega) \approx K$ soit $H_{dB} = 20.\log|K|$ et $ArgH = 0$

- pour $\omega >> \omega_c$: $\underline{H}(j\omega) \approx \dfrac{K}{j\omega/\omega_c}$ soit $H_{dB} = 20.\log|K.\omega_c| - 20.\log(\omega)$ et $ArgH = -\pi/2$

- pour $\omega = \omega_c$: $H_{dB} = 20.\log|K| - 3$ $ArgH = -\pi/4$

Pour $\omega >> \omega_c$, la décroissance du gain est de -20 dB/décade, c'est-à-dire que le gain diminue de 20 dB chaque fois que la pulsation du signal d'entrée est multipliée par dix ; ce qui correspond également à une décroissance de -6 dB/octave, une octave correspondant à un doublement de la pulsation.

Représentation de Black.

La représentation de Black de $\underline{H}(j\omega)$ consiste à tracer H_{dB} en fonction de $Arg\ H$ en faisant varier la pulsation de zéro à l'infini. Cette représentation permet d'avoir les deux grandeurs caractérisant un système (gain et phase) sur un même graphe.

Une étude asymptotique (cf. Bode) facilite le tracé de la représentation de Black du système linéaire d'ordre 1 de la figure II.8 (la courbe est graduée en pulsation réduite ω / ω_c).

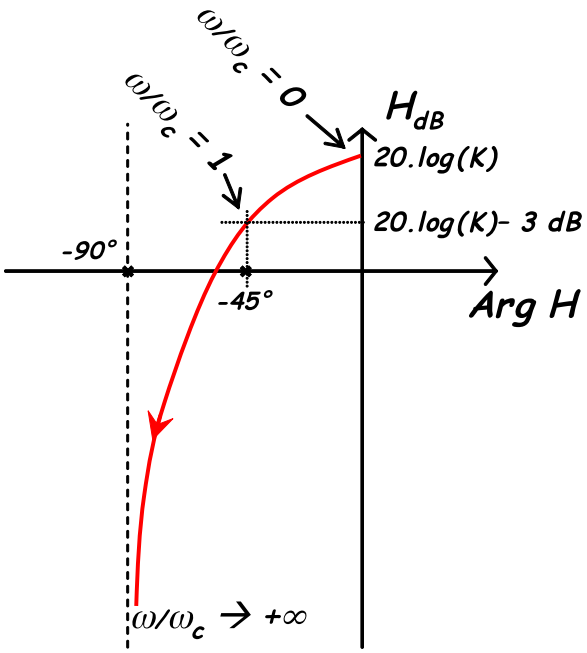


Fig. II.8 – Représentation de Black de la réponse harmonique d'un système du 1er ordre.

Représentation de Nyquist.

La représentation de Nyquist consiste à tracer $\underline{H}(j\omega)$ dans le lieu de Nyquist (c'est-à-dire $Im[\underline{H}(j\omega)]$ en fonction de $Re[\underline{H}(j\omega)]$) en faisant varier la pulsation de zéro à l'infini. Cette représentation permet, comme nous le verrons plus tard, d'étudier rapidement la stabilité d'un système.

La représentation de Nyquist (appelée communément lieu de Nyquist) de la fonction de transfert d'un système du 1er ordre est un demi-cercle (cf. figure II.9) de centre $(K/2,0)$ et de rayon $K/2$.

En effet, on démontre aisément que :

$$\left(\mathrm{Re}\left(\underline{H}(j\omega)\right) - \frac{K}{2}\right)^2 + \mathrm{Im}\left(\underline{H}(j\omega)\right)^2 = \frac{K^2}{4}$$

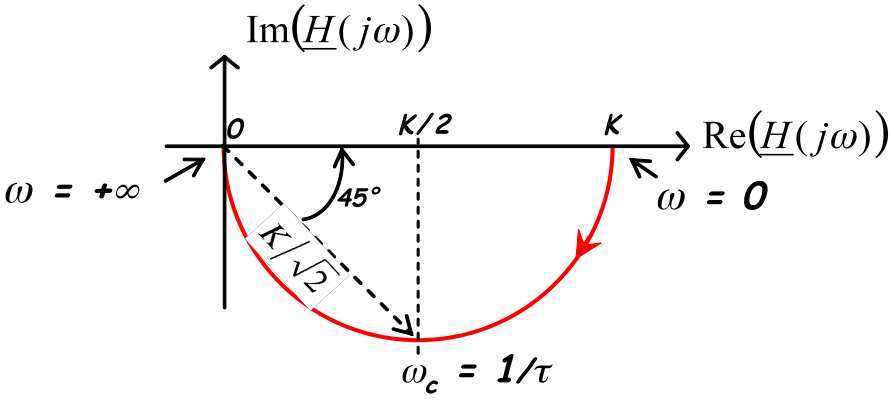


Fig. II.9 - Représentation de Nyquist de la réponse harmonique d'un système du 1er ordre.

A la pulsation de coupure pour $\omega = \omega_c = 1/\tau$:

$$\left|\underline{H}(j\omega)\right| = K/\sqrt{2}$$
$$Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -\pi/4$$

f – Relation temps – fréquence.

La *rapidité* de la réponse d'un système linéaire du 1er ordre est liée à sa fréquence de coupure (c'est-à-dire à sa bande passante, telle que, $f_c = 1/(2\pi\tau)$; d'après $\omega_c = 1/\tau$).

Le *temps de montée*, t_m , d'un système soumis à un échelon étant le temps mis par la sortie pour passer de 10% à 90% de sa valeur finale est une façon d'exprimer cette *rapidité*.

Or on démontre que $t_m = 2{,}2.\tau$

On en déduit que :

$$\boxed{t_m . f_c = 0{,}35} \qquad \text{Eq. II.6}$$

Ainsi plus la bande passante d'un système sera large (f_c élevée) plus il sera rapide (t_m faible), et inversement.

II.2. Système du second ordre.

Définition 10 : Un système est dit du second ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du 2ème ordre.

La forme générale de l'équation différentielle d'un système du deuxième ordre d'entrée *u* et de sortie *y* est (on prendra toujours un second membre indépendant de *u'(t)*) :

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 . \frac{dy(t)}{dt} + {\omega_0}^2 . y(t) = K{\omega_0}^2 . u(t)} \qquad \text{Eq. II.7}$$

Avec :

K	gain statique,
m	coefficient d'amortissement (parfois noté ξ),
ω_0	pulsation propre non amortie.

a – Fonction de transfert.

Par application de la TL à l'équation II.7 (en prenant des conditions initiales nulles) il vient :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}}} \qquad \text{Eq. II.8}$$

b – Réponse indicielle.

La réponse indicielle (à un échelon unitaire), d'un système du 2nd ordre est :

$$u(t) = \Gamma(t)$$
$$\Downarrow 1$$
$$U(p) = 1/p \qquad \overset{2}{\Rightarrow} \qquad Y(p) = \frac{K}{p\left(1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right)} = \frac{K{\omega_0}^2}{p\left(p^2 + 2m\omega_0 p + {\omega_0}^2\right)}$$

La dernière étape de détermination de *y(t)* nécessite l'étude de trois cas en fonction de *m* :

- $m > 1$, régime apériodique.

  Le discriminant réduit de l'équation caractéristique du dénominateur est alors

  $$\Delta = (m^2 - 1){\omega_0}^2 > 0$$

Le dénominateur possède donc deux pôles réels distincts :

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2-1}$$

négatifs (car $p_1 + p_2 = -2m\omega_0 < 0 \quad et \quad p_1.p_2 = \omega_0{}^2 > 0$) tels que :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0{}^2}{p.(p-p_1).(p-p_2)}$$

On cherche alors à exprimer *Y(p)* sous la forme :

$$Y(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p-p_1} + \frac{\gamma}{p-p_2}$$

afin de calculer aisément la TL inverse de *Y(p)*.

On obtient :

$$Y(p) = K.\left[\frac{1}{p} + \frac{p_2}{p_1-p_2}.\frac{1}{p-p_1} + \frac{p_1}{p_2-p_1}.\frac{1}{p-p_2}\right]$$

D'où par TL^{-1} :

$$\boxed{y(t) = K.\left[1 + \frac{p_2}{p_1-p_2}e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2-p_1}e^{p_2 t}\right]} \qquad \text{Eq. II.9}$$

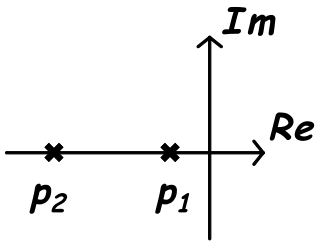
On a :

$\lim_{t\to+\infty} y(t) = K$	($p_{1,2}$ pôles réels négatifs)
$y'(0) = 0$	la tangente à l'origine est nulle

Dans l'hypothèse ou *m >> 1*, on a $p_1 - p_2 = 2\omega_0\sqrt{m^2-1}$ grand en valeur absolue.

C'est-à-dire $|p_1| << |p_2|$ et donc $\left|\frac{p_1}{p_2-p_1}\right| << \left|\frac{p_2}{p_1-p_2}\right|$, ainsi le terme $\frac{p_1}{p_2-p_1}.e^{p_2 t}$ devient très rapidement négligeable devant $\frac{p_2}{p_1-p_2}.e^{p_1 t}$ d'où $y(t) \cong K.\left[1 + \frac{p_2}{p_1-p_2}e^{p_1 t}\right]$ ce qui correspond à la réponse d'un système du 1er ordre.

On parle alors de **pôle dominant**, ici p_1, c'est le pôle qui a le plus d'influence sur le comportement du système (l'influence de p_2 étant comparativement négligeable). Les pôles sont représentés figure II.10, **le pôle dominant est le pôle le plus proche de l'axe imaginaire**.



$$p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1}$$

$$p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1}$$

Fig. II.10 – Lieu des pôles pour *m >> 1*.

A la différence d'un premier ordre le tracé de *y(t)* (en trait plein) est caractérisé par l'absence de cassure à l'origine (*y'(0) = 0*), cependant, très rapidement, il rejoint le tracé du premier ordre (en pointillés) exprimé précédemment (cf. figure II.11).

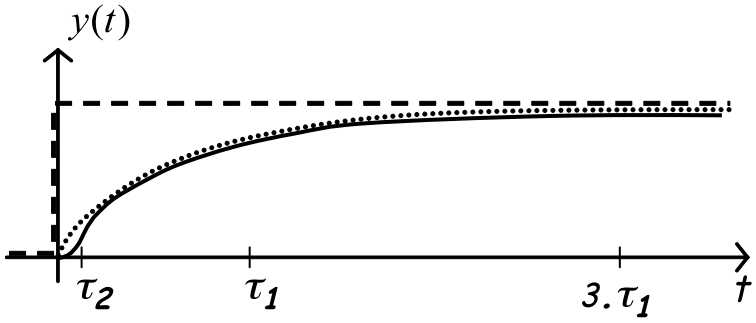


Fig. II.11 – Réponse indicielle d'un 2nd ordre pour *m >> 1*.

Détermination du temps de réponse à 5% pour *m >> 1* :

On a $$y(tr_{5\%}) = \frac{95}{100}.K = K - Ke^{-\frac{\omega_0}{2m}tr_{5\%}}$$

Soit $$tr_{5\%} = \frac{2m}{\omega_0}.\ln 20 \approx \frac{2m}{\omega_0}.3$$

D'où $$\boxed{\frac{tr_{5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \approx \frac{3m}{\pi}}$$ Eq. II.10

- *m = 1*, régime critique.

  Le discriminant réduit de l'équation caractéristique du dénominateur est nul *Δ = 0*, le dénominateur possède donc une racine double réelle $p_1 = p_2 = -\omega_0$ d'où

$$Y(p) = \frac{K{\omega_0}^2}{p.(p+\omega_0)^2} = \frac{K}{p.(1+p/\omega_0)^2}$$

  On en déduit d'après les tables de TL^{-1}

$$\boxed{y(t) = K.\left[1-(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right]}$$ Eq. II.11

L'allure de *y(t)* est similaire à celle obtenue pour le régime apériodique de la figure II.11 (cas limite entre les régimes apériodique et pseudopériodique).

- *m < 1*, régime pseudopériodique.

  Le discriminant réduit de l'équation caractéristique du dénominateur est négatif. Le dénominateur de *Y(p)* possède deux pôles complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2} \qquad \text{tels que } |p_1| = |p_2| = \omega_0$$

  Pour *0 < m < 1*, la transformée inverse de $Y(p) = \dfrac{K{\omega_0}^2}{p\left(p^2 + 2m\omega_0 p + {\omega_0}^2\right)}$ est donnée dans les tables de TL^{-1} :

$$\boxed{y(t) = K.\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\, e^{-m\omega_0 t}.\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-m^2}\,.t + \varphi\right)\right] \qquad \varphi = \arccos(m)} \qquad \text{Eq. II.12}$$

  La figure II.12 présente la réponse en régime pseudopériodique *amorti* (*0 < m < 1*) d'un système linéaire du second ordre pour K = 1, $\omega_0 = 0{,}22$ *rad/s*, et $m = 0{,}18$.

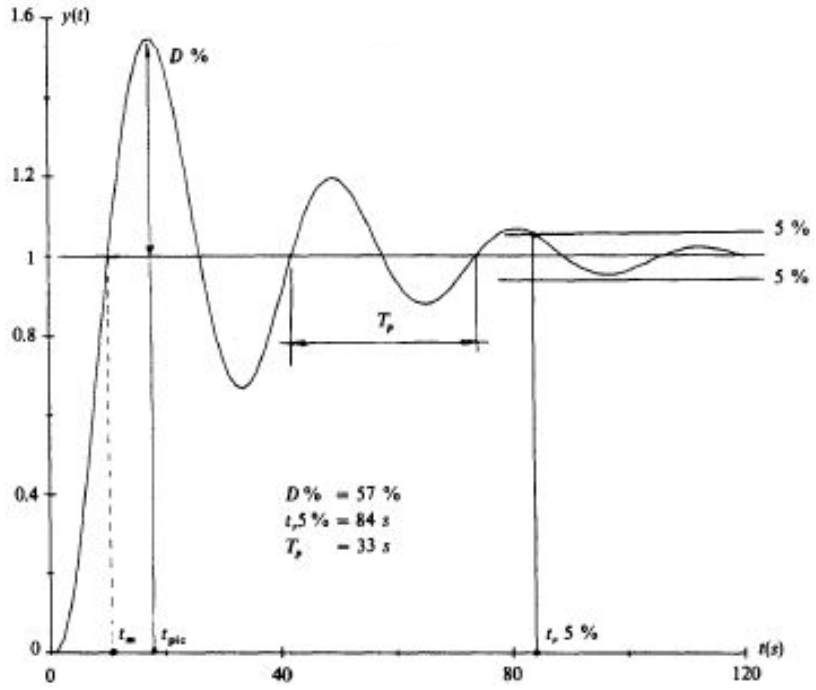


Fig. II.12 – Réponse indicielle d'un système linéaire du 2nd ordre (*0 < m < 1*).

On a :

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = K$: l'erreur statique est nulle.

On note T_p la pseudo période des oscillations amorties :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

(pour $m = 0$, $T_p = T_0 = 2\pi/\omega_0$, d'où le nom de pulsation propre non amortie de ω_0).

Le premier dépassement correspond à :

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} \qquad D_1 = Ke^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

et d'une façon générale

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} \qquad D_k = Ke^{\frac{-mk\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

Le temps de réponse à 5%, $tr_{5\%}$, est donné par l'abaque de la figure II.13. Il est minimal pour $m \cong 0{,}7$ et vaut $tr_{5\%}/2\pi/\omega_0 = 0{,}44$.

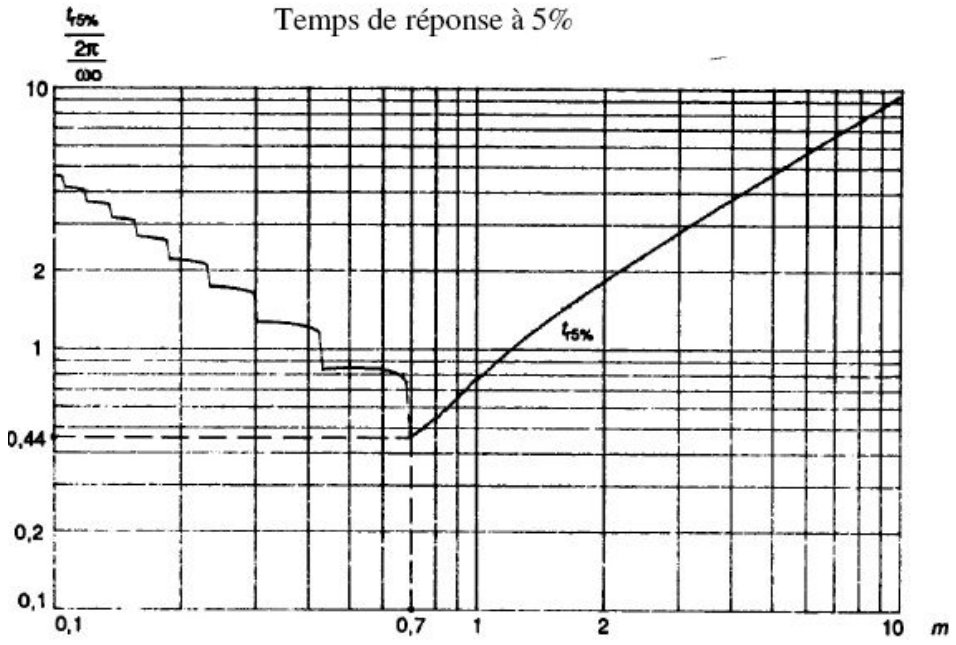


Fig. II.13 – Temps de réponse à 5% d'un système linéaire du 2nd ordre.

Pour m petit on a l'approximation (les oscillations durent longtemps) :

$$tr_{5\%}/2\pi/\omega_0 = 3/2\pi m$$

Pour $m < 0$, un calcul similaire au cas du régime apériodique nous amène à :

$$y(t) = K.\left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2}e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1}e^{p_2 t}\right]$$

Or $Re(p_{1,2}) = -m\omega_0 > 0$ donc

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\mathrm{Re}(p_{1,2}).t} = +\infty$$

Les termes exponentiels divergent, le système est instable.

La figure II.14 donne une synthèse de la réponse indicielle d'un système du second ordre en fonction de son coefficient d'amortissement m. On y retrouve les régimes apériodique, critique et pseudopériodique (stable et instable).

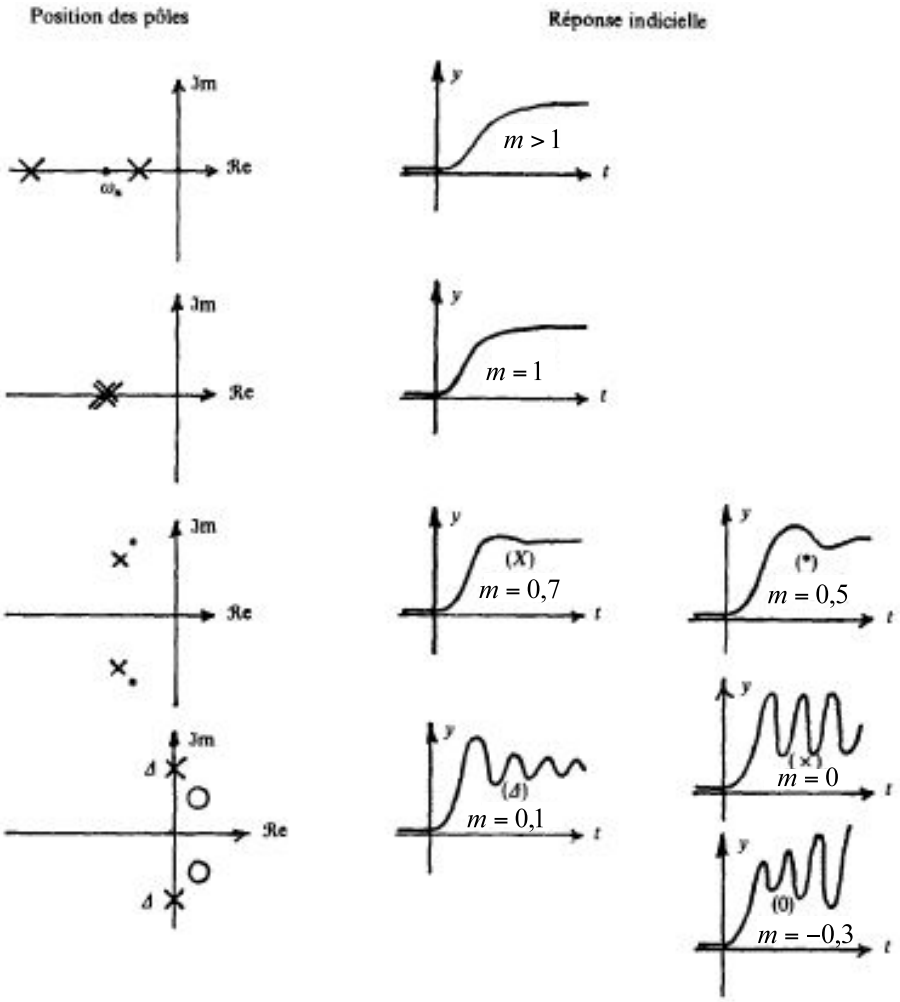


Figure II.14 – Synthèse de la réponse indicielle d'un système du 2nd ordre en fonction de m.

c – Réponse harmonique.

La réponse harmonique d'un système du 2nd ordre est sa réponse à une sinusoïde permanente, $u(t) = U_m.\cos(\omega.t)$, le régime transitoire étant éteint. Partant de l'équation II.8 ($p = j\omega$) on trouve :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad \text{Eq. II.13}$$

Etude asymptotique :

Pour $\omega \to 0$ $\quad \underline{H}(j\omega) = K$ $\quad$ d'où $\quad \left| \begin{array}{l} H_{dB} = 20\log|K| \\ Arg\ H = 0 \end{array} \right.$

Pour $\omega \to +\infty$ $\quad \underline{H}(j\omega) = \dfrac{-K}{\left(\omega/\omega_0\right)^2}$ $\quad$ d'où $\quad \left| \begin{array}{l} H_{dB} = 20\log|K| - 40\log(\omega/\omega_0) \\ \\ Arg\ H = -\pi \end{array} \right.$

La figure II.15 donne le tracé asymptotique de H_{dB} pour $K = 1$. La valeur de m n'a d'influence sur le tracé de H_{dB} qu'au voisinage de ω_0.

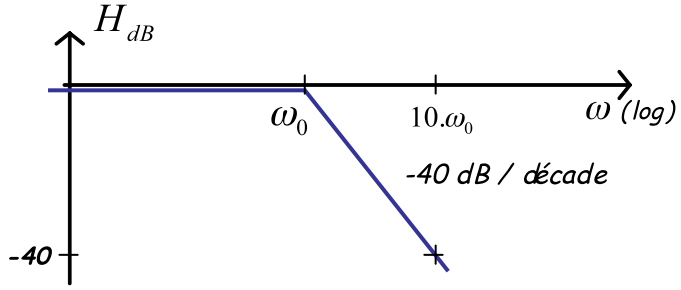


Fig. II.15 – Tracé asymptotique du gain d'un système linéaire du 2nd ordre.

Pour m ≥ 1, le dénominateur de $\underline{H}(j\omega)$ a deux racines réelles positives telles que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + j\omega/\omega_1\right)\left(1 + j\omega/\omega_2\right)}$$

$$\text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \omega_{1,2} = m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \\ \omega_1\omega_2 = \omega_0^{\,2} \end{array} \right.$$

Ce qui conduit au tracé asymptotique de la figure II.16 légèrement modifié autour de ω_0.

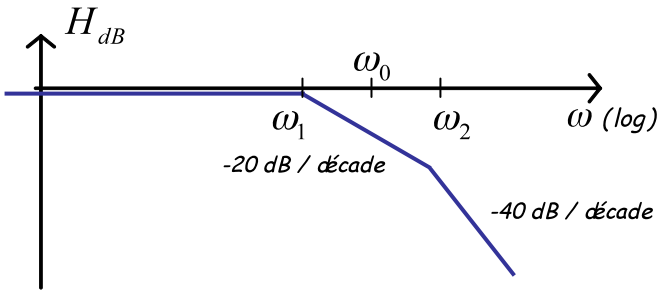


Fig. II.16 – Tracé asymptotique du gain d'un système linéaire du 2nd ordre pour $m \geq 1$.

Pour m < 1, l'étude détaillée du dénominateur de $|\underline{H}(j\omega)| = \dfrac{K}{\left(\left[1-(\omega/\omega_0)^2\right]^2 + 4m^2(\omega/\omega_0)^2\right)^{1/2}}$

met en évidence 2 sous cas :

- pour $0 < m < \sqrt{2}/2$, on constate l'apparition d'un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$ tel que $H_{dB,r} = 20\log\dfrac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$ (cf. figure II.17).

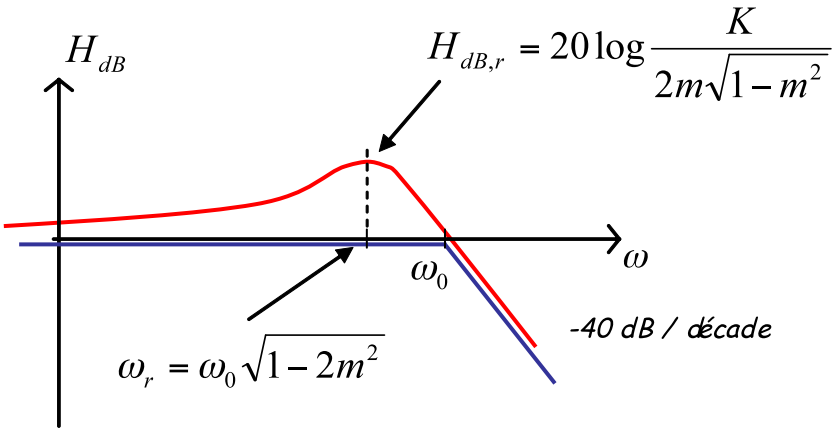


Fig. II.17 – Phénomène de résonance d'un système du 2nd ordre pour $m < \sqrt{2}/2$.

- pour $\sqrt{2}/2 < m < 1$, il n'y a pas de résonance, la courbe reste sous le tracé asymptotique.

Le lecteur trouvera en annexe 3 les tracés des différents diagrammes de la fonction de transfert d'un système linéaire du 2nd ordre et plus généralement tous les résultats et abaques s'y rapportant.

Pour $\omega = \omega_0$, on a :

$$\left|\underline{H}(j\omega_0)\right| = \frac{K}{2m} \qquad Arg\ H = -\pi/2$$

On note $Q = \frac{1}{2m}$ le <u>facteur qualité</u> du système (Q est utilisée pour qualifier les systèmes de filtrage).

Pour $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$, on a dans le cas $0 < m < \sqrt{2}/2$:

$$\left|\underline{H}(j\omega_r)\right| = \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

On définit le <u>facteur de résonance</u> par $M = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$

<u>Représentation de Black</u>.

La figure II.18 donne la représentation de Black d'un système linéaire du 2nd ordre résonnant pour $m = 0{,}5$ et $m = 0{,}34$ (le gain statique est unitaire).

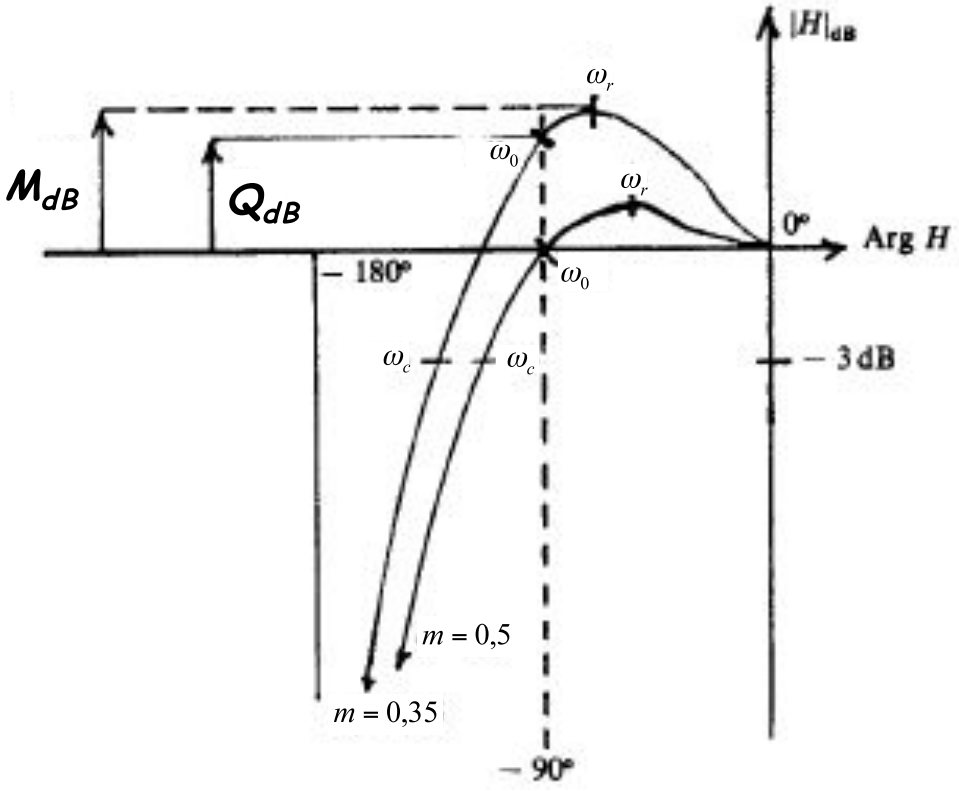


Fig. II.18 – Représentation de Black d'un système linéaire résonnant du 2nd ordre.

Le tracé permet de retrouver et d'identifier un certain nombre de points caractéristiques : le régime statique ($\omega = 0$), la résonance (pour $\omega = \omega_r$ on obtient M_{dB}), la pulsation propre ω_0 (elle donne Q_{dB}), la pulsation de coupure ω_c à *-3 dB*, et l'asymptote vers $-\pi$ pour $\omega \to \infty$.

Représentation de Nyquist.

La figure II.19 donne la représentation de Nyquist d'un système linéaire du 2nd ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement : $0{,}3 < m < 5$ (le gain statique est unitaire).

Le tracé est obtenu à partir de l'expression :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K.\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)}{\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2 + 4m^2\left(\omega/\omega_0\right)^2} - 2j\frac{K\,m.(\omega/\omega_0)}{\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2 + 4m^2\left(\omega/\omega_0\right)^2}$$

Elle-même calculée à partir de l'équation II.13.

Pour $\omega \to +\infty$ on a $\underline{H}(j\omega) \to 0$ par les valeurs négatives (le gain tend vers 0 et la phase vers $-\pi$).

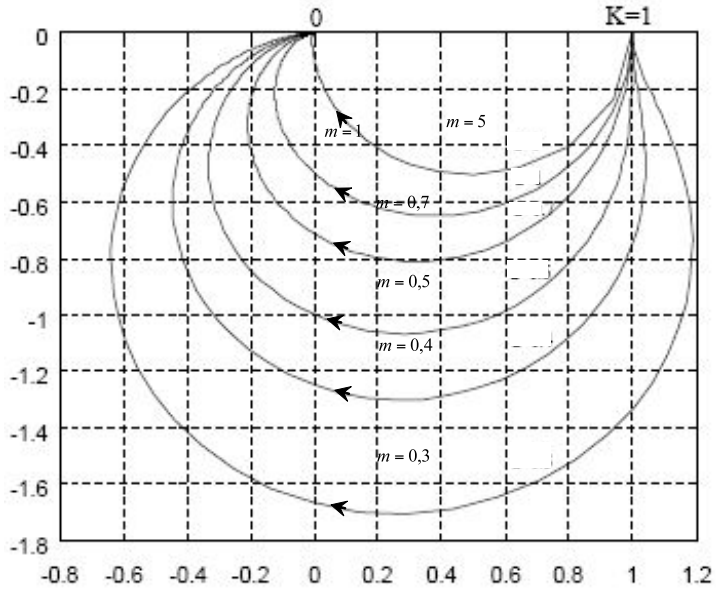


Fig. II. 19 – Lieu de Nyquist d'un système linéaire du 2nd ordre ($0{,}3 < m < 5$).

II.3. Systèmes d'ordre supérieur à 2.

D'une façon générale, l'équation différentielle représentative d'un système linéaire d'ordre supérieur à 2 (S.L.T.I.) peut s'écrire :

$$a_0.y(t) + a_1.\frac{dy(t)}{dt} + ... + a_n.\frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0.u(t) + b_1.\frac{du(t)}{dt} + ... + b_m.\frac{d^m u(t)}{dt^m} \qquad \text{Eq. II.14}$$

avec a_i, b_i coefficients constants réels,

$n \geq m$, pour les systèmes physiques *réalisables* (c'est-à-dire respectant le principe de causalité),

n est l'ordre du système.

On en déduit l'expression de la fonction de transfert correspondante (conditions initiales nulles) :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} \qquad \text{Eq. II.15}$$

Les racines du numérateur, *N(p)*, sont les <u>zéros</u> de la fonction de transfert *H(p)*, et, les racines du dénominateur, *D(p)*, ses <u>pôles</u>.

Les coefficients étant réels, les n pôles (p_1 *à* p_n) de *H(p)* sont soit réels, soit complexes conjugués deux à deux.

Ainsi, le dénominateur peut s'écrire sous la forme :

$$D(p) = a_n.(p - p_1).(p - p_2)....(p - p_n)$$

D'où la possibilité d'exprimer *H(p)* comme une somme d'éléments simples :

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\underline{A}_i}{p - p_i} \qquad \text{avec } \underline{A}_i \text{ complexe}$$

Soit une décomposition additive en sous-systèmes du 1er ordre (pour les pôles réels) et du 2ème ordre (pour les pôles complexes conjugués).

Dès lors, la réponse du système complet est la superposition des réponses de chacun des sous-systèmes qui le composent (par application du principe de superposition), comme illustré figure II.20 par la réponse à un échelon.

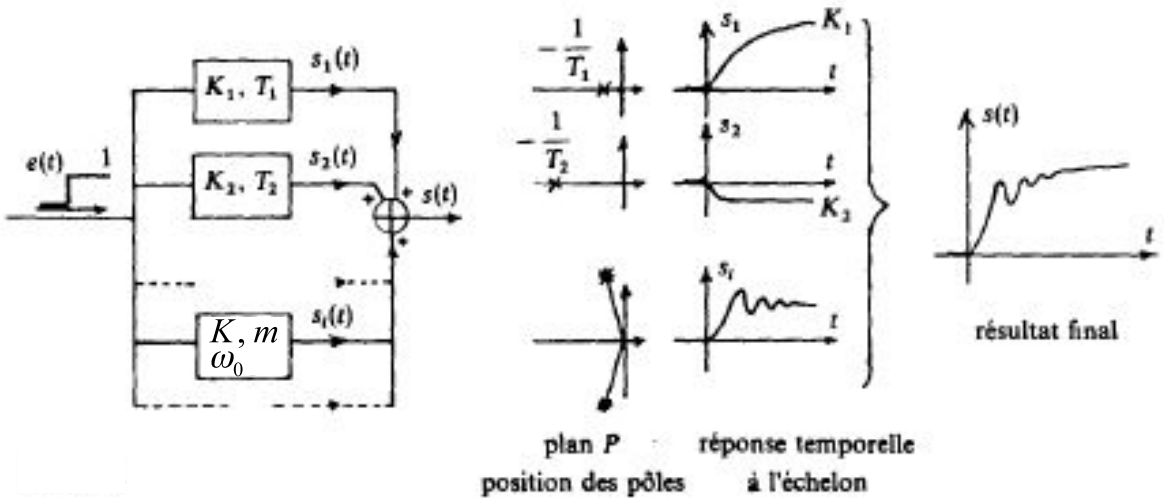


Fig. II.20 – Réponse indicielle d'un système linéaire d'ordre supérieur à 2.

En termes de stabilité, il suffit d'un seul pôle à partie réelle positive pour entraîner l'instabilité de l'ensemble.

Les **pôles dominants** sont situés à proximité de l'axe imaginaire. Pour un pôle réel cela correspond à une constante de temps élevée ; pour un couple de pôles complexes conjugués à un coefficient d'amortissement faible.

La réponse globale du système dépend principalement des pôles dominants.

III. Stabilité des systèmes asservis.

III.1. Schéma général d'un asservissement.

a – Notion de bouclage.

La figure III.1 donne le schéma général d'un système asservi selon le principe introduit au chapitre 1.

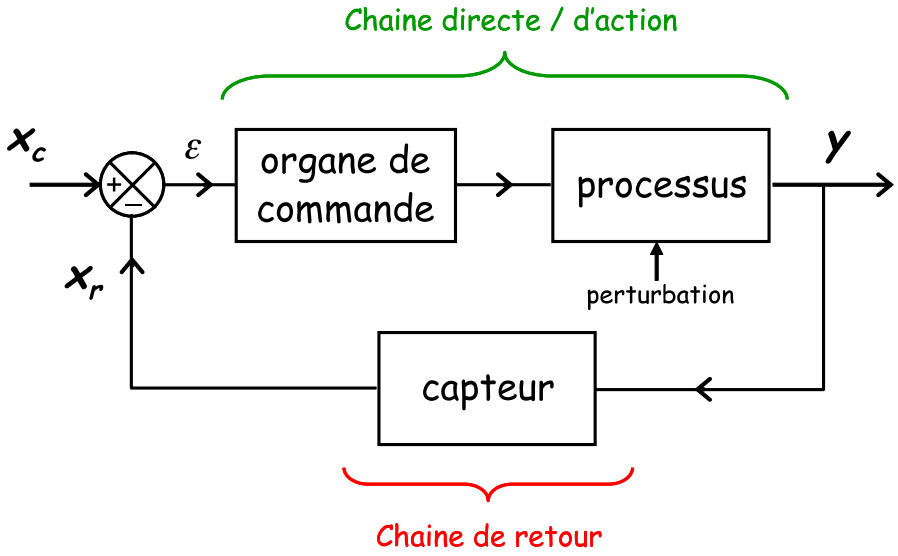


Fig. III.1 – Schéma de principe d'un asservissement.

Avec

- x_c : grandeur de consigne,
- y : sortie,
- x_r : grandeur de retour (image de y),
- $\varepsilon = x_c - x_r$: signal d'erreur.

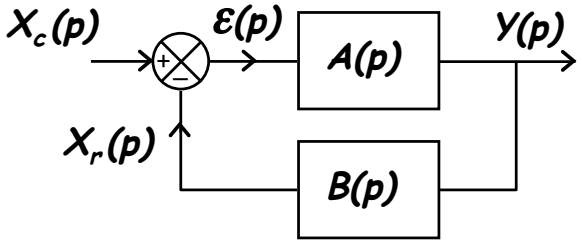
On distingue l'étude de la stabilité lors :

- des variations de consigne : problème de consigne ou de suivi,
- de la présence de perturbations sur le processus : problème de régulation.

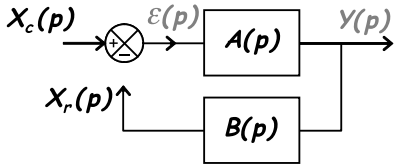
Dans le cas particulier du retour unitaire, y et x_c sont de même dimension (tel que $x_c = y_c = y$).

b – Fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée (FTBO / FTBF).

La figure III.2 (a) donne la représentation d'un asservissement sous forme de schéma bloc (chaque bloc est remplacé par sa fonction de transfert, ou transmittance de Laplace).



(a) Schéma bloc d'un asservissement



(b) Calcul de la FTBO



(c) Représentation en BF

Fig. III.2 – Représentation sous forme de schéma bloc d'un asservissement.

Fonction de transfert en boucle ouverte.

Lors de la détermination de la fonction de transfert en boucle ouverte, la boucle est ouverte **au niveau de la grandeur de retour** (cf. Fig. III.2 (b)), même si cela peut sembler non intuitif :

$$FTBO = T(p) = \frac{X_r(p)}{X_c(p)}$$

$$\boxed{FTBO = T(p) = A(p).B(p)} \qquad \text{Eq. III.1}$$

Fonction de transfert en boucle fermée.

Le calcul de la FTBF permet de modéliser le système asservi dans son ensemble (cf. Fig. III.2 (c)). On a :

$$FTBF = H(p) = \frac{Y(p)}{X_c(p)}$$

Tel que

$$Y(p) = A(p).\varepsilon(p)$$

$$Y(p) = A(p).\left[X_c(p) - X_r(p)\right]$$

$$Y(p) = A(p).\left[X_c(p) - B(p).Y(p)\right]$$

$$Y(p).\left[1 + A(p).B(p)\right] = A(p).X_c(p)$$

D'où $$\boxed{FTBF = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}}$$ Eq. III.2

Soit :

$$FTBF = \frac{A(p)}{1 + FTBO}$$

La figure III.3 présente le cas particulier du retour unitaire.

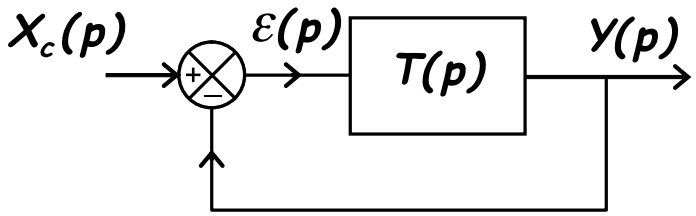


Fig. III.3 – Cas du retour unitaire.

On a alors :

$$FTBF = H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \qquad \left(FTBF_{retour\ unitaire} = \frac{FTBO}{1 + FTBO} \right)$$

Structure équivalente à un retour unitaire.

Il est possible de ramener tout système asservi au cas du retour unitaire (cf. figure III.4) à partir de la FTBF du système réduit (le système réduit correspond au système pour lequel la sortie est $X_r(p)$ au lieu de $Y(p)$.

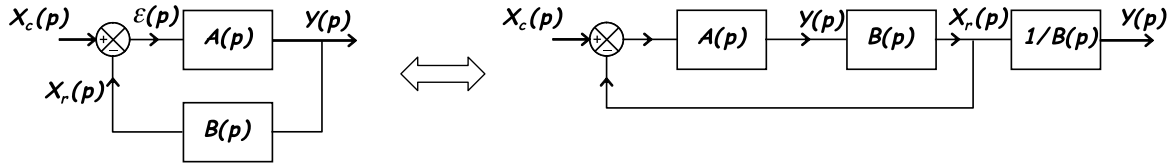


Fig. III.4 – Structure équivalente à un retour unitaire.

Avec :

$$\begin{cases} FTBO_r = A(p).B(p) = T_r(p) \\ FTBF_r = H_r(p) = \dfrac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p)} = \dfrac{T_r(p)}{1 + T_r(p)} \end{cases}$$

III.2. Interprétation géométrique du passage de la boucle ouverte à la boucle fermée.

Dans le cas d'un asservissement à retour unitaire tel que

$$H(p) = \frac{T(p)}{1+T(p)}$$

Avec

$$T(p) = G_{BO}(p)\,e^{j\phi_{BO}(p)}$$

tel que G_{BO} soit le gain et ϕ_{BO} soit la phase en boucle ouverte.

Soit

$$H(p) = \frac{G_{BO}(p)\,e^{j\phi_{BO}(p)}}{1+G_{BO}(p)\,e^{j\phi_{BO}(p)}} = \frac{G_{BO}(p)}{G_{BO}(p)+e^{-j\phi_{BO}(p)}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_{BO}(\omega)}{G_{BO}(\omega)+\cos\phi_{BO}(\omega) - j.\sin\phi_{BO}(\omega)}$$

En notant

$$\underline{H}(j\omega) = G_{BF}(\omega)\,e^{j\phi_{BF}(\omega)}$$

On obtient

$$\left|\begin{array}{l} G_{BF}(\omega) = \dfrac{G_{BO}(\omega)}{\sqrt{G_{BO}{}^2(\omega)+1+2.G_{BO}(\omega).\cos\phi_{BO}(\omega)}} \\ \phi_{BF}(\omega) = \arctan\dfrac{\sin\phi_{BO}(\omega)}{G_{BO}(\omega)+\cos\phi_{BO}(\omega)} \end{array}\right.$$

Ainsi, connaissant le FTBO (G_{BO}, ϕ_{BO}) pour un ω donné on en déduit la FTBF (G_{BF}, ϕ_{BF}).

a – Abaque de Black-Nichols.

L'**abaque de Black-Nichols** permet de repérer par un système de doubles coordonnées les valeurs de la FTBO et de la FTBF correspondante (pour un retour unitaire uniquement) dans le plan de Black.

Dans le système de coordonnées rectangulaires (ϕ_{BO}, $G_{BO\,dB}$), on trace les courbes isomodules $G_{BF\,dB} = cte$ (en traits continus) et isophases $\phi_{BF} = cte$ (en pointillés) de la FTBF.

Courbe isomodule $G_{BF\,dB} = cte$, tracée d'après :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{H}(j\omega)}{1-\underline{H}(j\omega)} = \frac{G_{BF}\,e^{j\phi_{BF}}}{1-G_{BF}\,e^{j\phi_{BF}}}$$

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{G_{BF}}{-G_{BF}+\cos\phi_{BF} - j\sin\phi_{BF}}$$

Soit

$$\begin{cases} G_{BO} = \dfrac{G_{BF}}{\sqrt{G_{BF}{}^2 - 2.G_{BF}.\cos\phi_{BF} + 1}} \\ \phi_{BO} = \arctan\dfrac{\sin\phi_{BF}}{\cos\phi_{BF} - G_{BF}} \end{cases}$$

Le tracé des courbes isomodules (traits continus verts sur la figure III.5) se fait pour $G_{BF\,dB} = cte$, dans le repère (ϕ_{BO}, $G_{BO\,dB}$) en faisant varier ϕ_{BF}.

Le tracé des courbes isophases (traits pointillés rouges, fig. III.5) se fait pour $\phi_{BF} = cte$, dans le repère (ϕ_{BO}, $G_{BO\,dB}$) en faisant varier $G_{BF\,dB}$. Voir également l'abaque donné en annexe 4.

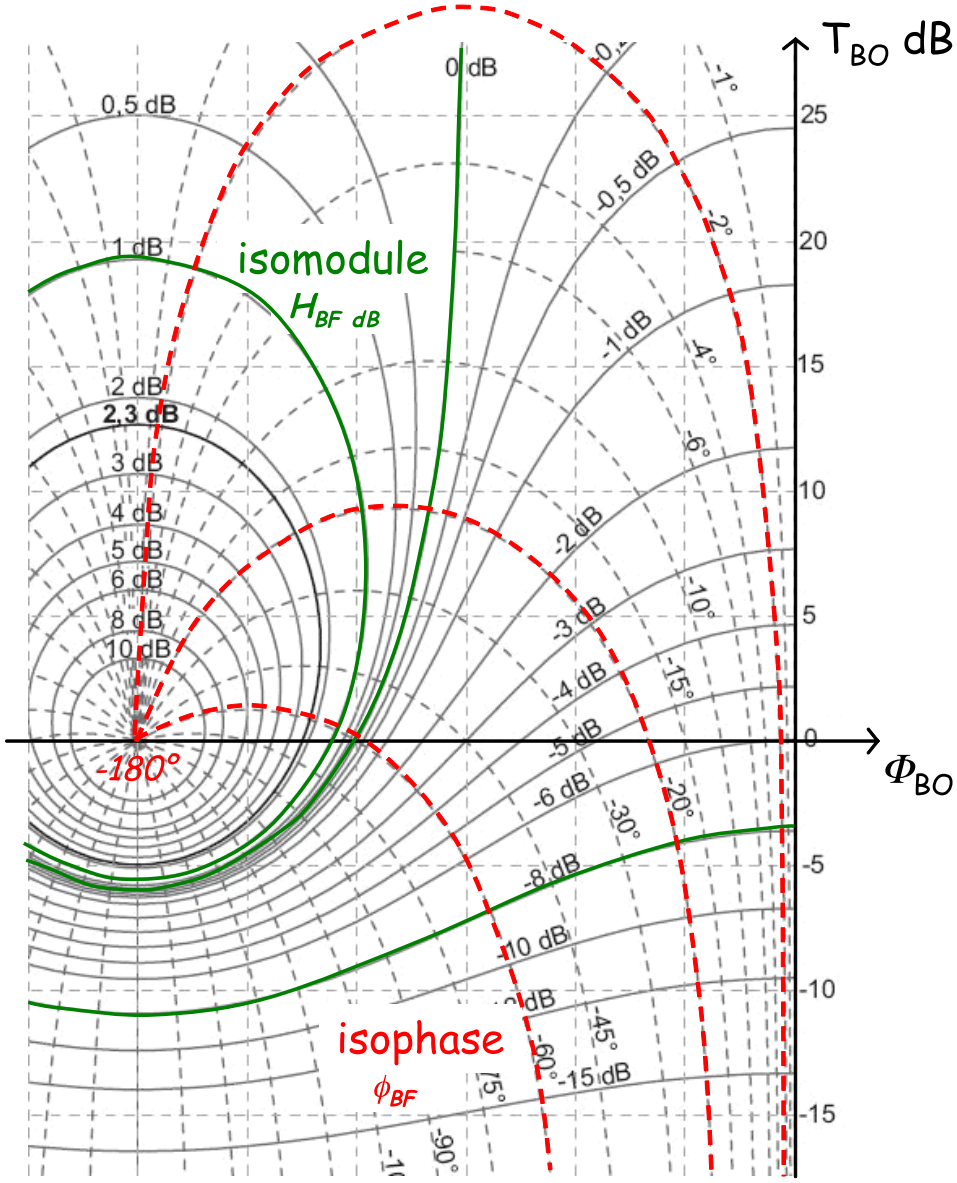


Fig. III.5 – Courbes isomodules et isophases de l'abaque de Black-Nichols.

b – Analyse des résonances.

On considère dans cette partie un asservissement à retour unitaire résonant en boucle ouverte et en boucle fermé. Sa FTBO est tracée (en bleu) dans l'abaque de Black-Nichols de la figure III.6.

Le suivi point à point du tracé de la FTBO, pour ω variant de 0 à $+\infty$, permet de déterminer la FTBF ; son gain en dB étant lu à l'intersection avec les isomodules et sa phase à l'intersection avec les isophases pour un ω donné.

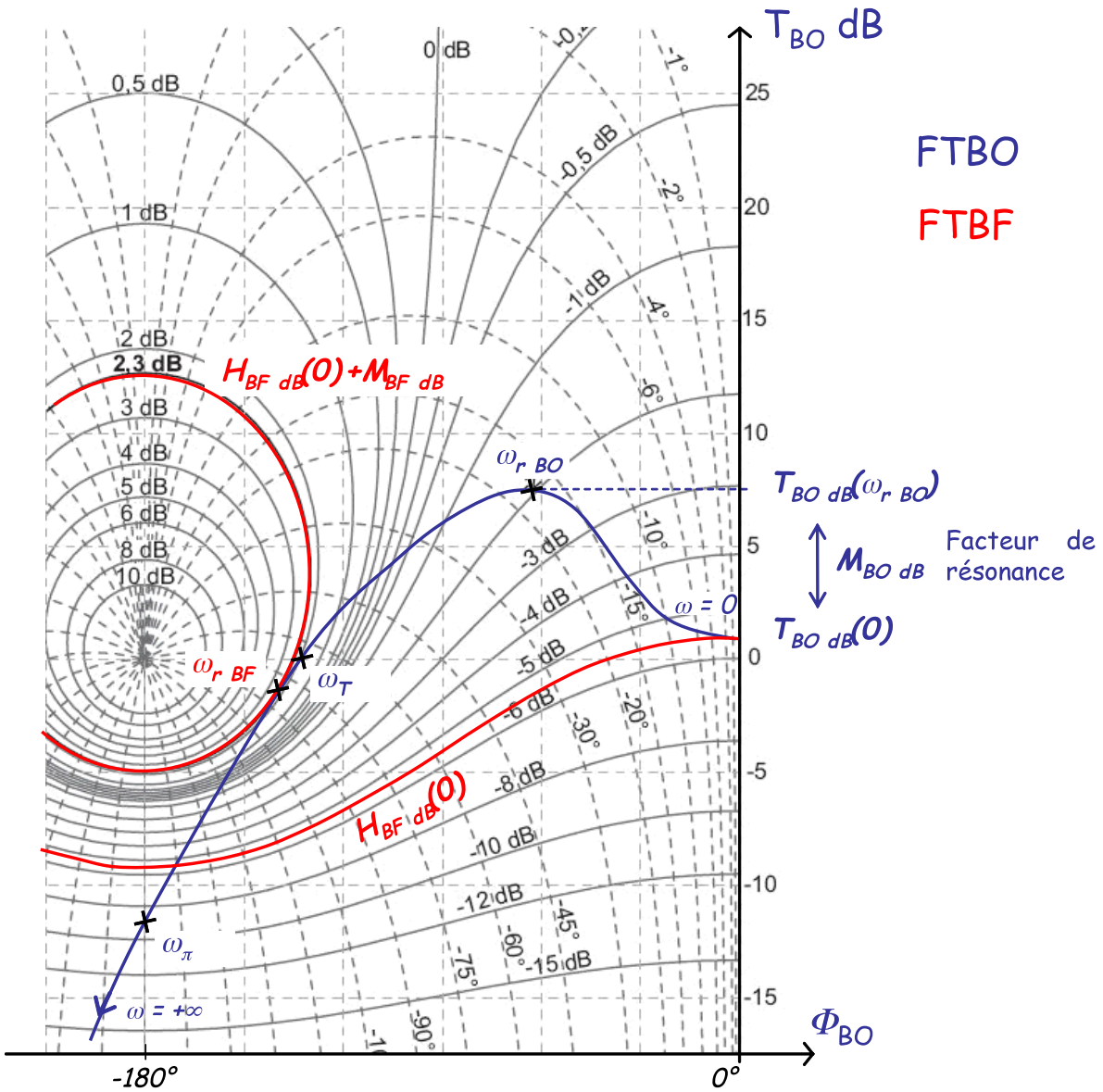


Fig. III.6 – Analyse de la résonance.

Pour $\omega = 0$, on lit le gain statique en boucle fermée $H_{BF\ dB}(0) \approx -5{,}5\ \ dB$ sur l'isomodule correspondante (en rouge fig. III.6) et $\phi_{BF} = 0°$ sur l'isophase (confondue avec l'axe des ordonnées).

L'existence d'un maximum de gain en BF, c'est-à-dire d'une résonance à la pulsation $\omega_{r\,BF}$, est attestée par l'existence d'un point de contact entre la FTBO et l'isomodule $H_{BF\,dB} = 2{,}3\ \ dB$ (plus précisément la FTBO est tangente à cette isomodule, et celle-ci correspond à un gain supérieur au gain statique).

Attention à ne pas confondre les fréquences de résonnance en boucle ouverte, $\omega_{r\,BO}$, et en boucle fermé, $\omega_{r\,BF}$.

On peut alors tracer (figure III.7) l'allure du diagramme de Bode de la FTBF (en prenant au besoin quelques points intermédiaires). Avec :

$$H_{BF\,dB}(\omega_{r\,BF}) = H_{BF\,dB}(0) + M_{BF\,dB}$$

$M_{BF\,dB}$ étant le facteur de résonance de la BF.

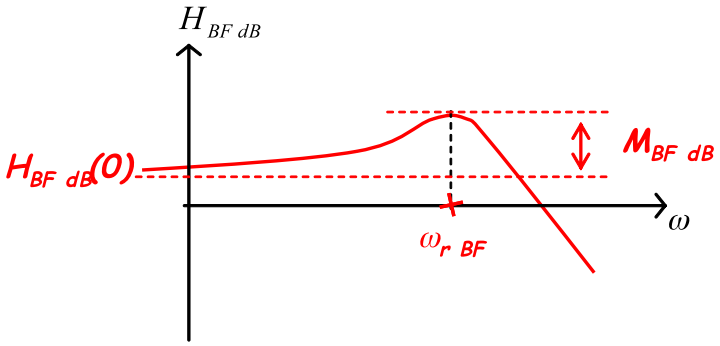


Fig. III.7 – Module en *dB* de la FTBF.

L'abaque de la figure III.6 permet de relever deux autres pulsations *utiles* :

- ω_T : la pulsation de transition telle que $T_{BO\,dB}(\omega_T) = 0\ \ dB$,
- ω_π : telle que $\phi_{BO}(\omega_\pi) = -180°$.

c – Bande passante en boucle fermée.

L'abaque de Black-Nichols permet également de déterminer rapidement la bande passante à $-\alpha\ dB$ en boucle fermée, c'est-à-dire la pulsation de coupure correspondante, ω_c (cf. figure III.8).

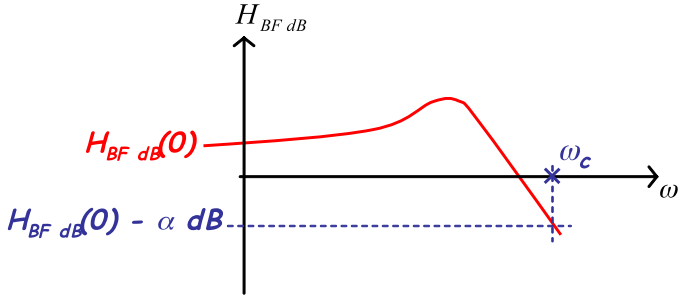


Fig. III.8 – Bande passante à $-\alpha\ dB$ de la BF.

La méthode à suivre est illustrée figure III.9 : partant de l'isomodule correspondant au gain statique ($H_{BF\ dB}(0)$ en rouge), on cherche le point d'intersection de la FTBO avec l'isomodule $H_{BF\ dB}(0)$ - α *dB* (en bleu) qui donne la pulsation de coupure correspondante ω_c.

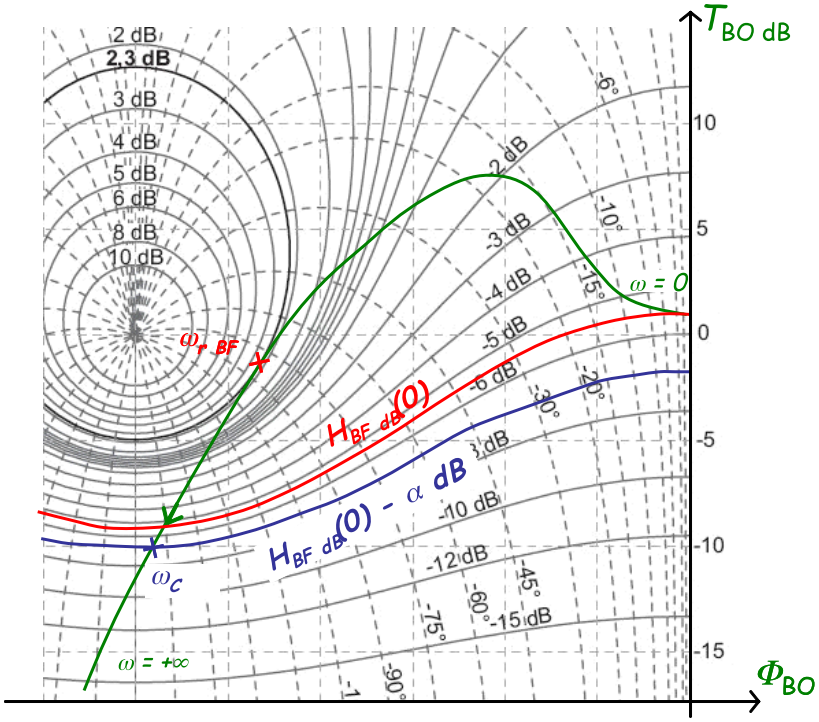


Fig. III.9 – Détermination de la bande passante à -α *dB* en BF.

III.3. Réponse impulsionnelle d'un système bouclé en régime linéaire.

L'étude de la réponse impulsionnelle (réponse à un Dirac) d'un système bouclé permet d'aborder la question de la stabilité. D'après la définition 6, un système stable écarté de son point de repos doit y retourner.

En exprimant la FTBF, *H(p)*, sous forme d'une fraction rationnelle (cf. équation II.15, partie II.3) :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} \qquad (\text{tq } n \geq m)$$

Et d'après :

$$x_c(t) = \delta(t) \xrightarrow{TL} X_C(p) = 1$$

On a :

$$Y(p) = H(p).1 = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0}$$

Ce qui nous conduit à (cf. partie II.3) :

$$Y(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n} \qquad A_i \text{ complexe}$$

Ainsi, lors du retour dans le domaine temporel, on a pour chaque pôle p_i de $H(p)$:

$$\frac{A_i}{p - p_i} \xrightarrow{TL^{-1}} A_i e^{p_i t}$$

Pour que ces exponentielles ne divergent pas vers $+\infty$ il faut que la partie réelle de chaque p_i soit strictement négative.

Conclusion : un système de transmittance $H(p)$ est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative (c'est-à-dire que les zéros de $D(p) = 1 + T(p)$ sont à partie réelle négative).

On remarque donc qu'il suffit de connaitre les zéros de $1 + T(p)$ pour conclure sur la stabilité d'un système. D'où la règle fondamentale de l'automatique :

La connaissance de la FTBO permet de conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

En dehors du calcul direct des pôles (par ordinateur), il existe deux grandes familles de critère pour étudier la stabilité d'un système :

- les critères algébriques,
- les critères géométriques.

III.4. Le critère de Routh-Hurwitz (critère algébrique).

Considérons un système de FTBF[6] :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

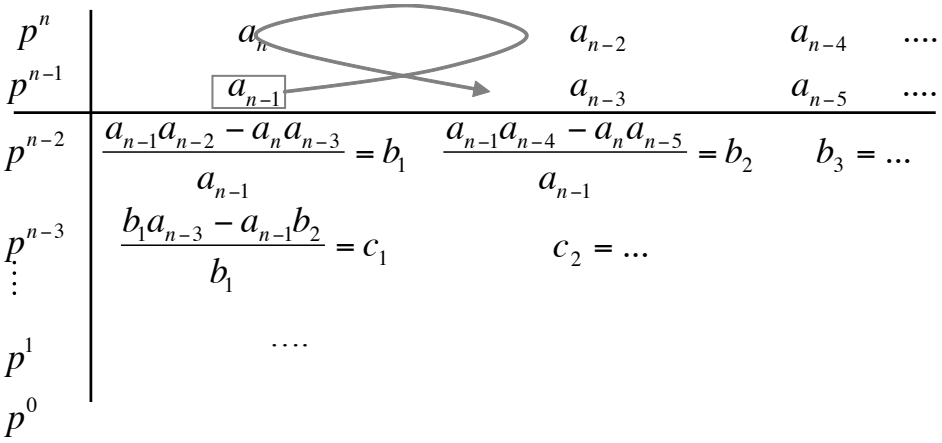
L'étude du polynôme caractéristique $D(p) = 0$ (ou polynôme d'Hurwitz) permet de conclure sur la stabilité du système (le critère est énoncé ci-après sans être démontré).

[6] L'attention du lecteur est attirée sur le fait qu'il s'agit du seul critère basé sur l'étude de la FTBF (les critères géométriques présentés ci-après reposent sur l'étude de la FTBO).

Le critère de stabilité de Routh se décompose en deux conditions :

- Une condition nécessaire : la stabilité exige que tous les coefficients a_i soient de même signe et non nuls.
- Une condition nécessaire et suffisante : le système est stable (i.e. les zéros de *D(p)*, c'est-à-dire les pôles de *H(p)*, sont tous à partie réelle strictement négative) si et seulement si tous les termes de la 1ère colonne du tableau de Routh sont de même signe.

Construction du tableau de Routh :



Les deux premières lignes du tableau de Routh sont obtenues en reportant les coefficients du polynôme caractéristique (les emplacements *vides* correspondent à la valeur zéro).
Les coefficients des lignes suivantes sont calculés à partir des coefficients des deux lignes immédiatement supérieure et correspondant plus précisément à la 1ère colonne et à la colonne suivante (le cadre et le gamma inversé gris clairs ajoutés au tableau illustrent le calcul de b_1).

Exemple 1 : conclure quant à la stabilité du système de FTBF :

$$H(p) = \frac{1}{p^5 + p^4 - 2p^3 + 2p^2 + p + 5}$$

Solution : les coefficients associés au polynôme d'Hurwitz ne sont pas tous de même signe. La condition nécessaire de stabilité n'est pas vérifiée. Le système associé est donc instable.

Exemple 2 : conclure quant à la stabilité du système de FTBF :

$$H(p) = \frac{K(1+\tau.p)}{p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 6p + 1}$$

Solution : $D(p) = p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 6p + 1 = 0$

Tous les coefficients sont de même signe, la condition nécessaire est vérifiée.

p^4	1	3	1
p^3	5	6	0
p^2	$\frac{5.3 - 6.1}{5} = 9/5$	$\frac{5.1 - 0.1}{5} = 1$	
p^1	$\frac{9/5.6 - 5.1}{9/5} = 29/9$	0	
p^0	1		

Tous les coefficients de la première colonne sont de même signe, le système est donc stable.

Exemple 3 : conclure quant à la stabilité du système de FTBF :

$$H(p) = \frac{K}{p^4 + 5p^3 + 3p^2 + 16p + 1}$$

Solution :

p^4	1	3	1
p^3	5	16	0
p^2	$-1/5$	1	0
p^1	41	0	
p^0	1		

Il y a deux changements de signe ce qui indique la présence de 2 pôles instables.

Exemple 4 : le critère de Routh présente également un intérêt lorsqu'il faut déterminer la valeur d'un paramètre pour lequel le système franchit le seuil de stabilité.

On considère un système à retour unitaire de FTBO :

$$T(p) = \frac{K}{\tau.p.\left(p^2 + 2p + 2\right)} \qquad \text{tel que } K > 0,\ \tau > 0$$

A quelle condition ce système est-il stable ?

Solution : calcul de la FTBF :

$$H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{K}{\tau.p^3 + 2\tau.p^2 + 2\tau.p + K} \text{ d'où :}$$

p^3	τ	2τ	0
p^2	2τ	K	0
p^1	$\frac{4\tau - K}{2}$	0	
p^0	K		

stable si $\frac{4\tau - K}{2} > 0$ soit si $K/\tau < 4$

III.5. Les critères géométriques de stabilité.

a – Le critère de Nyquist.

Théorème de Cauchy :	si un point d'affixe p, décrit dans le sens horaire un contour fermé *(C)*, à l'intérieur duquel on trouve *P* pôles et *Z* zéros d'une fraction rationnelle *D(p)*, alors, la courbe *(Γ)* transformée de *(C)* par *D(p)* fait *N* tours (comptés positivement dans le sens horaire) autour de l'origine avec : $N = Z - P$

Justification : en écrivant $D(p) = a.\dfrac{(p-z_1).(p-z_2)....}{(p-p_1).(p-p_2)....}$

les z_i étant les zéros et les p_i les pôles de *D(p)*.

On a $Arg\big(D(p)\big) = Arg(p-z_1) + Arg(p-z_2) + ... - Arg(p-p_1) - Arg(p-p_2) - ...$

Lorsque *p* se déplace dans le sens horaire sur une courbe fermée *(C)*, si z_i est entouré par la courbe, alors $Arg(p-z_i)$ augmente d'un tour (dans le sens horaire), le résultat étant similaire (au signe près) pour $-Arg(p-p_i)$ on obtient bien $N = Z - P$. Ce résultat est illustré figure III.10.

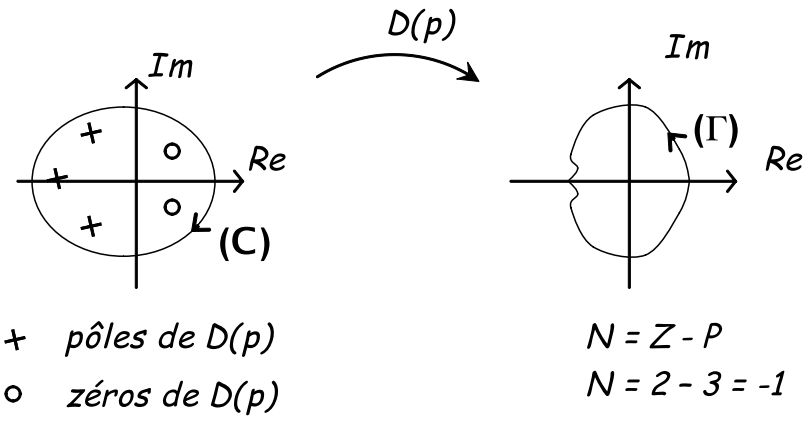


Fig. III.10 – Illustration du théorème de Cauchy.

Pour l'étude d'un système asservi de FTBF, $H(p) = \dfrac{A(p)}{1+T(p)}$, le choix de *(C)* porte sur le contour de Bromwich (représenté figure III.11) de façon à englober toutes les racines à partie réelle positive ou nulle de *1 + T(p)* (à l'exception de l'origine). Le contour de Bromwich est constitué de deux demi cercles de rayon *r* et *R*, complété par deux segments de droite confondus avec l'axe imaginaire. Pour $r \to 0$ et $R \to +\infty$ on englobe bien le demi plan complexe à partie réelle strictement positive.

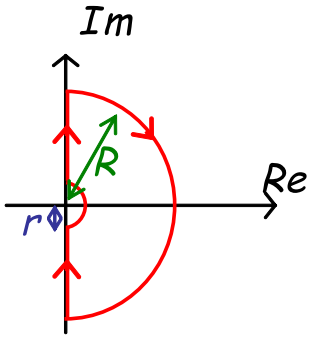


Fig. III.11 – Contour de Bromwich.

D'après le théorème de Cauchy, si p décrit (C), le contour de Bromwich, alors $1 + T(p)$ décrit une courbe fermée (Γ) faisant N tours dans le sens horaire autour de l'origine avec :

$$N = Z^+ - P^+$$

tel que P^+ = pôles à partie réelle > 0 de $1 + T(p)$

P^+ = pôles à partie réelle > 0 de $T(p)$

$P^+ = P_{BO}{}^+$ pôles instables de la boucle ouverte

et

Z^+ = zéros à partie réelle > 0 de $1 + T(p)$

Z^+ = pôles à partie réelle > 0 de $\dfrac{A(p)}{1+T(p)}$

$Z^+ = P_{BF}{}^+$ pôles instables de la boucle fermée

Soit

$$\boxed{N = P_{BF}{}^+ - P_{BO}{}^+}$$

Ainsi, connaissant $P_{BO}{}^+$ et N, on en déduit le nombre de pôles instables de la FTBF (i.e. la stabilité).

Point critique $(-1,0)$: plutôt que de regarder le nombre de tours de $(\Gamma) = \{1 + T(p)\}$ autour de l'origine, on trace $(\Gamma\,') = \{T(p)\}$ (la FTBO) et on regarde le nombre de tours autour du point critique $(-1,0)$. Ce résultat est obtenu par une simple translation de -1 selon l'axe réel.

On est alors à même d'énoncer le :

Critère de stabilité de Nyquist : lorsque *p* décrit le contour de Bromwich (C) dans le sens horaire, *T(p)* (la FTBO) décrit une courbe (Γ) dans le plan complexe. Le système est stable en boucle fermée si et seulement si le nombre de tours de (Γ) autour du point critique *-1* comptés dans le sens horaire est égal à moins le nombre de pôles instables de *T(p)* (pôles Re>0 de la FTBO). Pour un système stable en boucle ouverte, le système est stable en boucle fermée si (Γ) n'entoure pas le point critique.

Rmq : pour un système instable en BF, le nombre de pôles instables est $P_{BF}^{+} = N + P_{BO}^{+}$.

La connaissance de la boucle ouverte permet de conclure sur la stabilité en boucle fermée.

Comportement à l'origine : le contour d'exclusion à l'origine (pour $p = 0$) permet d'éviter les problématiques d'existence de la FTBO dans le cas où elle peut s'exprimer sous la forme :

$$T(p) = \frac{a}{p^{\alpha}} . \frac{1 + b_1 p + ... + b_m p^m}{1 + a_1 p + ... + a_n p^n} \qquad \text{avec } \alpha > 0$$

Pour $p \approx 0$ (au voisinage de *0*) : $T(p) \approx \frac{a}{p^{\alpha}}$

Ainsi, en parcourant le demi-cercle de rayon *r*, l'argument de *p* passe de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ en faisant un demi-tour autour de l'origine dans le sens antihoraire, et donc l'argument de *T(p)* passe de $\alpha\pi/2$ à $-\alpha\pi/2$ en tournant dans le sens horaire. Ainsi, on passe de $T(0^-)$ à $T(0^+)$ en faisant une rotation de $\alpha\pi$ dans le sens horaire.

L'exemple suivant, qui sera corrigé en TD, illustre ce comportement.

Exemple : Etudier la stabilité du système de FTBO, $T(p) = \frac{K}{p.(p+1).(p+2)}$, par application du critère de Nyquist.

b – Le critère du revers.

Le critère du revers est une simplification du critère de Nyquist pour les systèmes *simples*.

Conditions suffisantes devant être vérifiées par la FTBO pour pouvoir appliquer le critère du revers :

- système stable en boucle ouverte,
- ordre de la FTBO > *1*,
- *T(p)* à phase minimale (i.e. pas de zéro à *Re>0*),
- le rapport des coefficients de plus bas degré du numérateur et du dénominateur est positif.

Critère du revers : si un système vérifie les conditions suffisantes exposées précédemment et si le lieu de Nyquist de la FTBO, décrit dans le sens des pulsations croissantes (0^+ *à* $+\infty$), laisse le point critique à sa gauche, alors, le système sera stable en boucle fermée.

La figure III .12 illustre l'application du critère du revers pour des systèmes instable et stable.

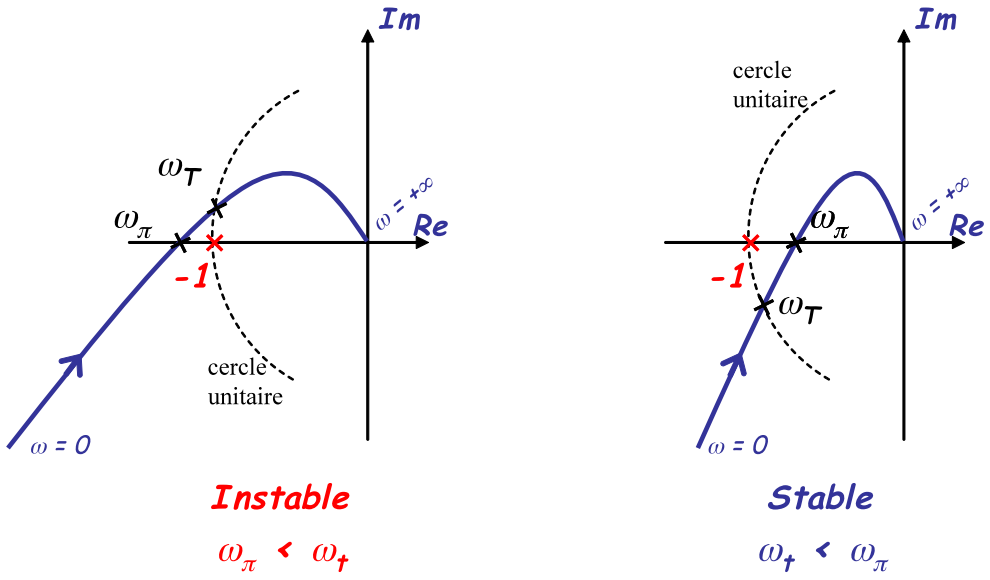


Fig. III.12 – Illustration du critère du revers.

Critère du revers dans le plan de Black : si un système en boucle ouverte vérifie les conditions suffisantes énoncées précédemment, et, si son lieu dans le plan de Black parcouru dans le sens des pulsations croissantes (0^+ à $+\infty$) laisse le point critique à sa droite alors le système est stable en boucle fermée.

La figure III .13 illustre l'application du critère du revers dans le plan de Black.

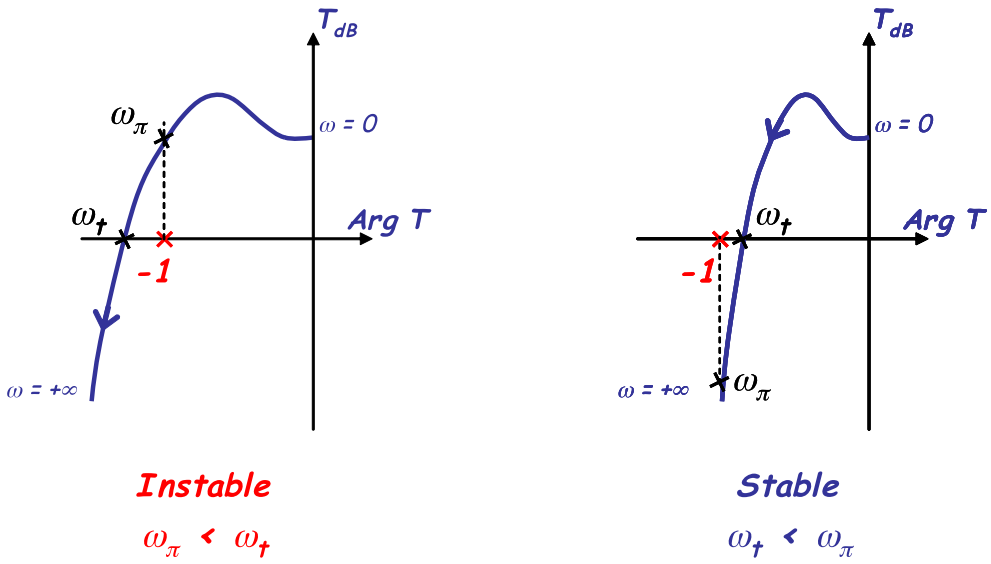


Fig. III.13 – Illustration du critère du revers dans le plan de Black.

C'est un résultat que l'on peut illustrer également sous forme de diagramme de Bode (cf. figure III.14).

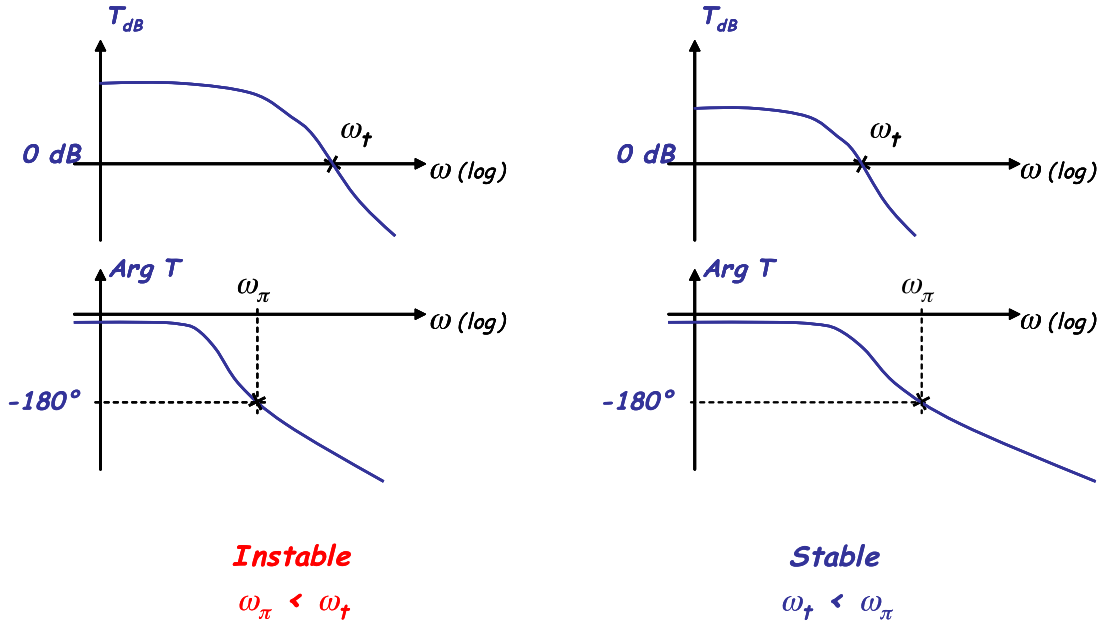


Fig. III.14 – Diagrammes de Bode de systèmes instable et stable.

D'une façon générale, pour des systèmes satisfaisant aux conditions suffisantes du critère du revers, on retiendra que le système est stable pour $\omega_T < \omega_\pi$ et instable pour $\omega_\pi < \omega_T$.

c – Marges de stabilité.

On introduit la notion de marges de stabilité pour s'assurer qu'un système est *loin* du point critique ; en d'autres termes, elles permettent de quantifier la *distance* séparant le lieu de la FTBO du point critique (synonyme de limite de stabilité).

On définit :

- Marge de phase :

$$M_\phi = Arg\left[T(p = j\omega_T)\right] + 180° \qquad [°]$$

- Marge de gain :

$$M_G = -\left|T(p = j\omega_\pi)\right|_{dB} \qquad [dB]$$

Les définitions de M_G et de M_ϕ sont telles qu'elles soient positives pour un système stable.

La figure III.15 illustre le tracé des marges de phase dans le plan de Black et dans le diagramme de Bode.

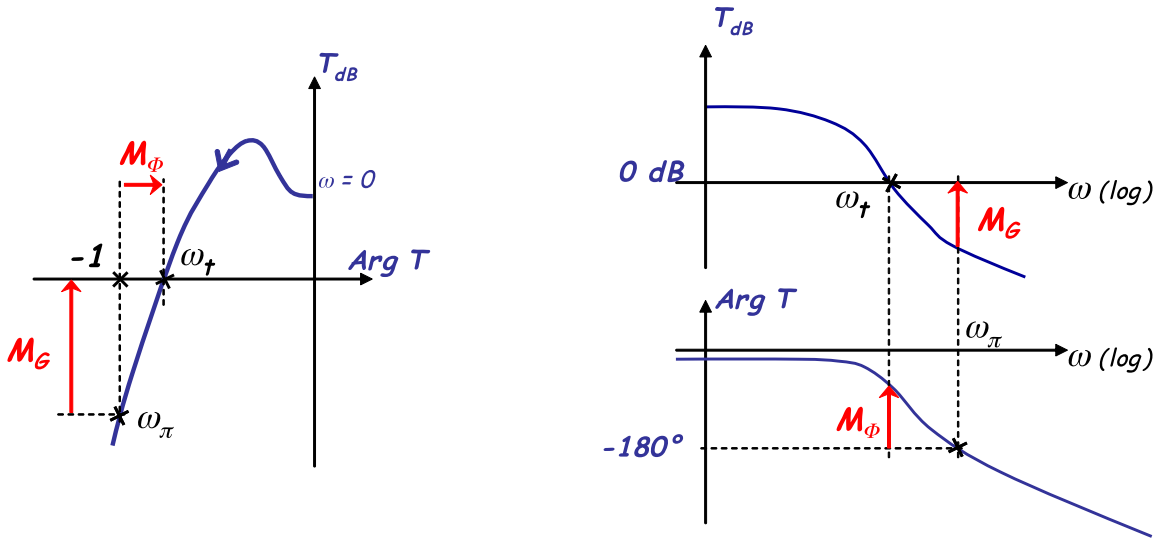


Fig. III.15 – Marges de stabilité pour un système stable.

IV. Performances des systèmes asservis.

Dans ce chapitre on considérera que les systèmes étudiés sont stables (et à retour unitaire). Les deux critères de performance étudiés sont la précision et la rapidité (cf. I.3.c).

IV.1. Précision.

Définition 11 : Estimer la précision d'un système asservi c'est mesurer ou prédire l'évolution temporelle de l'écart entre la consigne d'entrée et la sortie du système : $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$.

Le but étant de minimiser $\varepsilon(t)$.

Le système est susceptible d'évoluer sous l'effet d'une modification de la consigne $y_c(t)$ ou de l'apparition de perturbations extérieures $n(t)$.

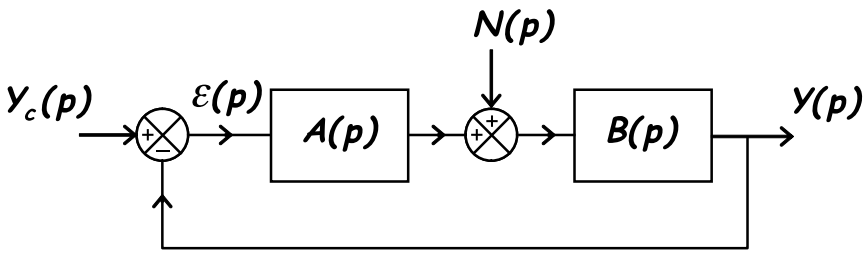


Fig. IV.1 – Schéma bloc d'un système à retour unitaire.

D'après la figure IV.1 on peut écrire :

$$Y(p) = \underbrace{A(p).B(p)}_{FTBO\,en\,l'absence\,de\,perturbation}.\varepsilon(p) + B(p).N(p)$$

$$Y(p) = T(p)\left[Y_c(p) - Y(p)\right] + B(p).N(p)$$

$$Y(p)\left[1 + T(p)\right] = T(p).Y_c(p) + B(p).N(p)$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{T(p)}{1+T(p)}}_{FTBF}.Y_c(p) + \frac{B(p)}{1+T(p)}.N(p)$$

Ainsi, d'une façon générale, on peut décomposer l'étude en deux :

- d'une part l'étude de la poursuite : évolution de l'erreur pour les variations de la consigne en l'absence de perturbations,
- et d'autre part l'étude en régulation : évolution de l'erreur en présence de perturbations pour une consigne fixe.

a – Précision statique en poursuite – Erreur en régime permanent.

L'erreur en régime permanent est :

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_s$$

Donc, d'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p)$$

Avec

$$\varepsilon(p) = Y_c(p) - Y(p)$$

$$\varepsilon(p) = Y_c(p) - \frac{T(p)}{1+T(p)} Y_c(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{Y_c(p)}{1+T(p)}$$

D'où

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{pY_c(p)}{1+T(p)}} \qquad \text{Eq. IV.1}$$

L'erreur statique, ε_s, dépend du signal de consigne et de la FTBO.

Dans le cas où l'on peut écrire la FTBO sous la forme :

$$T(p) = \frac{a}{p^\alpha} \cdot \frac{1+b_1 p + \ldots + b_m p^m}{1+a_1 p + \ldots + a_n p^n}$$ (système de classe α, i.e. nb d'intégrations pures)

On a alors :

$$\lim_{p\to 0} T(p) = \lim_{p\to 0} \frac{K}{p^\alpha}$$

La FTBO correspond alors aux exemples de diagrammes de Bode asymptotique (gain uniquement) donnés figure IV.2.

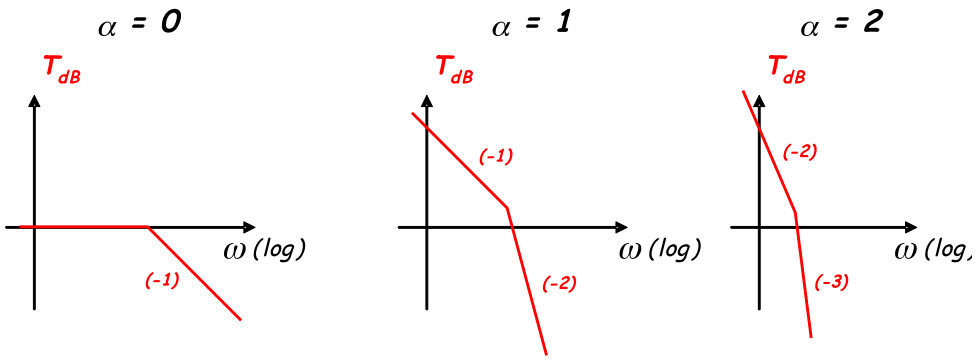


Fig. IV.2 – Allures du gain de systèmes de classe 0, 1 et 2.

Réponse à un échelon de consigne (erreur de position) :

$$y_c(t) = \Gamma(t) \xrightarrow{TL} Y_c(p) = 1/p$$

D'où

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+T(p)} \cong \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$$

et donc pour $\alpha = 0$: $\varepsilon_s = \frac{1}{1+K}$

et pour $\alpha \geq 1$:

$\varepsilon_s = 0$ | Un système qui possède au moins un intégrateur ($\alpha \geq 1$) en boucle ouverte a une erreur de position nulle.

Réponse à une rampe (erreur de trainage) :

$$y_c(t) = t \xrightarrow{TL} Y_c(p) = 1/p^2$$

D'où

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p} . \frac{1}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$$

pour $\alpha = 0$ $\varepsilon_s \to +\infty$

pour $\alpha = 1$ $\varepsilon_s = 1/K$

pour $\alpha \geq 2$ $\varepsilon_s = 0$ | Un système qui possède au moins deux intégrateurs ($\alpha \geq 2$) en boucle ouverte a une erreur de traînage nulle.

Réponse à une *parabolique* (erreur en accélération) :

$$y_c(t) = t^2/2 \xrightarrow{TL} Y_c(p) = 1/p^3$$

D'où

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p^2} . \frac{1}{1+\frac{K}{p^\alpha}}$$

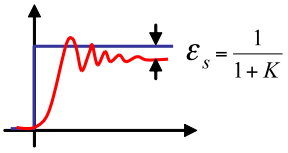
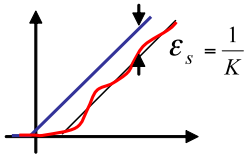
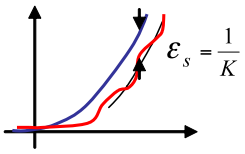
pour $\alpha = 0$ *ou* 1 $\varepsilon_s \to +\infty$

pour $\alpha = 2$ $\varepsilon_s = 1/K$

pour $\alpha \geq 3$ $\varepsilon_s = 0$ | Un système qui possède au moins trois intégrateurs ($\alpha \geq 3$) en boucle ouverte a une erreur d'accélération nulle.

Quand ε_s est finie et non nulle, le fait d'augmenter K la fait baisser. Au risque de rendre le système instable.

Le tableau IV.1 rassemble les résultats précédents.

Classe α =	0	1	2
erreur de position (échelon)		0	0
erreur de traînage (rampe)	∞		0
erreur de d accélération	∞	∞	

Tab. IV.1 – Erreur en fonction de la classe des systèmes.

b – Précision dynamique en poursuite.

On a établi précédemment que :

$$\frac{\varepsilon(p)}{Y_c(p)} = \frac{1}{1+T(p)}$$

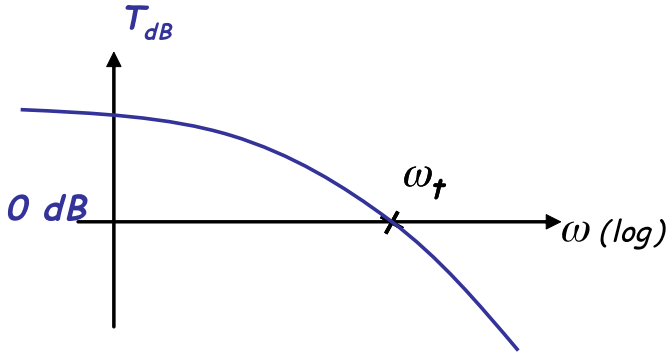


Fig. IV.3 – Allure typique de la FTBO d'un système physique.

D'où, en considérant l'allure typique de la FTBO d'un système physique donnée figure IV.3 on peut établir que :

- pour $\omega << \omega_T$, les composantes basses fréquences des signaux, on a $|T(j\omega)| >> 1$ soit $|\underline{\varepsilon}(j\omega)| = \dfrac{|\underline{Y_c}(j\omega)|}{|T(j\omega)|}$ petit. Ce qui correspond à une très bonne précision.
- pour $\omega >> \omega_T$, les composantes hautes fréquences des signaux, on a $|T(j\omega)| << 1$ soit ε grand. Ce qui correspond à une très mauvaise précision.

Ainsi, plus la pulsation de transition (i.e. la bande passante) d'un système est grande, meilleure est sa précision sur une large bande de fréquence (on avait déjà établi qu'une large bande passante entraîne un faible temps de réponse).

c – Précision statique en régulation (c'est-à-dire en présence de perturbations).

D'après $\varepsilon(p) = Y_c(p) - Y(p)$ et en se référant à la figure IV.1, on peut établir :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+T(p)} Y_c(p) - \underbrace{\frac{B(p)}{1+T(p)} N(p)}_{\text{erreur en régulation}}$$

En considérant $Y_c(p) = 0$ et en faisant abstraction du signe on écrira :

$$\varepsilon(p) = \frac{B(p)}{1+T(p)} N(p)$$

On considère une perturbation assimilable à un échelon unitaire $N(p) = 1/p$.

D'où, d'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\frac{B(p)}{1+T(p)}.\frac{1}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{B(p)}{1+T(p)}$$

En utilisant une écriture similaire au paragraphe a, on écrit pour $p \to 0$:

$$B(p) = \frac{K_B}{p^{\alpha_B}} \qquad \text{et} \qquad A(p) = \frac{K_A}{p^{\alpha_A}}$$

Avec $K_{A,B}$ les gains statiques des blocs A et B et $\alpha_{A,B}$ les classes correspondantes.

Soit finalement :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} \frac{K_B}{p^{\alpha_B} + \dfrac{K_A K_B}{p^{\alpha_A}}}$$

Le tableau IV.2 synthétise les valeurs de ε_s pour les différentes classes des blocs A et B.

	$\alpha_A = 0$	$\alpha_A = 1, 2, \ldots$
$\alpha_B = 0$	$\varepsilon_s = \dfrac{K_B}{1 + K_A K_B}$	0
$\alpha_B = 1, 2, \ldots$	$\varepsilon_s = \dfrac{1}{K_A}$	0

Tab. IV.2 – Précision statique en régulation (échelon unitaire).

On déduit de la dernière colonne du tableau précédent que l'erreur statique engendrée par une perturbation assimilable à un échelon est nulle s'il existe au moins une intégration en amont de la perturbation.

d – Critères de performance.

Plusieurs critères de performance permettent d'estimer l'erreur (et la rapidité de sa disparition), pour les présenter, on considère un système stable dont l'erreur statique en réponse à un échelon est nulle, cf. figure IV.4.

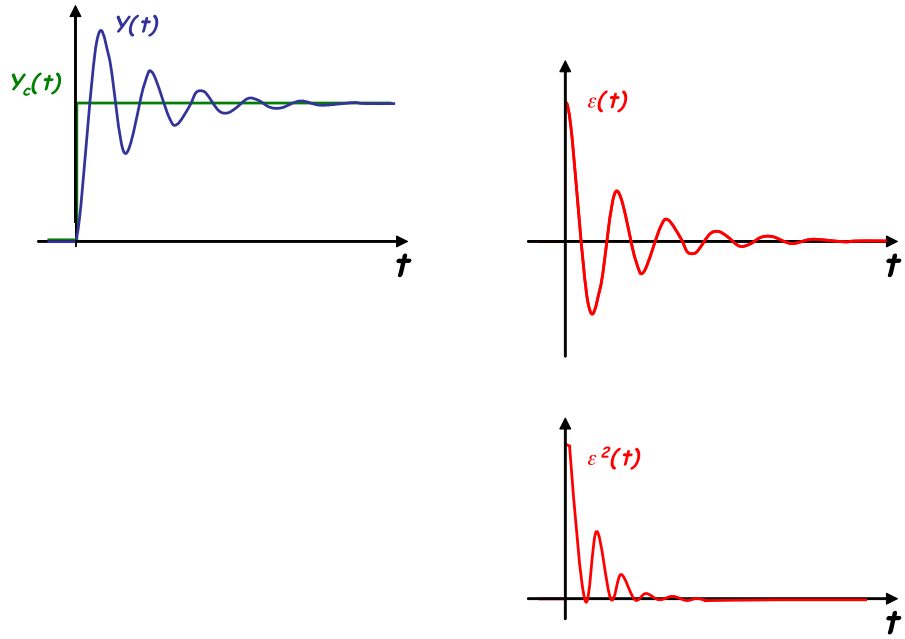


Fig. IV.4 – Visualisation de l'erreur et de l'erreur quadratique.

Un premier critère consiste à intégrer le carré de l'erreur :

$$I = \int_0^{+\infty} \varepsilon^2(t)dt$$

La meilleure précision est obtenue pour I faible.

On rencontre d'autres façons de calculer le critère :

$I = \int_0^{+\infty} |\varepsilon(t)| . dt$ afin de minimiser l'influence excessive du 1er lobe de ε^2

Ou encore :

$I = \int_0^{+\infty} t . |\varepsilon(t)| . dt$ (ITAE, *Integral of Time Multiplied Absolute value of Error*) pour introduire une pondération temporelle du *poids* des lobes.

IV.2. Rapidité des systèmes.

On cherche à obtenir des systèmes asservis une réponse rapide aux variations de la consigne et une aptitude à effacer rapidement les perturbations.

Le **temps de réponse à 5%** donne une bonne évaluation de la rapidité d'un système, il exprime le temps mis par le processus soumis à un échelon pour atteindre sa valeur de régime permanent à ±5% près (**et y rester**). La figure IV.5, illustre la mesure du temps de réponse à 5% pour un 1er et un 2nd ordre.

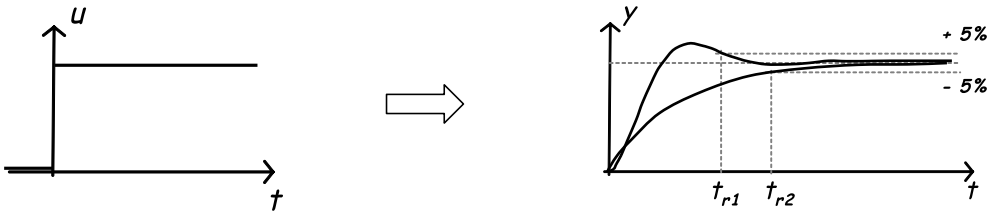


Fig. IV.5 – Illustration de la mesure du temps de réponse à 5%.

Le temps de réaction est lié à l'inertie du système considéré, c'est-à-dire à ses propriétés physiques (réaction rapide d'un micro moteur, dynamiques lentes d'un réacteur nucléaire). Elles ne sont pas modifiables.

Dans le cas d'un 1er ordre, on a établi la relation liant le temps de montée et la fréquence de coupure, $t_m . f_c = 0{,}35$ (cf. §II.1.f) ; le système étant d'autant plus rapide (t_m faible) que sa bande passante est large.

D'une façon générale : l'amélioration de la rapidité (propriété temporelle) d'un système passe par l'élargissement de sa bande passante (propriété fréquentielle).

Pour préciser cette notion, étudions l'effet du bouclage à retour unitaire d'un système du 1er ordre *T(p)* (cf. figure IV.6).

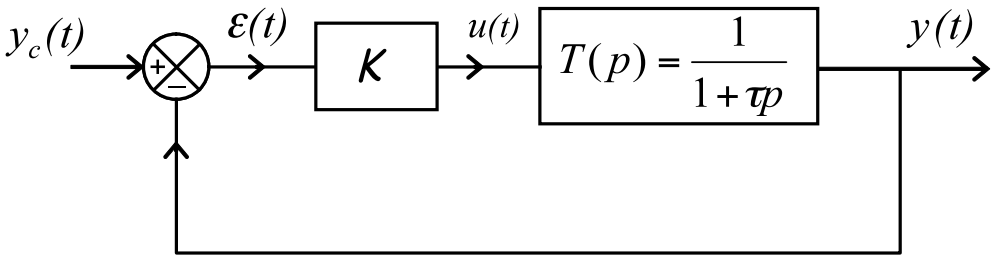


Fig. IV.6 – Asservissement d'un système du 1er ordre[7].

Calcul de la FTBF :

$$H(p) = \frac{K.T(p)}{1+K.T(p)} = ... = \frac{K_1}{1+\tau_1 p} \qquad H(p) \text{ 1er ordre}$$

avec

$$K_1 = K/1+K \quad et \quad \tau_1 = \tau/1+K$$

On en déduit les pulsations de coupure en boucle ouverte :

$$\omega_c = 1/\tau$$

et en boucle fermée :

$$\omega_{c1} = 1/\tau_1 = (1+K)\omega_c$$

Ainsi, le passage en boucle fermée entraîne une multiplication par *1 + K* de la pulsation de coupure et, par conséquence, une division par *1 + K* du temps de montée (cf. $t_m.f_c = 0{,}35$).

On notera, que les propriétés intrinsèques du processus physique *T(p)* ne sont pas modifiées par le passage en boucle fermée, *T(p)* a toujours une pulsation de coupure égale à $1/\tau$. Cependant, le système bouclé se comporte globalement comme s'il avait une bande passante de $1/\tau_1$. C'est la commande générée en entrée de *T(p)* par la boucle d'asservissement qui, du fait de son amplitude, permet d'accélérer la réponse comme illustré figure IV.7 pour la boucle ouverte (à gauche) et pour la boucle fermée (à droite).

La forme de *u(t)*, la loi de commande du système en boucle fermée, appelle deux remarques :

- en pratique, la pointe de commande de *u(t)* est limitée, si on atteint la saturation, le système a un comportement non linéaire et l'étude perd sa validité mathématique,
- un à-coup de démarrage trop important sur *u(t)* n'est pas toujours souhaitable, par exemple, pour éviter un vieillissement trop rapide d'un système mécanique, ou pour des raisons de surconsommation d'énergie.

[7] Le lecteur attentif aura relevé que l'utilisation de la transmittance de Laplace avec des signaux temporels est abusive.

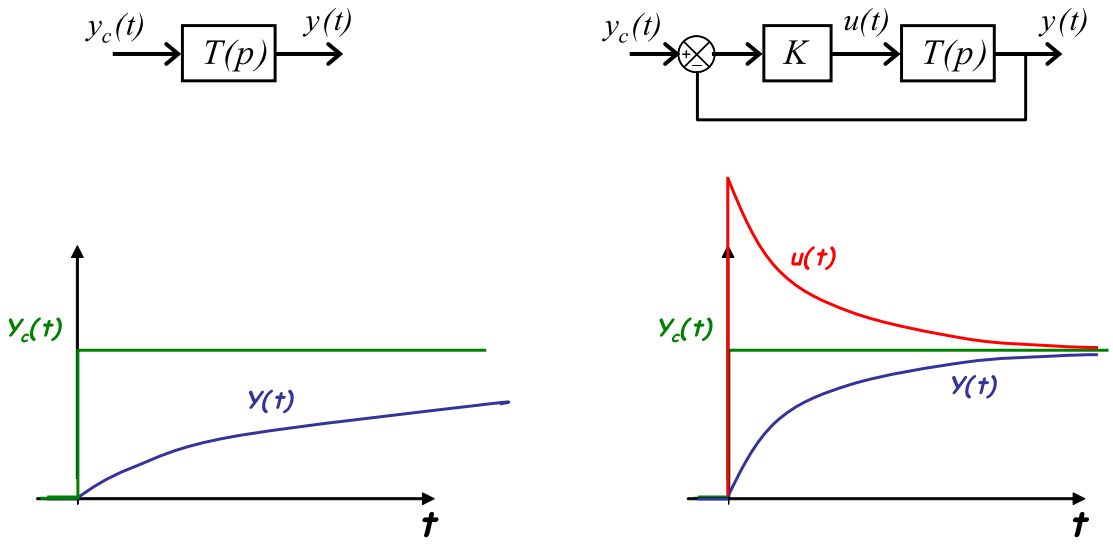


Fig. IV.7 – Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre.

V. Correction des systèmes asservis.

V.1. Introduction.

La bonne qualité d'un asservissement se mesure en termes de stabilité, de rapidité, de précision et d'aptitude à effacer les perturbations. Ces qualités sont déterminées par les caractéristiques physiques propres du système. Il y a alors deux possibilités pour améliorer ses performances : modifier le système, ou bien, ajouter un bloc dans la chaîne directe pour générer une loi de commande adaptée au but recherché.

Le bloc correspondant au deuxième choix est appelé un **correcteur** (cf. figure V.1), le chapitre 5 est consacré à l'étude de la synthèse des correcteurs.

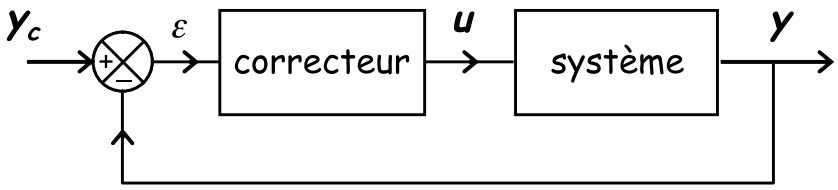


Fig. V.1 – Correction d'un système asservi.

Il existe plusieurs types de lois de commande (tout ou rien, proportionnelle, intégrale, dérivée, etc.), que nous allons énumérer et décrire succinctement dans cette introduction avant d'étudier plus rigoureusement les correcteurs plus complexes réalisés par association de ces lois élémentaires (parties V.2, V.3 et V.4).

a – La commande tout ou rien.

C'est la commande la plus basique telle que :

- pour $\varepsilon > 0$, c.à.d. $y < y_c$, on envoie $u = U_{MAX}$,
- pour $\varepsilon < 0$, c.à.d. $y > y_c$, on envoie $u = 0$.

b – La commande proportionnelle.

L'action u est dosée à proportion du résultat à atteindre et donc de l'erreur ε.

On prend : $u = K.\varepsilon = K.(y_c - y)$

Si K est grand, la correction est énergique et rapide mais le risque de dépassement et d'oscillations dans la boucle s'accroît. Cependant, si K est petit, la correction est molle et lente mais il y a moins de risque d'oscillations.

On a bien vu au IV.2 que la correction proportionnelle permet d'améliorer la rapidité d'un système d'autant plus efficacement que *K* est élevé. Mais cela finit par poser un problème de stabilité comme illustré dans le plan de Nyquist à la figure V.2 pour des valeurs de K croissantes.

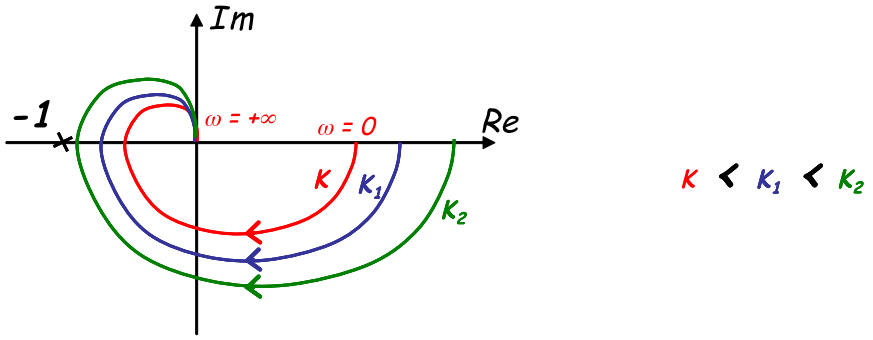


Fig. V.2 – Correction proportionnelle croissante dans le plan de Nyquist.

L'augmentation de *K* s'accompagne d'une proximité croissante du point critique et donc d'un risque d'instabilité croissant. La figure V.3 illustre avec un diagramme de Bode l'apparition d'une instabilité liée à une constante de proportionnalité trop élevée.

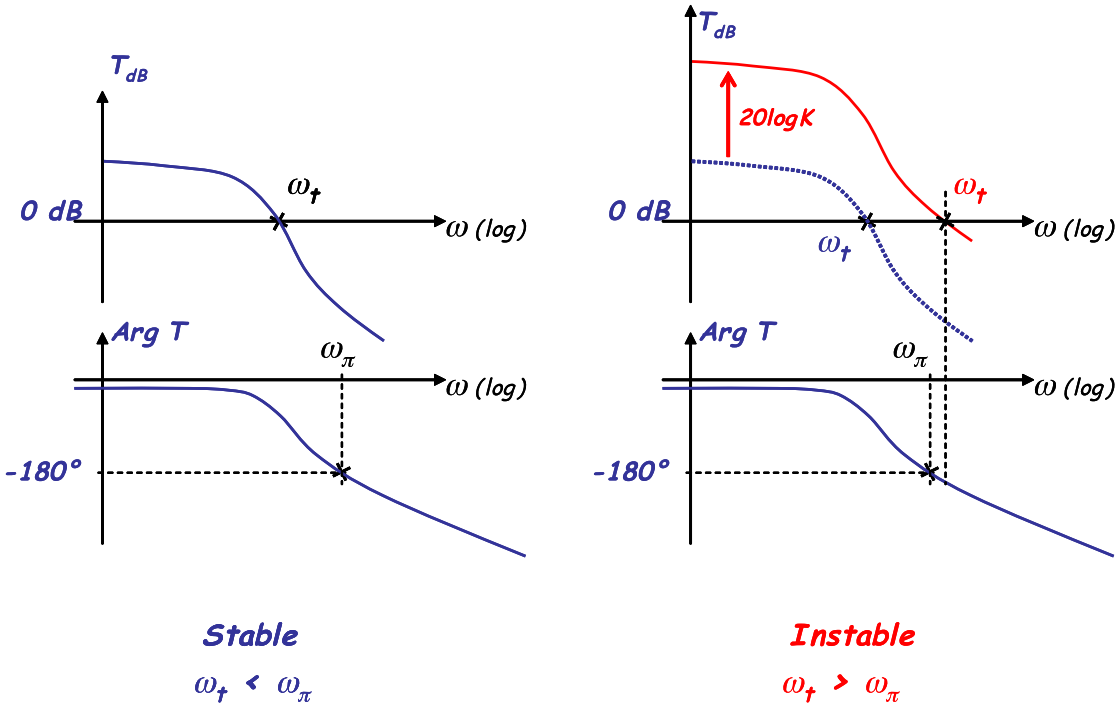


Fig. V.3 – Illustration d'une correction proportionnelle dans le diagramme de Bode et du risque d'instabilité associé.

On notera que la correction proportionnelle a un effet sur l'ensemble de la FTBO (quelle que soit la pulsation).

c – La commande intégrale.

Une loi de commande intégrale permet d'obtenir un démarrage progressif et un effet persévérant.

Loi de commande intégrale :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t \varepsilon(x)dx$$

avec T_i constante de temps d'intégration.

La figure V.4 illustre l'effet de la correction intégrale pour un échelon de consigne.

La commande du système, *u(t)*, est alors une rampe de pente initiale E_0/T_i, la pente va diminuer au fur et à mesure que le système va rejoindre la consigne (et donc que l'erreur va décroître), pour finalement se stabiliser à la valeur atteinte lorsque l'erreur s'annule (dans l'hypothèse où c'est le cas). On parle de commande persévérante car la loi de commande *u(t)* garde une valeur constante non nulle après annulation de l'erreur.

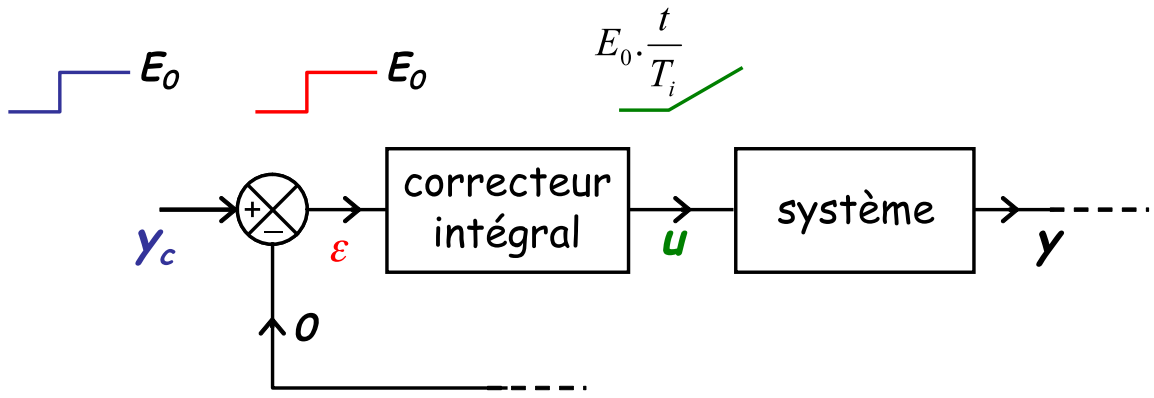


Fig. V.4 – Réponse d'un correcteur intégral à un échelon de consigne.

d – La commande dérivée.

La dérivée de l'erreur ε apporte une information supplémentaire sur son sens d'évolution (augmentation ou diminution) et sur sa dynamique. D'où l'intérêt d'ajouter un terme dérivé au terme proportionnel d'une loi de commande pour exploiter cette information, soit :

$$u(t) = K\left[\varepsilon(t) + T_d\, \varepsilon'(t)\right]$$

Ainsi, si l'erreur est croissante ($\varepsilon' > 0$), on obtient un terme correctif qui s'ajoute à la correction proportionnelle afin d'accélérer sa correction, et à l'inverse, si l'erreur est décroissante ($\varepsilon' < 0$), le terme correctif est retranché ce qui permet de rejoindre *en douceur* la consigne. Cette propriété trouve une application lorsque tout dépassement de la consigne doit

absolument être évité ; l'exemple de l'accostage à quai d'un navire présenté figure V.5 en est une parfaite illustration.

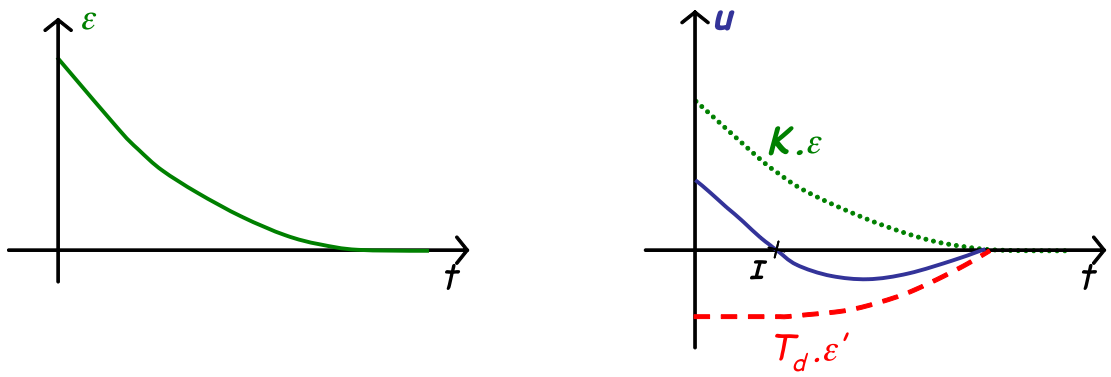


Fig. V.5. – Illustration de la commande dérivée – Accostage d'un navire.

L'erreur, ε, représente la distance entre la navire et le quai. Lors de l'accostage une stratégie optimale consiste à inverser les moteurs peu avant de toucher le quai de façon à l'aborder avec une vitesse nulle. Sur la partie droite de la figure sont reportées, $K.\varepsilon$, la composante proportionnelle, et $T_d.\varepsilon'$, la composante dérivée de la loi de commande u. Le terme dérivé est toujours négatif (et décroissant en valeur absolue), il permet d'obtenir la loi de commande négative désirée (inversion des moteurs) à partir du point d'inversion I, et au final un accostage sans dépassement.

V.2. Correction proportionnelle et dérivée (P.D.) – Correction à avance de phase.

La transmittance de Laplace d'un correcteur proportionnel et dérivé théorique est :

$$C(p) = 1 + \tau.p$$

Cependant, un tel correcteur n'est pas réalisable physiquement (le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur).

En pratique, on utilise un correcteur à avance de phase :

$$\boxed{C(p) = K.\frac{1+\tau.p}{1+a\tau.p} \qquad avec \quad a<1} \qquad \text{Eq. V.1}$$

Le diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase est donné figure V.6.

On calcule :

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}} \quad \text{(moyenne géométrique des deux cassures du Bode asymptotique)}$$

$$\varphi_m = \frac{\pi}{2} - 2.\arctan\sqrt{a} \qquad (\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2)$$

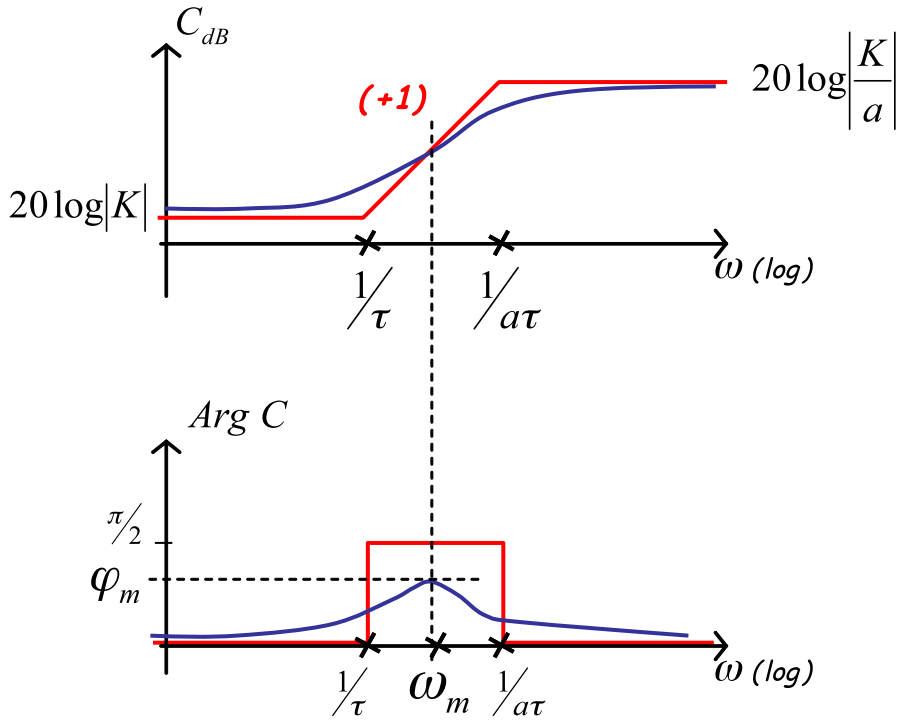


Fig. V.6 – Correcteur à avance de phase (diagramme de Bode).

La forme de l'argument du correcteur justifie le terme *à avance de phase* (on ajoute bien une phase positive). La correction obtenue a également un effet sur l'amplitude qui augmente pour $\omega > \omega_m$.

Ce type de correcteur est utilisé pour améliorer la stabilité et la rapidité (l'augmentation du gain s'accompagne d'une augmentation de ω_T).

La figure V.7 montre l'effet sur le diagramme de Bode de la FTBO d'un système en limite de stabilité (sa marge de phase est nulle) d'un correcteur à avance de phase. Après correction on obtient une marge de phase positive.

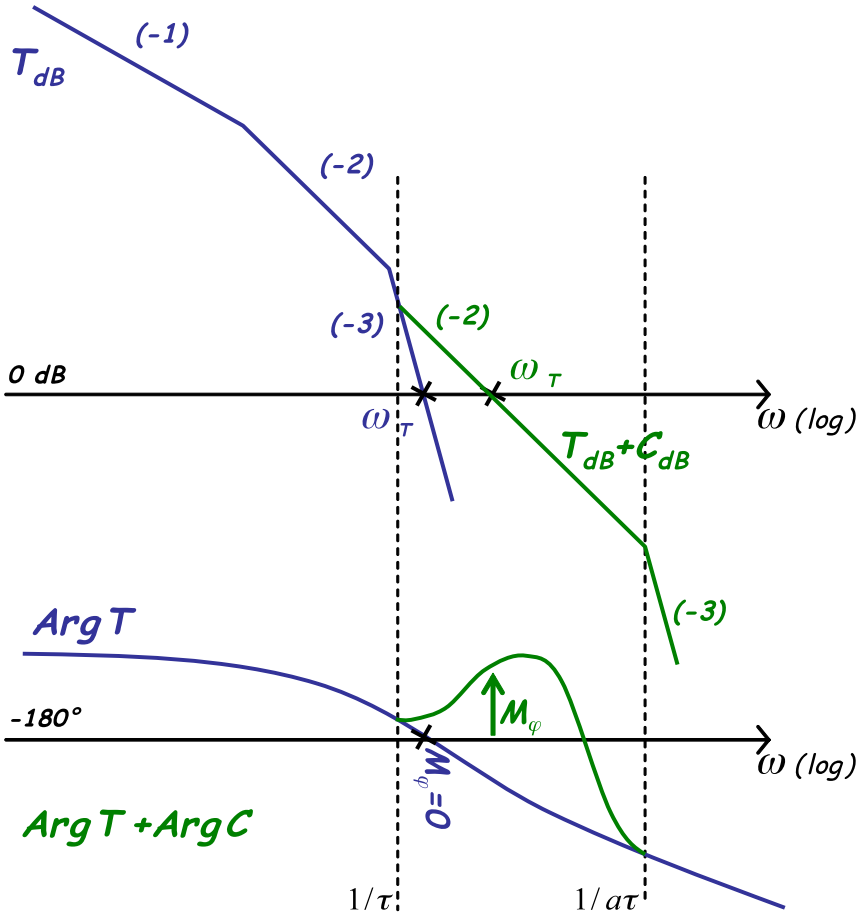


Fig. V.7 – Amélioration de la stabilité (diagramme de Bode).

Le réglage des correcteurs est souvent réalisé dans le plan de Black (la visualisation de la FTBO y étant très synthétique).

La figure V.8 représente l'effet d'un correcteur à avance de phase sur la FTBO, *T(p)*, d'un système résonant dans le plan de Black (la FTBO non corrigée est représentée en bleu, après correction elle apparait en rouge), tel que :

$$FTBO_{corrigée} = C(p).T(p)$$

Avec $C(p) = \dfrac{1+\tau.p}{1+a\tau.p}$ $\quad avec \;\; a<1 \;\; et \;\; 1/\tau < \omega_r < 1/a\tau$.

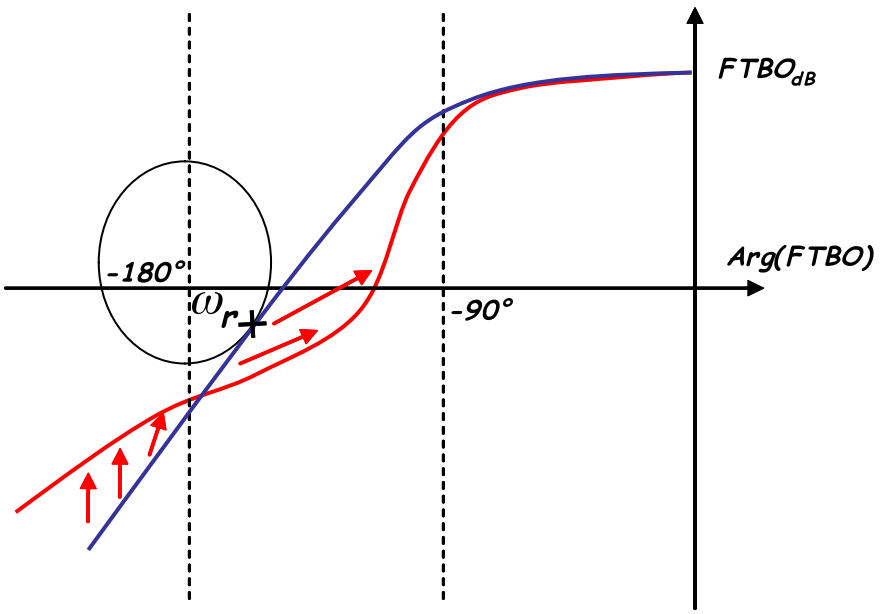


Fig. V.8 – Effet dans le plan de Black d'une correction à avance de phase.

Le choix des paramètres du correcteur (τ et a) est essentiel, si la contrainte $1/\tau < \omega_r < 1/a\tau$ n'est pas respectée, la correction apportée peut être au mieux sans effet sur les marges de stabilité et au pire provoquer une instabilité du système comme représenté figure V.9.

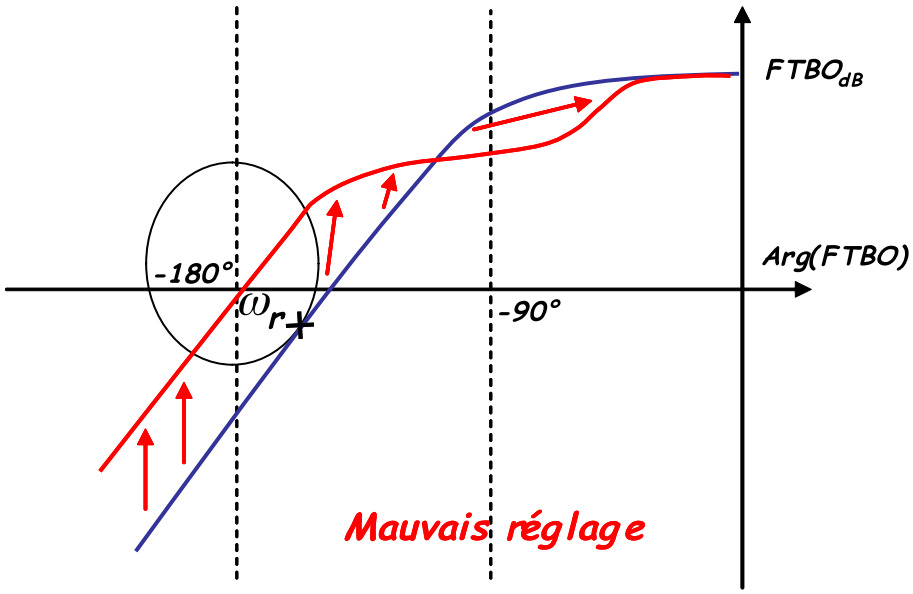


Fig. V.9 – Instabilité due à un mauvais réglage du correcteur à avance de phase.

V.3. Correction proportionnelle et intégrale (P.I.) – Correction à retard de phase.

La transmittance de Laplace d'un correcteur proportionnel et intégral est :

$$C(p) = K.\left(1 + \frac{1}{\tau.p}\right) \qquad \text{Eq. V.2}$$

Le terme intégral apporte une amélioration de la précision (cf. partie IV.1).

La transmittance de Laplace d'un correcteur à retard de phase est :

$$C(p) = K.\frac{1+\tau.p}{1+b\tau.p} \quad avec \quad b>1 \qquad \text{Eq. V.3}$$

Ce correcteur apporte un gain et un retard pour les basses fréquences.

Les diagrammes de Bode de ces deux correcteurs sont donnés figure V.10 (tel que *K=1* pour le correcteur P.I.).

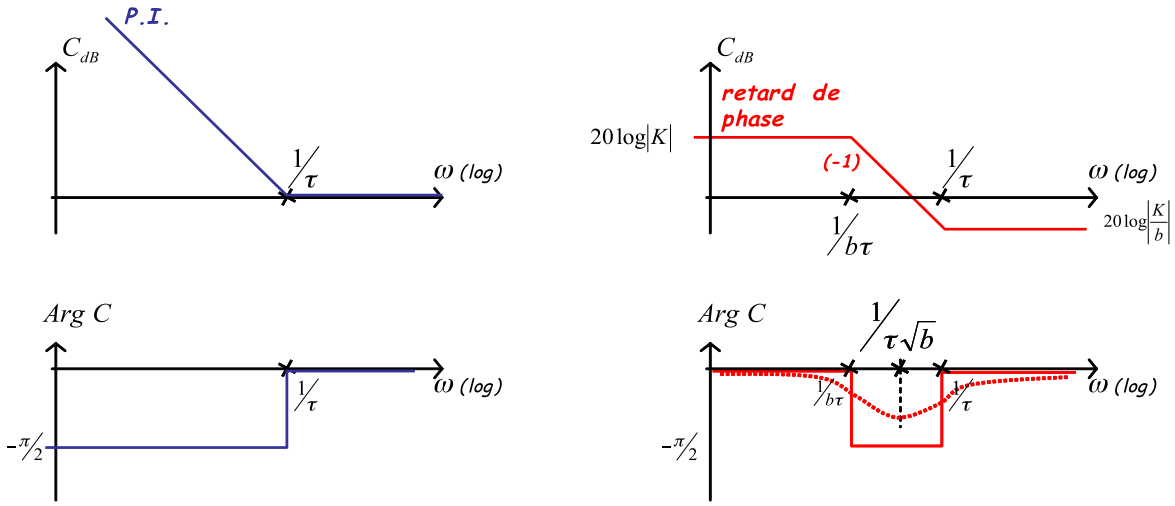


Fig. V.10 – Corrections proportionnelle intégrale et à retard de phase (diagrammes de Bode).

Le correcteur PI permet une augmentation importante du gain en boucle ouverte aux basses fréquences ce qui permet d'améliorer la précision ; sans modification de la FTBO à proximité du point critique et donc sans dégradation des marges de stabilité (si τ est bien choisi).

La figure V.11 illustre dans le plan de Black cet effet pour $1/\tau < \omega_r$. On constate bien que la FTBO n'est modifiée que pour les basses fréquences (inférieures à *1/τ*) et que de ce fait les marges de stabilité ne sont pas modifiées (la FTBO ne change pas à proximité du point critique).

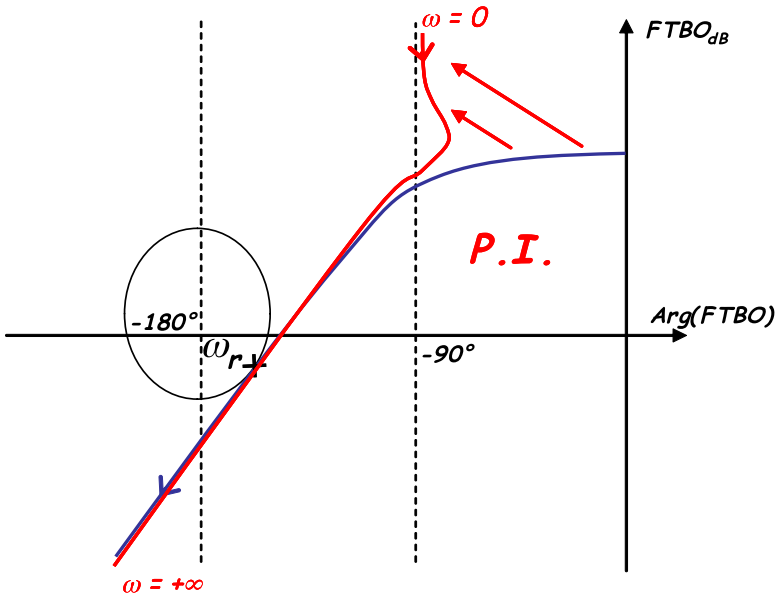


Fig. V.11 – Effet d'un correcteur P.I. dans le plan de Black (réglage correct).

Pour un mauvais choix de τ ($\omega_r < 1/\tau$), les marges de stabilité sont dégradées (cf. figure V.12).

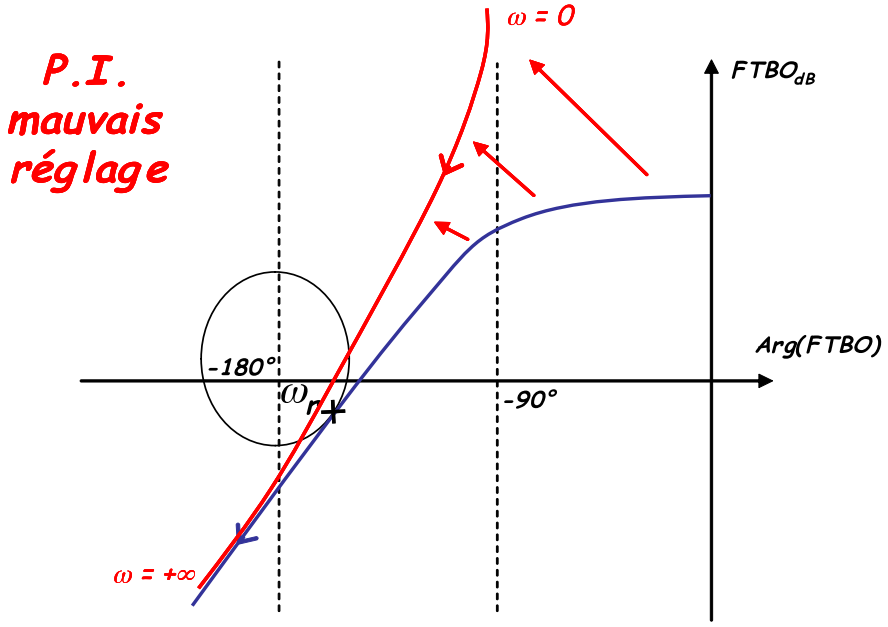


Fig. V.12 – Dégradation des marges de stabilité pour un mauvais réglage du P.I.

La figure V.13 illustre l'effet d'un correcteur à retard de phase dans le plan de Black pour un réglage correcte des paramètres ($\omega_r > 1/\tau$).

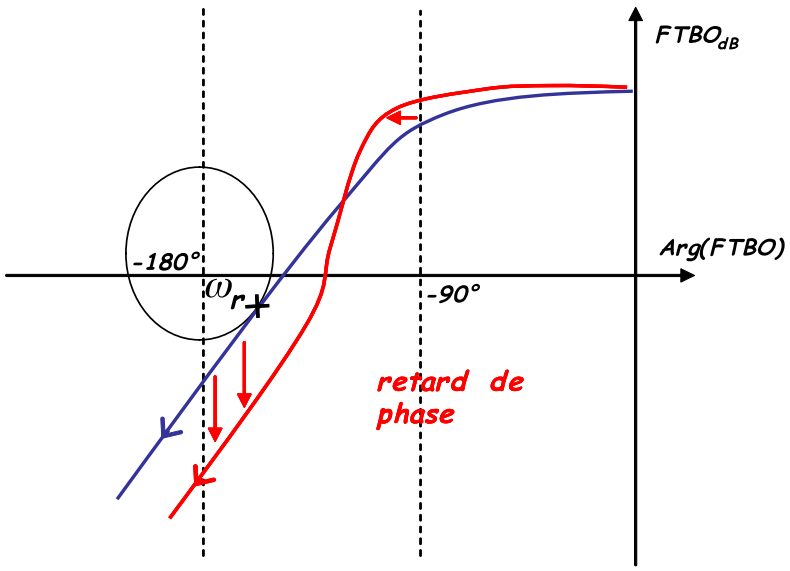


Fig. V.13 - Effet d'un correcteur à retard de phase dans le plan de Black.

V.4. Correction proportionnelle intégrale et dérivée (P.I.D.).

Le terme de dérivation apporte une action stabilisatrice permettant d'améliorer la rapidité, et le terme d'intégration d'effacer l'influence des perturbations constantes et de réguler sans erreur de position.

La transmittance de Laplace d'un correcteur P.I.D. théorique est :

$$C(p) = K.\left(1 + \frac{1}{\tau_i.p} + \tau_d.p\right)$$

(Ce correcteur n'est pas réalisable physiquement, le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur).

En pratique un correcteur P.I.D. réel s'écrit :

$$\boxed{C(p) = K.\left(1 + \frac{1}{\tau_i.p} + \frac{\tau_d.p}{1 + a\tau_d.p}\right) \quad avec \quad a < 1} \qquad \text{Eq. V.4}$$

(Le terme correctif pour parvenir à un correcteur réel se traduit par une limitation du gain et une annulation de la phase en hautes fréquences).

La figure V.14 donne le diagramme de Bode d'un correcteur P.I.D. *réel*, et tel que :

$$1/\tau_i < 1/\tau_d < 1/a\tau_d$$

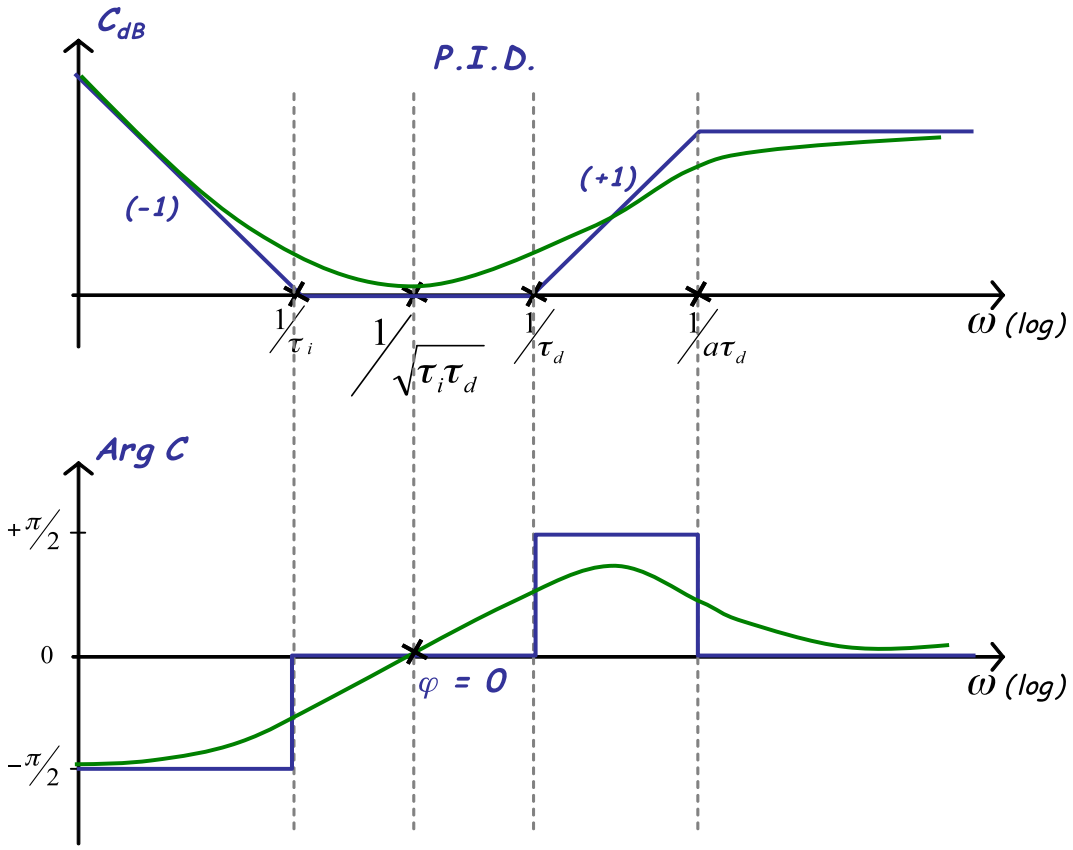


Fig. V.14 – Diagramme de Bode d'un correcteur P.I.D. réel.

L'ajout d'un correcteur P.I.D. modifie la FTBO :

- retard de phase et gain important aux basses fréquences (effets du terme intégrateur),
- peu d'effet aux moyennes fréquences ($\frac{1}{\tau_i} < \omega < \frac{1}{\tau_d}$), la composante à la pulsation $\frac{1}{\sqrt{\tau_i \tau_d}}$ n'étant pas affectée,
- avance de phase (allant en s'amenuisant) et gain aux hautes fréquences.

La figure V.15 permet d'illustrer dans le plan de Black l'effet d'un correcteur PI.D. On observe bien une amélioration des marges de stabilité. Le point $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_i \tau_d}}$ est invariant, on l'appelle communément pivot du P.I.D.

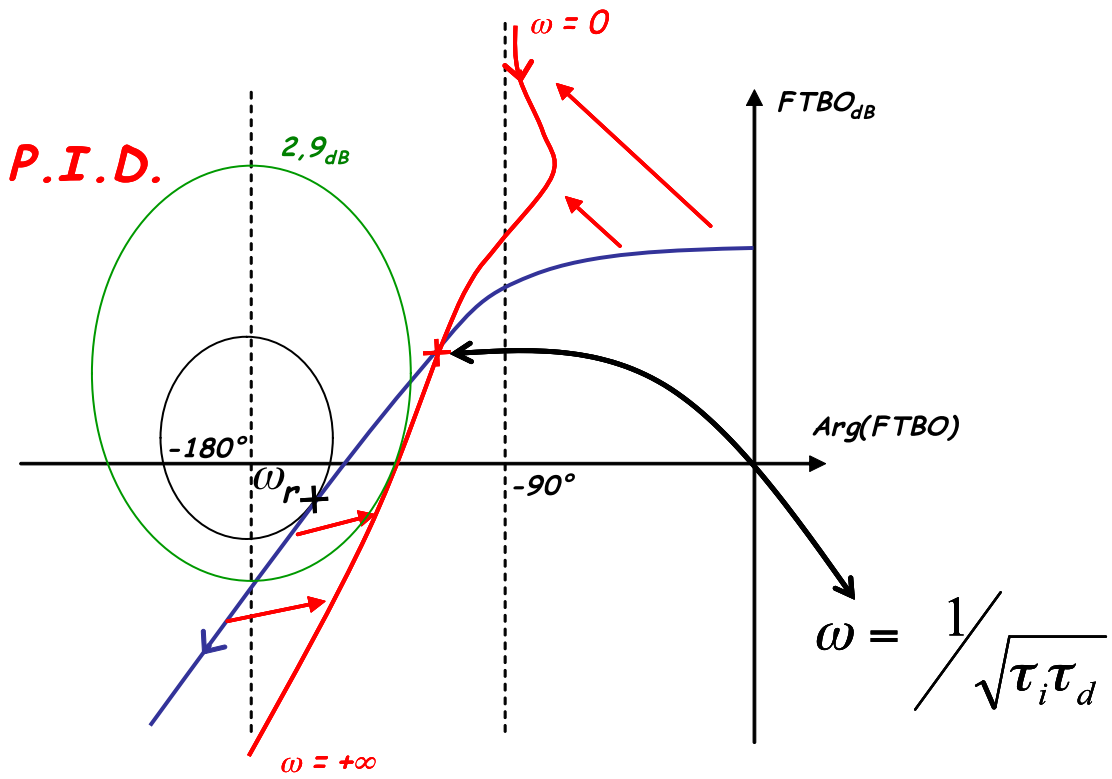


Fig. V.15 – Effet d'un correcteur P.I.D. dans le plan de Black.

Exemple : la figure V.16 présente la correction d'un système par un P.I.D. dans le plan de Black.

Avant correction (en bleu), on relève $M_\phi = 25°$ et $M_G = 4{,}75\ dB$, ce qui est trop faible et $|FTBO|_{dB\ \ \omega=0} = 12\ dB$ soit un gain statique $K_s = 4$ synonyme d'une précision limitée.

Le but, en choisissant une correction P.I.D., est d'obtenir une erreur de position nulle (terme intégral), d'améliorer les marges de stabilité et d'avoir un dépassement indiciel inférieur à *10%* (ce qui correspond à un facteur de résonance $M_{dB} = 0{,}5\ dB$ en assimilant le système à un 2nd ordre, cf. annexe 3).

Le pivot du P.I.D. est choisi en $\omega = 0{,}15\ rad/s$ en prenant $\tau_d = 4\ s$ et $\tau_i = 12\ s$. Pour $K = 1$, courbe verte, on obtient $M_{dB} = 1{,}1\ dB$ (isomodule tangente à la FTBO) soit un dépassement maximal de *15%*. En diminuant K on *abaisse* la courbe, en choisissant $K = 0{,}4$ (courbe rouge) on atteint un facteur de résonance quasi nul (dépassement proche de zéro).

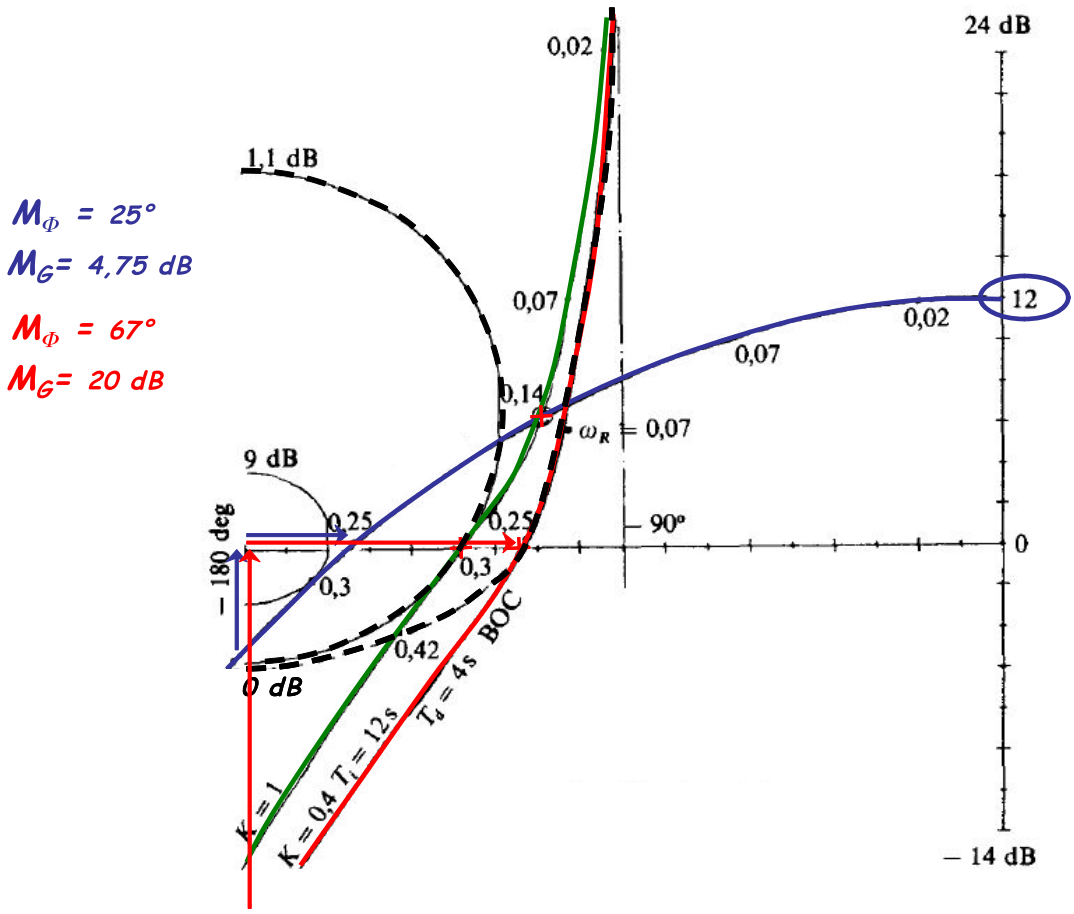
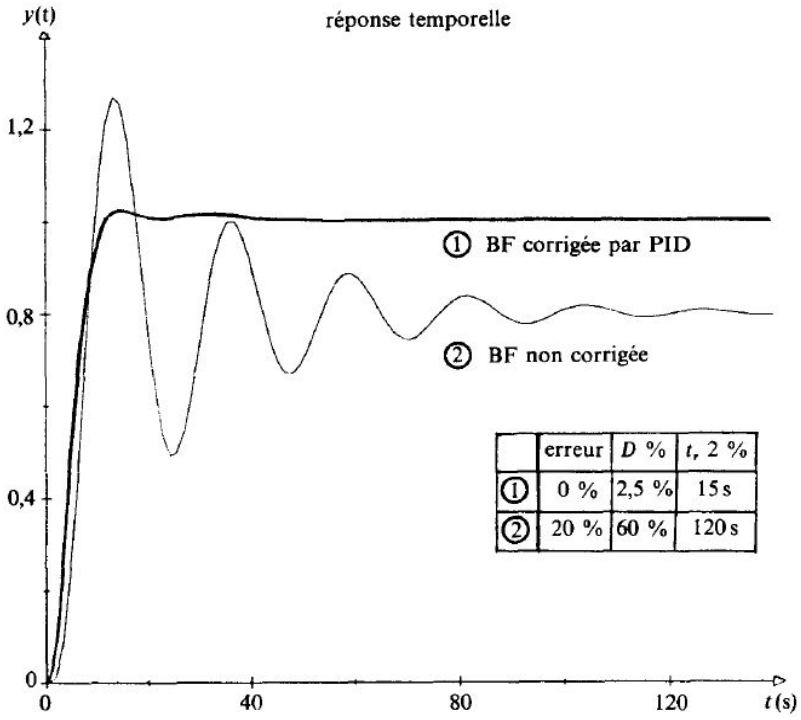


Fig. V.16 – Exemple P.I.D. (Plan de Black).

La figure V.17 présente les résultats précédents dans le domaine temporel.



	erreur	D %	t, 2 %
①	0 %	2,5 %	15 s
②	20 %	60 %	120 s

Fig. V.17 – Correction P.I.D. dans le domaine temporel.

V.5. Modèle du second ordre.

Un critère général de bonne qualité d'un asservissement est la possibilité d'assimiler sa FTBF à un système du second ordre de coefficient d'amortissement *0,5 < m < 0,7*, de pulsation propre non amortie élevée et de gain statique proche de un (cela correspond à un temps de réponse à *5%* faible, à l'absence de déplacement ou à un dépassement faible, à une pseudo-période T_p élevée ayant pour conséquence un nombre d'oscillations faible).

Une méthode usuelle de synthèse d'un correcteur consiste à le choisir tel qu'il modifie la FTBO du système dans le plan de Black de façon à approcher une FTBO corrigée donnant en boucle fermée un comportement similaire à un 2nd ordre répondant aux critères précédents.

La lecture de la FTBO dans le plan de Black permet grâce aux tables données en annexe 3 d'en déduire un modèle équivalent du 2nd ordre en boucle fermée et de dessiner la réponse temporelle à un échelon.
En effet, l'abaque de Black-Nichols permet de retrouver le facteur de résonance en boucle fermée puis le coefficient d'amortissement à partir des tables ; l'abaque donne également la pulsation de résonance en boucle fermée, on en déduit la pulsation propre non amortie (connaissant *m*).

Exemple.
Etablir le modèle du 2nd équivalent de la FTBO représentée figure V.18 (en bleu), et les principaux paramètres permettant de tracer sa réponse temporelle à un échelon.

En $\omega = 0$, la FTBO coupe l'isomodule à *-1,4 dB* on en déduit $|FTBF|_{dB\ \ \omega=0} = -1{,}4\ dB$.

La FTBO est tangente à l'isomodule *3,6 dB*, d'où $\omega_{r\,BF} = 0{,}29\ rad/s$ et $|FTBF|_{dB\ \ \omega=\omega_{r\,BF}} = 3{,}6\ dB$.

On en déduit le facteur de résonance :

$$M_{dB} = |FTBF|_{dB\ \ \omega=\omega_{r\,BF}} - |FTBF|_{dB\ \ \omega=0} = 3{,}6 - (-1{,}4) = 5\,dB$$

Puis grâce au tableau de l'annexe 3 : *m = 0,3* et $\omega_{r\,BF}/\omega_0 = 0{,}91$ d'où $\omega_0 = 0{,}32\ rad/s$.

Calcul du gain statique : $20\log K = -1{,}4\ dB \ \Rightarrow\ K = 0{,}85$.

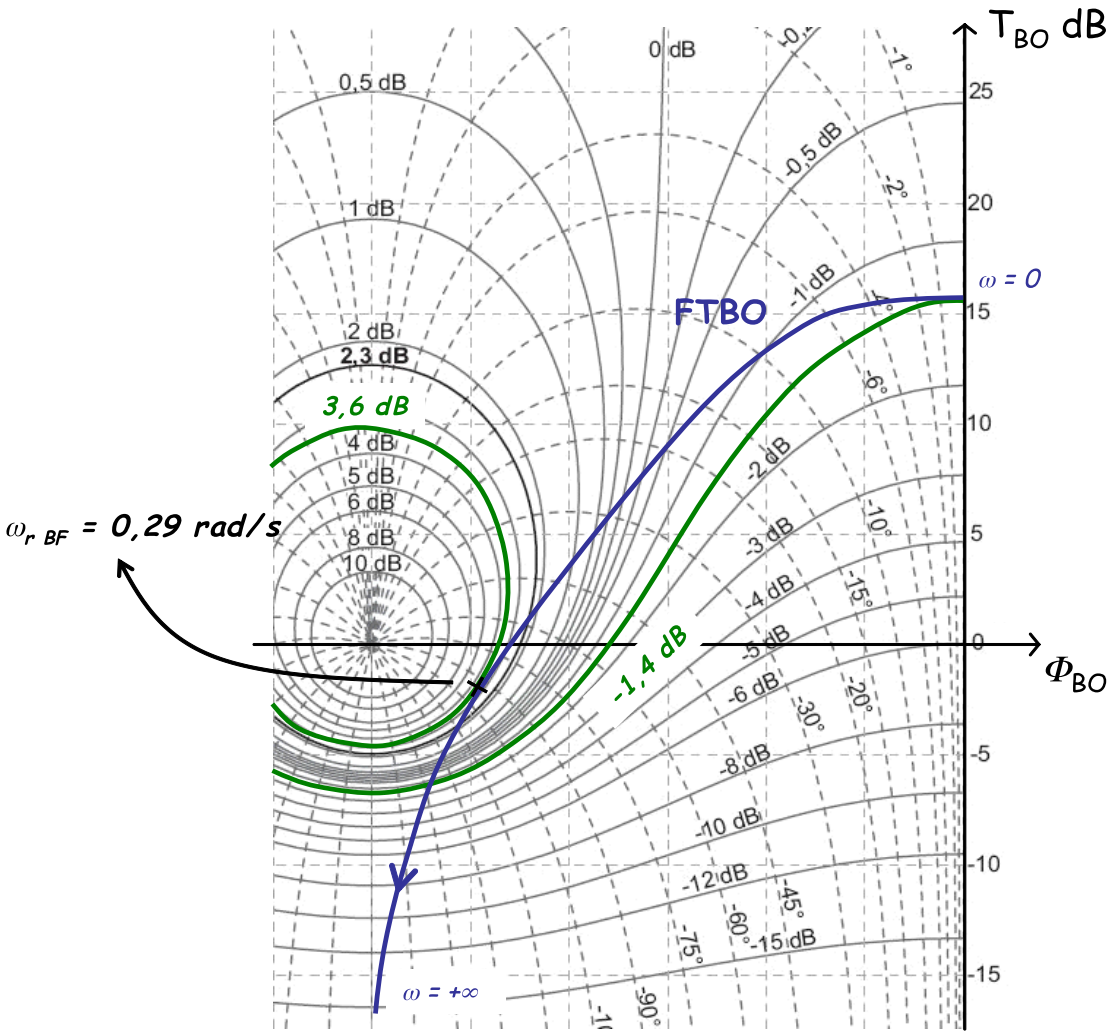


Fig. V.18 – Exemple.

Le tableau donne également les paramètres utiles au tracé temporel :

$$D_1\% = 37\% \qquad tr_{5\%} = 10{,}14/\omega_0 = 32\ s \qquad T_P = 6{,}59/\omega_0 = 21\ s\,.$$

Bibliographie.

"Cours d'automatique, tome 2 – Asservissement, régulation, commande analogique", Maurice Rivoire, Jean-Louis Ferrier, Ed. Eyrolles.

"Electronique Tome 2 : Systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage : Cours et exercices", François Manneville, Jacques Esquieu, Ed. Dunod.

"Automatique: Commande des systèmes linéaires" , Philippe de Larminat, Ed. Hermes.

"Feedback Control of Dynamic Systems", Franklin G.F., Powell J.D., Naemi-Emani A., Addison-Wesley.

Beaucoup de liens de bonne qualité (dans tous les domaines) sur :
http://pagesperso-orange.fr/xcotton/electron/coursetdocs.htm

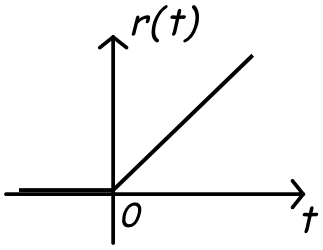
"Cours d'automatique 1ère année", Jean-Paul Bourguet, cours cycle ISMIN.

Une version couleur (bien utile pour appréhender les tracés dans l'abaque de Black-Nichols) et à jour de ce document est disponible à l'adresse :
www.emse.fr/~dutertre/enseignement.html

Annexe 1 – Signaux type.

Rampe unitaire causale.

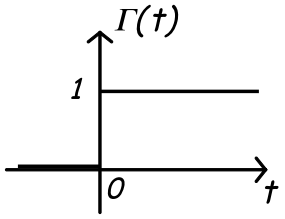
$$r(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 & \text{(causalité)} \\ t \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

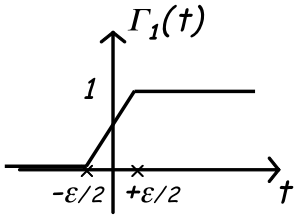


Echelon unitaire $\Gamma(t)$ - Fonction de Heaviside.

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 & \text{(causalité)} \\ 1 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

$\Gamma(t)$ dérivée de $r(t)$

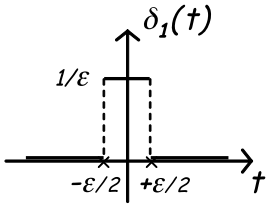




Impulsion unitaire $\delta(t)$ – Impulsion de Dirac.

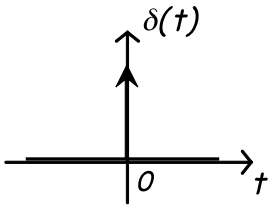
En dérivant Γ_1 on obtient δ_1 :

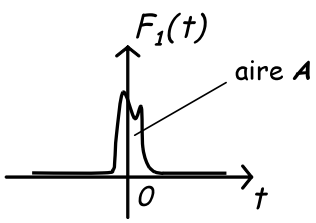
tq $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)dt = 1$

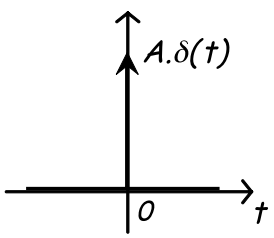


pour $\varepsilon \rightarrow 0$ $\quad \delta_1 \rightarrow \delta$ (distributions)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$



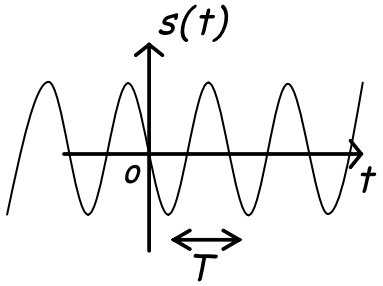




Signal sinusoïdal (périodique).

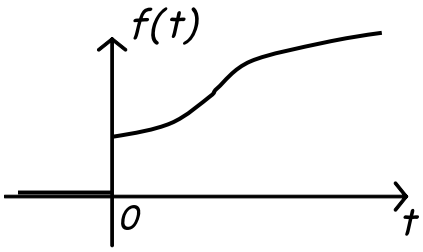
$s(t) = A.\sin(\omega t)$

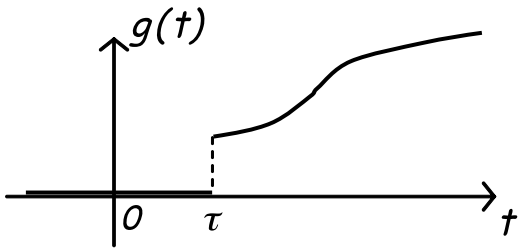
Signal de test pour la réponse fréquentielle.



Signal causal retardé.

$g(t) = f(t-\tau)$





Produit de convolution.

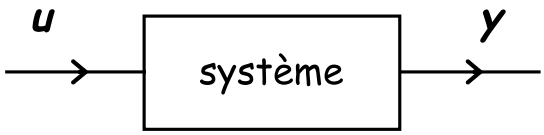
$$p(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta).y(t-\theta)d\theta = (y * x)(t)$$

pour des signaux causals :

$$(x * y)(t) = \int_{0}^{t} x(\theta).y(t-\theta)d\theta$$

Pour un S.L.T.I, en notant ***h(t)*** sa réponse impulsionnelle on a:

$y(t) = (u * h)(t)$



Annexe 2 – Transformée de Laplace.

Transformée de Laplace monolatérale.

$$TL\left[f(t)\right] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt \qquad p = \sigma + j\omega$$

Linéarité.

$$a.f(t) + b.g(t) \xrightarrow{TL} a.F(p) + b.G(p)$$

Convolution.

$$(f * g)(t) \xrightarrow{TL} F(p).G(p)$$

Fonction de transfert – ***H(p)***.

$$y(t) = (u * h)(t) \xrightarrow{TL} Y(p) = U(p).H(p) \qquad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Dérivation en temps.

$$TL\left[f'(t)\right] = p.F(p) - f(0^-)$$

Intégration.

$$TL\left[\int_0^t f(\theta)d\theta\right] = \frac{1}{p}.F(p)$$

Dérivation en *p*.

$$\frac{dF(p)}{dp} = TL\left[-t.f(t)\right]$$

Translation en *p*.

$$TL\left[e^{\alpha t}.f(t)\right] = F(p-\alpha)$$

Théorème du retard temporel.

$$g(t) = f(t-\tau) \;\rightarrow\; TL\left[g(t)\right] = e^{-p\tau}.F(p)$$

Théorème de la valeur initiale.

$$lim_{p\to+\infty} p.TL\left[f(t)\right] = f(0^+)$$

Théorème de la valeur finale.

$$lim_{p\to 0} p.TL\left[f(t)\right] = lim_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty)$$

Transformées de Laplace usuelles.

Dirac : $\delta(t) \xrightarrow{TL} 1$

Échelon : $\Gamma(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p}$

Rampe : $t \xrightarrow{TL} \frac{1}{p^2}$

$e^{-a.t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{p+a}$

$t\,e^{-a.t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{(p+a)^2}$

$sin(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$\cos(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{p}{p^2+\omega^2}$

$e^{-a.t}.cos(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

$e^{-at}.\sin(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Transformées de Laplace inverses usuelles (*f(t)* causale) :

$$\frac{1}{p^n} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n \geq 1$$

$$\frac{1}{1+\tau.p} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad \frac{1+a.p}{1+\tau.p} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{a}{\tau}\left(\delta(t) + \frac{\tau - a}{a\tau} e^{-t/\tau}\right)$$

$$\frac{1}{p.(1+\tau.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} 1 - e^{-t/\tau} \qquad \frac{1+a.p}{p.(1+\tau.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} 1 + \frac{a-\tau}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{p^2.(1+\tau.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \qquad \frac{1+a.p}{p^2.(1+\tau.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} t + (a-\tau) - (a-\tau) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}.\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right)$$

$$\frac{1}{p.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}.\left(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}\right)$$

$$\frac{1}{p^2.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} t - (\tau_1 + \tau_2) - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2}.\left(\tau_2{}^2 e^{-t/\tau_2} - \tau_1{}^2 e^{-t/\tau_1}\right)$$

$$\frac{1+a.p}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{1}{\tau_1.\tau_2.(\tau_1 - \tau_2)}.\left[\tau_2.(\tau_1 - a) e^{-t/\tau_1} - \tau_1.(\tau_2 - a) e^{-t/\tau_2}\right]$$

$$\frac{1+a.p}{p.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} 1 + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)}.\left[(\tau_1 - a) e^{-t/\tau_1} - (\tau_2 - a) e^{-t/\tau_2}\right]$$

$$\frac{1+a.p}{p^2.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} t + (a - \tau_1 - \tau_2) + \frac{\tau_1(\tau_1 - a)}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2(\tau_2 - a)}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}$$

$$\frac{1}{(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau} \qquad \frac{1+a.p}{(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} \left(\frac{\tau - a}{\tau^3}.t + \frac{a}{\tau^2}\right) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{p.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \qquad \frac{1+a.p}{p.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} 1 + \left(\frac{a-\tau}{\tau^2}.t - 1\right) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{p^2.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} t - 2.\tau + (t + 2.\tau) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1+a.p}{p^2.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} t + a - 2.\tau + \left[t.\left(1 - \frac{a}{\tau}\right) + 2.\tau - a\right].e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{(1+\tau.p)^n} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{1}{\tau^n}.\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t/\tau} \qquad \frac{p}{(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{1}{\tau^3}.(\tau - t) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p).(1+\tau_3.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} (\tau_1-\tau_2).(\tau_2-\tau_3).(\tau_3-\tau_1).\left[\tau_1.(\tau_3-\tau_2)e^{-t/\tau_1}+\tau_2.(\tau_1-\tau_3)e^{-t/\tau_2}+\tau_3.(\tau_2-\tau_1)e^{-t/\tau_3}\right]$$

$$\frac{1+a.p}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p).(1+\tau_3.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{1}{(\tau_1-\tau_2).(\tau_2-\tau_3).(\tau_3-\tau_1)}.\left[(\tau_1-a).(\tau_3-\tau_2)e^{-t/\tau_1}+(\tau_2-a).(\tau_1-\tau_3)e^{-t/\tau_2}+(\tau_3-a).(\tau_2-\tau_1)e^{-t/\tau_3}\right]$$

$$\frac{1}{1+\frac{2m}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}.e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}.t\right) \qquad 0<m<1$$

$$\frac{p}{1+\frac{2m}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}.e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}.t+\pi-\arccos m\right)$$

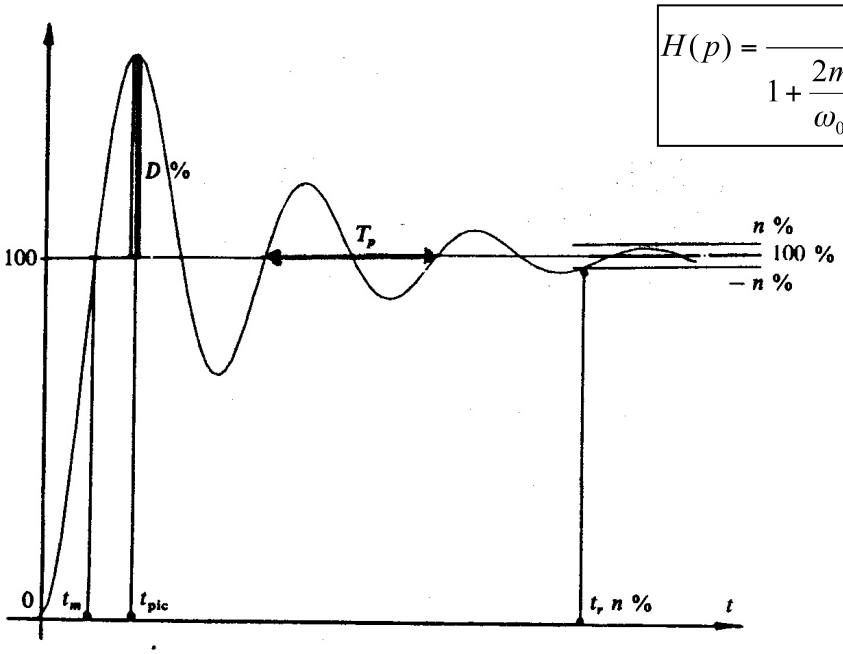
$$\frac{1+a.p}{1+\frac{2m}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}.\sqrt{1-2am\omega_0+a^2{\omega_0}^2}.e^{-m\omega_0 t}.\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}.t+\arctan\frac{a\omega_0\sqrt{1-m^2}}{1-am\omega_0}\right)$$

$$\frac{1}{p.\left(1+\frac{2m}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right)} \xrightarrow{TL^{-1}} 1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}.e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}.t+\arccos m\right)$$

$$\frac{1}{p^2.\left(1+\frac{2m}{\omega_0}.p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right)} \xrightarrow{TL^{-1}} t-\frac{2m}{\omega_0}-\frac{1}{\omega_0.\sqrt{1-m^2}}.e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}.t+2.\arccos m\right)$$

Annexe 3 – Systèmes linéaires du second ordre.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$$



Pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$

Pulsation de coupure $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2 + \sqrt{1 + \left(1 - 2m^2\right)^2}}$

Facteur de résonance $M = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$

Facteur de qualité $Q = \frac{1}{2m}$

Temps de montée $t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}} . (\pi - \arccos m)$

Temps de réponse à *n%* (*m<0,7*) $t_r \cong \frac{1}{\omega_0 m} . \ln\left(\frac{100}{n}\right)$

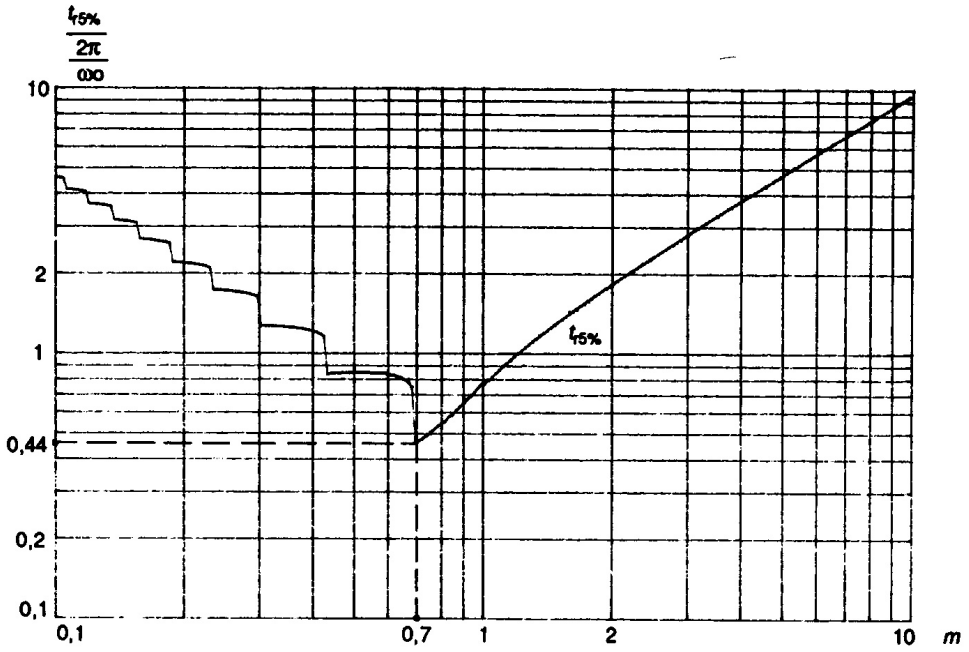
Temps de pic $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$

Pseudo-période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$

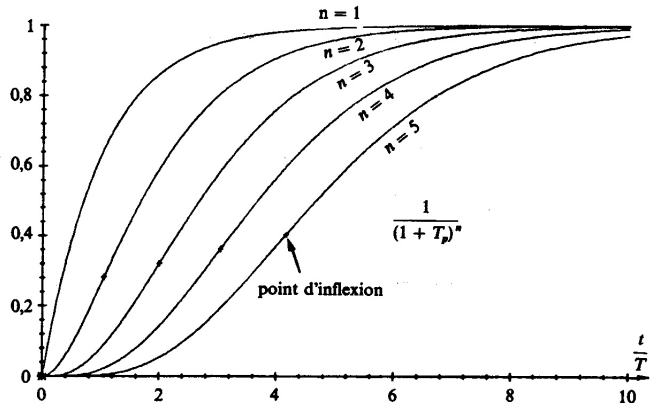
Dépassement $D\% = 100\, e^{-\pi . m / \sqrt{1 - m^2}}$

Nombre d'oscillations complètes $n \cong Q = \frac{1}{2m}$

m	$t_m\omega_0$	$t_{r\,5\%}\omega_0$	$t_{pic}\omega_0$	$T_p\omega_0$	$D\,\%$	ω_r/ω_0	ω_c/ω_0	ω_c/ω_r	M_{dB}	m
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	0,1
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	0,15
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	0,2
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	0,25
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	0,3
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	0,35
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	0,4
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	0,45
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,8	1,2	0,5
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	0,55
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	0,6
0,65	3	5	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	0,65
0,7	3,29	3	4,4	8,8	4,6	0,14	1,01	7,14	0	0,7
0,75	3,66	3,1	4,75	9,5	2,84	-	0,94	-	-	0,75
0,8	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	-	0,87	-	-	0,8
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	-	0,81	-	-	0,85
0,9	6,17	4	7,21	14,41	0,15	-	0,75	-	-	0,9
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	-	0,69	-	-	0,95



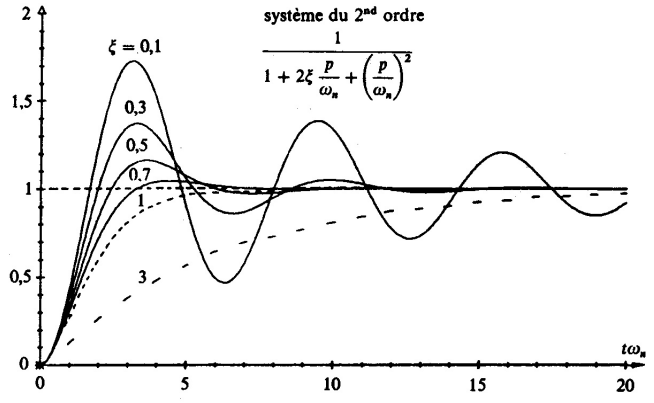
réponse indicielle



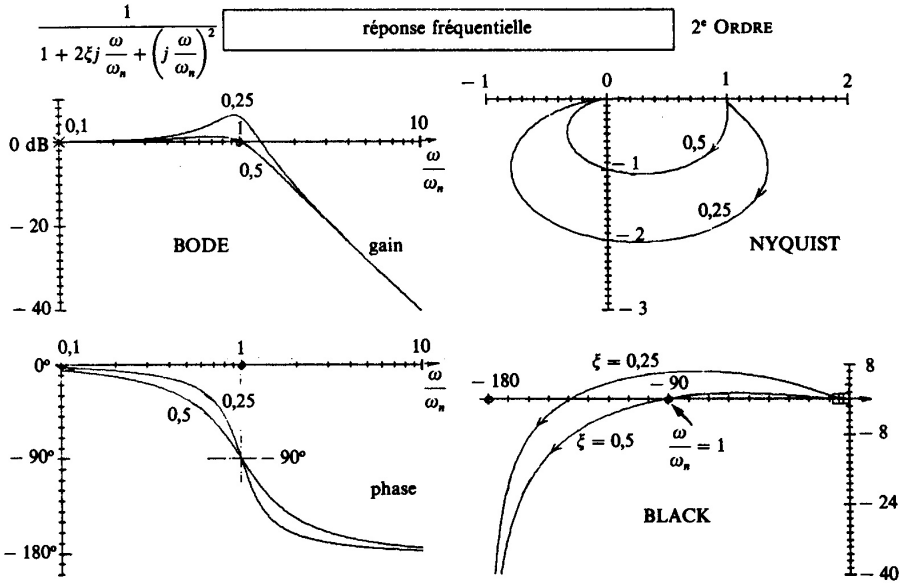
réponse indicielle

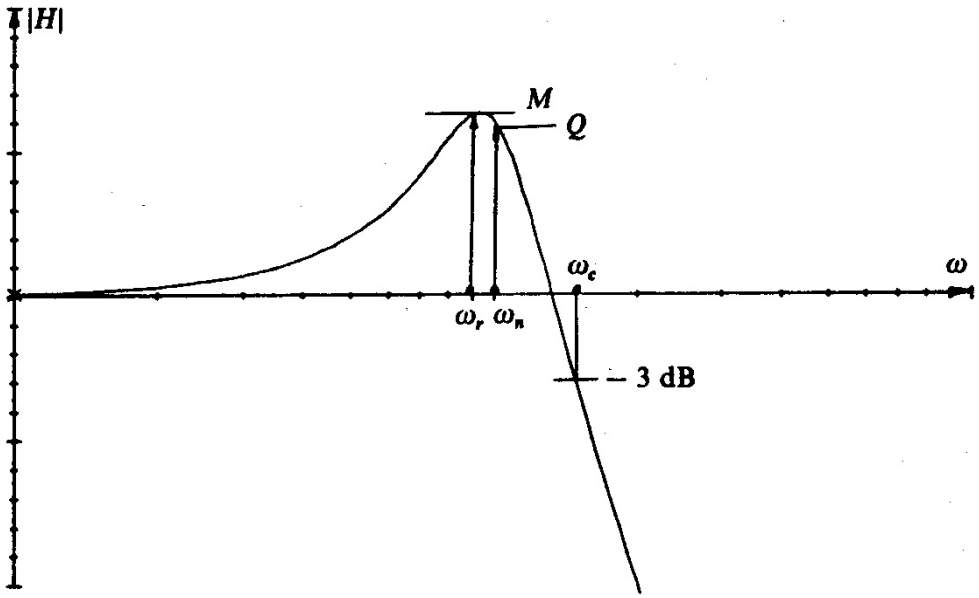
système du 2nd ordre

$\frac{1}{1+2\xi\frac{p}{\omega_n}+\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2}$



$\frac{1}{1+2\xi j\frac{\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ réponse fréquentielle 2e ORDRE




|H|
M
Q
ω_c
ω
ω_r
ω_n
3 dB

Annexe 4 – Abaque de Black-Nichols.

